ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №2, 2004 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧИ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНКИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ

Белубекян М. В., Чил- Акопян Э. О.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Է. Օ. Չիլ-Հակոբյան
Ազատ եզրով սալի տեղայնացված անկայունության խնդիրները

Հետազոտվում է հավասարաչափ սեղմված ուղղանկյուն առաձգական սալի ազատ եզրի շրջակայքում տեղայնացված անկայունության խնդիրը: Ստացված են տեղայնացված անկայունության առկայության պայմանները տարբեր տեսակի եզրային պայմանների համար: Այդ պայմանների հիման վրա կառուցված են աղյուսակներ, որոնք ցույց են տալիս կրիտիկական բեռի կախվածությունը սալի կողմերի հարաբերությունից և Պուասոնի գործակիցներից:

M.V. Belubekyan, E.O. Chil-Akopyan
The Problems of the Located Instability of the Plate with Free Edge

Рассматривается вопрос неустойчивости равномерно сжатой упругой прямоугольной пластинки, локализованной в окрестности кромки. „Очень часто в механике рассматриваются краевые и начально-краевые задачи для неограниченных областей. Между тем, ясно, что в реальности любая сплошная среда является ограниченной. Реже, чем следовало бы, подчеркивают, что задачи для неограниченных сред могут иметь физический смысл лишь как предельные, когда вся внешняя граница или ее часть удаляется на бесконечность. Естественно встает вопрос, при каких условиях модель неограниченной среды достаточно хорошо описывает реальность [1]." Исследование данных задач, в частности, покажет, как далеко должна быть расположена внешняя граница среды, чтобы ее влиянием можно было пренебречь и считать, что она уже „ушла на бесконечность". Задачи с подобного рода граничными условиями уже были рассмотрены, в том числе, в [2, 3], но нас интересует именно вопрос о пределе удаления внешней границы ($a \to \infty$).

1. Пусть прямоугольная пластинка $[0 \le x \le a, 0 \le y \le b, \ -h \le z \le h]$ равномерно сжата по направлению Oy нагрузкой интенсивностью P_0.

По теории тонких пластин Кирхгофа [4] уравнение задачи устойчивости имеет вид:

$$D_i \Delta^2 w + P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \ D_i = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \tag{1.1}$$

где D_i –жесткость пластины, w – прогиб, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, Δ – двухмерный оператор Лапласа.

Принимаем, что кромки пластинки $y = 0, b$ свободно оперты, т.е. граничные условия имеют вид:

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{1.2}$$

Выпишем решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям (1.2) в следующем виде:

$$w = W_n(x) \sin \lambda_n y, \ \lambda_n = n\pi/b, \ n = 1,2,... \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получим:

$$W_n^{IV} - 2\lambda_n^{\,2} W_n^{II} + \lambda_n^{\,4}\left(1-\alpha_n^{\,2}\right) W_n = 0, \; \alpha_n^{\,2} = P_0 / D\lambda_n^{\,2} \qquad (1.4)$$

Далее необходимо искать решение уравнения (1.4) в виде $W_n = Ae^{\lambda_n kx}$, для чего составим характеристическое уравнение

$$k^4 - 2k^2 + 1 - \alpha_n^{\,2} = 0, \; k = \pm\sqrt{1 \pm \alpha_n} \qquad (1.5)$$

В данном случае нас интересуют решения, удовлетворяющие следующему условию:

$$\alpha_n < 1 \qquad (1.6)$$

Так же принимаются следующие обозначения:

$$P_1 = \sqrt{1+\alpha_n}, \; P_2 = \sqrt{1-\alpha_n} \qquad (1.7)$$

Следовательно, корни уравнения (1.5) будут следующие:

$$k_1 = P_1, \; k_2 = -P_1, \; k_3 = P_2, \; k_4 = -P_2 \qquad (1.8)$$

Здесь принято во внимание утверждение [3, с. 131].

„Заметим, что β есть число вещественное ($\beta = \sqrt{\alpha_n - 1}$), т.е.

$$\alpha_n > 1 \qquad (1.9)$$

В самом деле, если бы $\alpha_n \le 1$, то величина критической сжимающей силы рассматриваемого случая равнялась бы Эйлеровой нагрузке или была бы меньше её. Между тем, как удерживание одной из продольных сторон пластинки наверное, увеличивает её жесткость, и следовательно, должно иметь место неравенство (1.9)." В настоящей статье, в отличие от утверждения цитаты (1.9), рассматривается противоположный случай (1.6). Обозначения цитаты из монографии Тимошенко соответствуют обозначениям (1.4), (1.7).

Интеграл уравнения (1.4) будет иметь следующий вид:

$$W_n = C_1 \operatorname{ch}(\lambda_n P_1 x) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda_n P_1 x) + C_3 \operatorname{ch}(\lambda_n P_2 x) + C_4 \operatorname{sh}(\lambda_n P_2 x) \qquad (1.10)$$

2. Рассмотрим два варианта граничных условий:

Один из ненагруженных краев при $x = a$ закреплен шарнирно, а второй при $x = 0$ свободен.

Граничные условия в данном случае будут следующие:

$$\text{При } x = 0 \quad W_n^{\,II} - \nu\lambda_n^{\,2} W_n = 0, \; W_n^{\,III} - (2-\nu)\lambda_n^{\,2} W_n^{\,I} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\text{При } x = a \quad W_n = 0, \; W_n^{\,II} = 0 \qquad (2.2)$$

Подставляя уравнение (1.10) в граничные условия (2.1), получим следующую систему уравнений:

$$x=0 \qquad \begin{cases} C_1\left(P_1^2-\nu\right)+C_3\left(P_2^{\ 2}-\nu\right)=0 \\ C_2P_1\left(P_1^{\ 2}+2-\nu\right)+C_4P_2\left(P_2^{\ 2}+2-\nu\right)=0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Используя условие (2.2), получим:

$$C_1=-C_2\cdot \mathrm{th}(\lambda_n P_1 a),\ C_3=-C_4\cdot \mathrm{th}(\lambda_n P_2 a) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и решая систему, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\mathrm{th}(P_2 n\pi a/b)}{\mathrm{th}(P_1 n\pi a/b)}=\frac{P_2(P_2^{\ 2}-2+\nu)\cdot(P_1^{\ 2}-\nu)}{P_1(P_1^{\ 2}-2+\nu)\cdot(P_2^{\ 2}-\nu)} \tag{2.5}$$

Используя обозначения (1.6), уравнение (2.5) можно преобразовать следующим образом:

$$L_1(\alpha_n,\xi_n)=\frac{\mathrm{th}(P_2\xi_n)}{\mathrm{th}(P_1\xi_n)}-\frac{P_2(P_1^{\ 2}-\nu)^2}{P_1(P_2^{\ 2}-\nu)^2}=0,\ \xi_n=\frac{n\pi a}{b} \tag{2.6}$$

Данная функция при $0<\alpha<1$ и согласно естественному условию $0<\nu<0.5$ обладает следующими свойствами:

$$L_1(0,\xi_n)=\frac{\mathrm{th}\,\xi_n}{(1-\nu)^2}-\frac{\mathrm{th}\,\xi_n}{(1-\nu)^2}=0 \tag{2.7}$$

$$L_1(1,\xi_n)=\frac{\xi_n}{(2-\nu)^2}-\frac{\mathrm{th}(\sqrt{2}\xi_n)}{\sqrt{2}\cdot\nu^2}$$

Так как

$$\left.\frac{\partial L_1}{\partial\alpha_n}\right|_{\alpha_n=0}=\frac{-\xi_n}{(1-\nu)^2\,\mathrm{ch}^2\,\xi_n}-\frac{(1+\nu)\cdot(3-\nu)}{(1-\nu)^3}\cdot\mathrm{th}\,\xi_n<0 \tag{2.8}$$

то отсюда следует, что для существования решения уравнения (2.6), удовлетворяющего условию (1.6), необходимо, чтобы было выполнено неравенство $L_1(1,\xi_n)>0$, т.е.

$$F(\xi_n,\nu)\equiv\frac{\nu^2}{(2-\nu)^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\xi_n-\mathrm{th}(\sqrt{2}\cdot\xi_n)>0 \tag{2.9}$$

Примем следующее обозначение:

$$\sqrt{2}\cdot\xi_n\equiv\chi_1 \tag{2.10}$$

Исследование функции (2.9) показало, что функция имеет положительные значения в зависимости от ν и χ_1.

Результаты вычислений приведены в табл.1 и условием существования локализованной неустойчивости является неравенство:

$$\chi_1 > \chi_{1*}. \tag{2.11}$$

Таблица 1

ν	χ_{1*}	a/b
0.5	9	2,026
0.4	16	3,601
0.3	32,2	7,248
0.2	81	18,231
0.1	361	81,254

3. Один из ненагруженных краев при $x = a$, жестко закреплен, а второй при $x = 0$ свободен.

Граничные условия при жестком закреплении будут следующими:

При $x = 0$ $$W_n^{II} - \nu\lambda_n^2 W_n = 0,\ W_n^{III} - (2-\nu)\lambda^2 W_n^{I} = 0 \tag{3.1}$$

При $x = a$ $$W_n = 0,\ W_n^{I} = 0 \tag{3.2}$$

Подставляя уравнение (1.10) в граничные условия (3.1) и (3.2), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&C_1\left(P_1^2 - \nu\right) + C_3\left(P_2^2 - \nu\right) = 0\\
&C_2 P_1\left(P_1^2 + 2 - \nu\right) + C_4 P_2\left(P_2^2 + 2 - \nu\right) = 0\\
&C_1 \operatorname{ch}(\lambda_n P_1 a) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda_n P_1 a) + C_3 \operatorname{ch}(\lambda_n P_2 a) + C_4 \operatorname{sh}(\lambda_n P_2 a) = 0\\
&C_1 P_1 \operatorname{sh}(\lambda_n P_1 a) + C_2 P_1 \operatorname{ch}(\lambda_n P_1 a) + C_3 P_2 \operatorname{sh}(\lambda_n P_2 a) + C_4 \operatorname{ch} P_2 (\lambda_n P_2 a) = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Решая эту систему, после ряда преобразований приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
&-2P_2 - \operatorname{sh}(\lambda_n P_1 a)\cdot\operatorname{sh}(\lambda_n P_2 a)\cdot\frac{P_2^2(P_1^2-\nu)^2 + P_1^2(P_2^2-\nu)^2}{P_1(P_2^2-\nu)\cdot(P_1^2-\nu)} +\\
&+ \operatorname{ch}(\lambda_n P_1 a)\cdot\operatorname{ch}(\lambda_n P_2 a)\cdot\left[\frac{P_2(P_1^2-\nu)^2 + P_2(P_2^2-\nu)^2}{(P_2^2-\nu)\cdot(P_1^2-\nu)}\right] = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Приведем данное уравнение к следующему виду:

$$\begin{aligned}
&\frac{-2P_2}{\operatorname{ch}(\lambda_n P_1 a)\cdot\operatorname{ch}(\lambda_n P_2 a)} - \left[\frac{P_2^2(P_1^2-\nu)}{P_1(P_2^2-\nu)} + \frac{P_1(P_2^2-\nu)}{(P_1^2-\nu)}\right] +\\
&+ \left[\frac{P_2(P_1^2-\nu)}{(P_2^2-\nu)} + \frac{P_1(P_2^2-\nu)}{(P_1^2-\nu)}\right] = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Далее переходим к исследованию уравнения (3.5). После ряда преобразований данное характеристическое уравнение приходит к виду:

$$L_2(\alpha_n) \equiv 2P_1(P_1^2 - \nu)\cdot(P_2^2 - \nu)\frac{\mathrm{ch}[\lambda_n(P_1 - P_2)a] - 1}{(P_1 - P_2)^2} -$$

$$-(P_1P_2 + \nu)^2 \,\mathrm{sh}(\lambda_n P_1 a)\frac{\mathrm{sh}(\lambda_n P_2 a)}{P_2} + \tag{3.6}$$

$$+P_1(P_1 + P_2)^2 \,\mathrm{ch}(\lambda_n P_1 a)\cdot \mathrm{ch}(\lambda_n P_2 a) = 0$$

Разложив в ряд член $\dfrac{\mathrm{ch}[\lambda_n(P_1 - P_2)a] - 1}{(P_1 - P_2)^2}$ выражения (3.6), получим следующее:

$$L_3(\alpha_n) \equiv P_1(P_1^2 - \nu)\cdot(P_2^2 - \nu)\lambda_n^2 a^2 -$$

$$-(P_1P_2 + \nu)^2 \,\mathrm{sh}(\lambda_n P_1 a)\frac{\mathrm{sh}(\lambda_n P_2 a)}{P_2} + \tag{3.7}$$

$$+P_1(P_1 + P_2)^2 \,\mathrm{ch}(\lambda_n P_1 a)\cdot \mathrm{ch}(\lambda_n P_2 a) = 0$$

Функция $L_3(\alpha_n)$ обладает следующими свойствами:

$$\lim_{\alpha_n \to 0} L_3(\alpha_n) \equiv (1-\nu)^2 \cdot \lambda_n^2 a^2 - (1+\nu)^2 \cdot \mathrm{sh}^2(\lambda_n a) + 4\cdot \mathrm{ch}^2(\lambda_n a) > 0 \tag{3.8}$$

Так как данная функция всегда положительна, то для существования локализованной неустойчивости необходимо, чтобы было выполнено следующее неравенство:

$$\lim_{\alpha_n \to 1} L_3(\alpha_n) = -\frac{\nu(2-\nu)}{\sqrt{2}}\chi_2^2 - \frac{\nu^2}{\sqrt{2}}\chi_2 \cdot \mathrm{sh}(\chi_2) + 2\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\cdot(\chi_2) < 0 \tag{3.9}$$

Здесь принято следующее обозначение:

$$\sqrt{2}\cdot\lambda_n \cdot a \equiv \chi_2 \tag{3.10}$$

Исследование функции (3.9) показало, что она имеет отрицательные значения в зависимости от ν и χ_2, т.е. локализованная неустойчивость существует при $\chi_2 > \chi_{2*}$.

Результаты расчетов приведены в табл.2.

Таблица 2

ν	χ_{2*}	a/b
0.5	16	3,6
0.4	25	5,627
0.3	44,5	10
0.2	100	22,5
0.1	400	90

При $a \to \infty$ уравнения (2.5) и (3.6) полностью совпадают с характеристическим уравнением задачи локализованной неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы со свободным краем [5]. Аналогичные уравнения получаются также для задачи распространения локализованной у свободной кромки изгибной волны [6].

Из сравнения табл. 1 и 2 следует, что возможность локализованной устойчивости для пластины с шарнирным краем $x = a$ намного реальнее, чем с закрепленным. Например, при $\nu = 0.5$ соотношение сторон a/b, при котором появляется локализованная неустойчивость, отличается приблизительно в восемь раз.

В случае, когда на краю $x = a$ заданы условия скользящего контакта: $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$, всегда (независимо от длины a) существует решение, удовлетворяющее условию (1.6), т.е. критическая нагрузка меньше критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости пластинки по форме цилиндрической поверхности. Тем более, критическая нагрузка будет удовлетворять условию (1.6) при условии свободного края $x = a$, независимо от размера a.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. О проблемах и перспективах современной математической гидродинамики. // Успехи Механики. 2002. Т.1. №1. С. 90-102.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат. 1963. 880 с.
3. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней пластин и оболочек. М.: Наука. 1971. 808 с.
4. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1991. 336 с.
5. Белубекян М. В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: Изд-во Ереванского Госунта.1997. С. 95 – 99.
6. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. // ПМ.1994. Т. 30..№2. С.61 – 68.

Институт Механики
НАН РА

Поступила в редакцию
10.03.2004