ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №2, 2004 Механика

УДК 539.3

О ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА

Саргсян А.М.

Ա.Մ.Սարգսյան

Սեպի համար առաձգականության տեսության հակահարթ խնդրում լարումների լոգարիթմական եզակիության մասին

Աշխատանքում հետազոտված է սեպի համար առաձգականության տեսության հակահարթ խնդիրներում լարումների լոգարիթմական եզակիության առաջացման հնարավորության հարցը կախված եզրային պայմանների տեսքից և սեպի անկյան բացվածքի մեծությունից:

Ստացված են պայմաններ, որոնց դեպքում սեպի գագաթի շրջակայքում լարումները ունեն լոգարիթմական եզակիություն:

A.M.Sargsyan

On logarithmic singularities of stresses in an antiplane problem of elasticity theory for a edge

В работе исследуется вопрос о возможности появления логарифмической особенности напряжений в антиплоских задачах теории упругости для клина в зависимости от вида граничных условий и величины угла раствора клина.

Получены условия, при которых в окрестности вершины клина напряжения имеют логарифмическую особенность.

Известно, что решение антиплоской задачи теории упругости для клина стремится к бесконечности при некоторых значениях угла раствора клина. Такой факт в [1] назван парадоксом, для устранения которого было привлечено однородное решение. Этот же метод был успешно применен в [2] при решении аналогичных задач для цилиндрически-анизотропного клина.

В этих и других работах [3, 4] показано, что напряжения в окрестности таких углов имеют логарифмическую особенность.

В работе [5] установлено, что парадокс, как таковой, не существует и его появление связано с выбором метода решения задач.

В данной работе обсуждается вопрос о возможности появления логарифмической особенности напряжений в задачах теории упругости для однородного изотропного клина, находящегося в состоянии продольного сдвига, в зависимости от граничных условий, вида внешних воздействий и величины угла раствора клина.

Антиплоская задача для клина, занимающего в цилиндрических координатах область $0 \le r \le \infty$, $-\theta_1 \le \theta \le \theta_1$, $-\infty < z < \infty$ формулируется в виде следующих трех граничных задач:

$$\frac{\partial^2 u_z(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z(r,\theta)}{\partial \theta^2} = 0 \tag{1}$$

$$u_z(r, \pm\theta_1) = \begin{cases} u_0^{\pm}(r/a)^{\alpha}, & r < a, \quad \alpha \ge 0 \\ u_0^{\pm}((b-r)/(b-a)), & a \le r \le b \\ 0, & r > b \end{cases} \tag{2}$$

$$\tau_{\theta z}(r, \pm\theta_1) = \begin{cases} \tau_0 (r/a)^\beta, & r \le a, \quad \beta > -1 \\ 0, & r > a \end{cases} \tag{3}$$

$$\tau_{\theta z}(r, +\theta_1) = \begin{cases} \tau_0 (r/a)^\gamma, & r \le a, \quad \gamma > -1 \\ 0, & r > a \end{cases}$$

$$u_z(r, -\theta_1) = \begin{cases} u_0^- (r/a)^{\gamma+1}, & r < a, \quad \gamma > -1 \\ u_0^- ((b-r)/(b-a)), & a \le r \le b \\ 0, & r > b \end{cases} \tag{4}$$

где $u_z(r, \theta)$ – перемещение по направлению оси z, $\tau_{\theta z}$ и τ_{rz} – напряжения

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = \frac{G}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \qquad \tau_{rz}(r, \theta) = G\frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$u_0^{\pm}$ и τ_0 – заданные постоянные величины, G – модуль сдвига материала клина.

Применяя к (1)-(4) интегральное преобразование Меллина, для $u_z(r, \theta)$ в случае граничных условий (2)-(4) получим соответственно

$$u_z^{(2)}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{u_0^+ \sin p(\theta_1 + \theta) + u_0^- \sin p(\theta_1 - \theta)}{(p+\alpha)\sin 2p\theta_1}\left(\frac{r}{a}\right)^{-p} f(p)dp \tag{5}$$

$$u_z^{(3)}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{k_1^+ \sin p\theta}{p(p+\beta+1)\cos p\theta_1}\left(\frac{r}{a}\right)^{-p} dp \tag{6}$$

$$u_z^{(4)}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{k_1^+ \sin p(\theta_1 + \theta) + u_0^- pf(p)\cos p(\theta_1 - \theta)}{p(p+\gamma+1)\cos 2p\theta_1}\left(\frac{r}{a}\right)^{-p} dp \tag{7}$$

где путь интегрирования (L) проходит правее мнимой оси комплексной плоскости p, но левее ближащих особых точек подынтегральных функций в (5)-(7),

$$f(p) = 1 + \frac{p+\nu}{b-a}\left(b\frac{(b/a)^p - 1}{p} - a\frac{(b/a)^{p+1} - 1}{p+1}\right), \qquad k_1^+ = \frac{a\tau_0}{G}.$$

Для исследования характера распределения напряжений в окрестности вершины клина $(r \to 0)$ дополним прямую (L) влево некоторым полукругом и применим теорему о вычетах.

Подынтегральные функции в (5)-(7) имеют только простые полюсы, если среди нулей их знаменателей нет совпадающих. Например, в (5) нули не совпадают, если при данном значении α угол раствора клина $2\theta_1 \ne \pi k/\alpha$, $(k = 1, 2 \ldots)$. Несовпадение нулей в (5)-(7) имеет место также и в тех случаях, когда $0 < \alpha < 1/2$, $-1 < \beta < -1/2$, $-1 < \gamma < -3/4$ при любом значении θ_1 из области $0 < 2\theta_1 \le 2\pi$. Во всех этих случаях в окрестности вершины клина поведение упругих перемещений и напряжений можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
u_z^{(n)}(r,\theta) &= C^{(n)}(\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^{\upsilon_n} + D^{(n)}(\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^{p_1^{(n)}} \\
\tau_{rz}^{(n)}(r,\theta) &= \frac{C^{(n)}(\theta)\upsilon_n}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{\upsilon_n-1} + \frac{D^{(n)}(\theta)p_1^{(n)}}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{p_1^{(n)}-1} \\
\tau_{\theta z}^{(n)}(r,\theta) &= \frac{dC^{(n)}(\theta)}{ad\theta}\left(\frac{r}{a}\right)^{\upsilon_n-1} + \frac{dD^{(n)}(\theta)}{ad\theta}\left(\frac{r}{a}\right)^{p_1^{(n)}-1}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где

$n = 2,3,4;\ \upsilon_2 = \alpha,\ \upsilon_3 = \beta + 1,\ \upsilon_4 = \gamma + 1;\ p_1^{(2)} = p_1^{(3)} = \pi/2\theta_1,\ p_1^{(4)} = \pi/4\theta_1$

$$C^{(2)}(\theta) = \frac{2u_2 \sin\upsilon_2\theta_1 \cos\upsilon_2\theta + 2u_1 \cos\upsilon_2\theta_1 \sin\upsilon_2\theta}{\sin 2\upsilon_2\theta_1}$$

$$C^{(3)}(\theta) = \frac{k_1^+ \sin\upsilon_3\theta}{\upsilon_3 \cos\upsilon_3\theta_1}, \quad u_{1,2} = \frac{u_0^+ \mp u_0^-}{2}$$

$$C^{(4)}(\theta) = \frac{k_1^+ \sin\upsilon_4(\theta_1+\theta) + u_0^-\upsilon_4 f(-\upsilon_4)\cos\upsilon_4(\theta_1-\theta)}{\upsilon_4 \cos 2\upsilon_4\theta_1}$$

$$D^{(2)}(\theta) = -\frac{2u_2 f(-p_1^{(2)})\cos p_1^{(2)}\theta}{2\theta_1(p_1^{(2)}-\upsilon_2)}, \quad D^{(3)}(\theta) = -\frac{2k_1^+ \sin p_1^{(3)}\theta}{\pi(p_1^{(3)}-\upsilon_3)}$$

$$D^{(4)}(\theta) = \frac{k_1^+ \sin p_1^{(4)}(\theta_1+\theta) + u_0^- p_1^{(4)} f(-p_1^{(4)})\cos p_1^{(4)}(\theta_1-\theta)}{\pi(p_1^{(4)}-\upsilon_4)}$$

Из (8) видно, что и в случае граничных условий (2), когда на границах клина заданы значения упругих перемещений, напряжения, кроме обычной степенной особенности, имеют также независящую от угла θ_1 особенность $r^{\alpha-1}$ при $0<\alpha<1$. Причем, в отличие от граничных условий (3) и (4), в этой задаче обычная степенная особенность $(r/a)^{p_1^{(2)}-1}$ исчезает при $u_0^+ = -u_0^-$. Во всех задачах независящая от угла θ_1 особенность напряжений не появляется, если $\alpha > 1,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$.

Заметим, что в случае граничных условий (4) в выражениях для напряжений дополнительно появляется слагаемое $r^{p_1^{(4)}-1}$, где $p_2^{(4)} = 1.5\pi/2\theta_1$ [6].

В подынтегральных функциях (5)-(7), кроме простых полюсов $p=-\alpha$ и $p=-\pi k/2\theta_1$, $p=-(\beta+1)$ и $p=-\pi(2k-1)/2\theta_1$, $p=-(\gamma+1)$ и $p=-0.5\pi(2k-1)/2\theta_1$ появляются и полюсы второго порядка при некоторых значениях угла θ_1, определяемых из условий

$$\pi m/2\theta_1 = \alpha,\ \pi(2m-1)/2\theta_1 = \beta+1,\ 0.5\pi(2m-1)/2\theta_1 = \gamma+1 \tag{9}$$

соответственно $(m = 1,2,\ldots)$.

При выполнении условий (9), т.е. при совпадении полюсов подынтегральных функций, для упругих перемещений и напряжений получим следующие формулы:

$$u_z^{(n)}(r,\theta)=a_m^{(n)}\left[A_m^{(n)}(\theta)+B_m^{(n)}(\theta)\ln\frac{r}{a}\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{\upsilon_n}+\sum_{k=1}^{\infty}{}'\,\overline{B}_k^{(n)}(\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^{p_k^{(n)}}$$

$$\tau_{rz}^{(n)}(r,\theta)=a_m^{(n)}\left[A_m^{(n)}(\theta)\upsilon_n+\left(1+\upsilon_n\ln\frac{r}{a}\right)B_m^{(n)}(\theta)\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{\upsilon_n-1}+\sum_{k=1}^{\infty}{}'\,\overline{B}_k^{(n)}(\theta)p_k^{(n)}\left(\frac{r}{a}\right)^{p_k^{(n)}-1} \quad (10)$$

$$\tau_{\theta z}^{(n)}(r,\theta)=a_m^{(n)}\left[\frac{dA_m^{(n)}(\theta)}{d\theta}+\frac{dB_m^{(n)}(\theta)}{d\theta}\ln\frac{r}{a}\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{\upsilon_n-1}+\sum_{k=1}^{\infty}{}'\,\frac{d\overline{B}_k^{(n)}(\theta)}{d\theta}\left(\frac{r}{a}\right)^{p_k^{(n)}-1}$$

где штрих над суммой означает $k\neq m$,

$$a_m^{(2)}=\frac{(-1)^m}{2\theta_1},\quad a_m^{(3)}=-\frac{2k_1^{*}(-1)^m}{\pi(2m-1)},\quad a_m^{(4)}=\frac{2(-1)^m}{\pi(2m-1)}$$

$$p_k^{(2)}=\frac{\pi}{2\theta_1}k,\quad p_k^{(3)}=\frac{\pi}{2\theta_1}(2k-1),\quad p_k^{(4)}=\frac{\pi/2}{2\theta_1}(2k-1)$$

$$A_m^{(2)}(\theta)=(2\theta_1u_2+2\theta u_1)\cos\frac{\pi}{2}m\cos\upsilon_2\theta-(2\theta_1u_1+2\theta u_2)\sin\frac{\pi}{2}m\sin\upsilon_2\theta+$$

$$+f'(-\upsilon_2)[2u_2\sin\frac{\pi}{2}m\cos\upsilon_2\theta+2u_1\cos\frac{\pi}{2}m\sin\upsilon_2\theta]$$

$$A_m^{(3)}(\theta)=\theta\cos\upsilon_3\theta-\frac{2\theta_1}{2\pi(2m-1)}\sin\upsilon_3\theta$$

$$A_m^{(4)}(\theta)=k_1^{-}[\sin\upsilon_4(\theta_1+\theta)+(\theta_1+\theta)\cos\upsilon_4(\theta_1+\theta)]+$$

$$+u_0^{-}\left[\upsilon_4(\theta_1-\theta)\sin\upsilon_4(\theta_1-\theta)+(1-\upsilon_4f'(-\upsilon_4)-\frac{2\upsilon_4}{\pi}\frac{2\theta_1}{2k-1})\right]\cos\upsilon_4(\theta_1-\theta)$$

$$B_m^{(2)}(\theta)=2u_2\sin\frac{\pi}{2}m\cos\upsilon_2\theta+2u_1\cos\frac{\pi}{2}m\sin\upsilon_2\theta$$

$$B_m^{(3)}(\theta)=\sin\upsilon_3\theta,\quad B_m^{(4)}=\sin\upsilon_4(\theta_1+\theta)$$

$$\overline{B}_k^{(2)}(\theta)=(-1)^k\frac{(2u_2\sin p_k^{(2)}\theta_1\cos p_k^{(2)}\theta+2u_1\cos p_k^{(2)}\theta_1\sin p_k^{(2)}\theta)f(-p_k^{(2)})}{2\theta_1(p_k^{(2)}-\upsilon_2)}$$

$$\overline{B}_k^{(3)}(\theta)=(-1)^{k+1}\frac{2\sin p_k^{(3)}\theta}{\pi(p_k^{(3)}-\upsilon_3)}.$$

$$\overline{B}_k^{(4)}(\theta)=(-1)^{k-1}\frac{2(k_1^{*}\sin p_k^{(4)}(\theta_1+\theta)+u_0^{-}p_k^{(4)}f(-p_k^{(4)})\cos p_k^{(4)}(\theta_1-\theta))}{\pi(p_k^{(4)}-\upsilon_4)}$$

Как следует из (10), напряжения при $r\to 0$ имеют логарифмическую особенность, если $\upsilon_n=1$ $(n=2,3,4)$, т.е. когда

$$а)\ \alpha = 1,\ \ б)\ \beta = 0,\ \ в)\ \gamma = 0 \tag{11}$$

а) $\alpha = 1$. Из первого условия (9) следует, что логарифмическая особенность напряжений появляется только при двух значениях угла раствора клина: $2\theta_1 = \pi$ (когда $m = 1$) и $2\theta_1 = 2\pi$ ($m = 2$). В последнем случае, кроме логарифмической особенности, возникает и обычная степенная особенность $r^{1/2}$. Поэтому, при $u_2 = 0$, а $2\theta_1 = \pi$, исчезает логарифмическая особенность, а при $2\theta_1 = 2\pi$ – степенная особенность. При $u_1 = 0$ исчезает логарифмическая особенность для $2\theta_1 = 2\pi$. Аналогичный результат был получен в работе [4] при изучении антиплоской задачи электроупругости для клина, на границах которого электростатический потенциал линейно зависит от r.

В интервале $0.5 \le \alpha < 1$ $(\pi < 2\theta_1 < 2\pi,\ m = 1)$ возникает обычная степенная особенность $r^{\alpha-1}$ $(\alpha = \pi/2\theta_1)$ и особенность смешанного типа $r^{\alpha-1}\ln r$. При $u_2 = 0$ исчезает второй тип особенности, а особенность $r^{\alpha-1}$, представляющая собой обычную степенную особенность, в данном интервале изменения параметра α устранить невозможно.

Если $\alpha > 1$, то возникшая обычная степенная особенность устраняется при $u_2 = 0$.

б) $\beta = 0$. В этом случае логарифмическая особенность возникает только при $2\theta_1 = \pi$ $(m = 1)$ и устранить ее невозможно.

Для произвольного значения β из интервала $-0.5 \le \beta < 0$ $(\pi < 2\theta_1 < 2\pi,\ m = 1)$ и в этой задаче появляются особенности типа r^{β} и $r^{\beta}\ln r$ $(\beta = \pi/2\theta_1 - 1)$, которые также невозможно устранить.

При $\beta > 0$ имеет место обычная степенная особенность, когда $\pi < 2\theta_1 \le 2\pi$.

в) $\gamma = 0$. Здесь логарифмическая особенность появляется при $2\theta_1 = \pi/2$ $(m = 1)$ и $2\theta_1 = 3\pi/2$ $(m = 2)$. В последнем случае появляется и обычная степенная особенность $r^{-2/3}$.

В интервале $-3/4 \le \gamma < -1/4$ $(2\pi/3 < 2\theta_1 \le 2\pi,\ m = 1)$, кроме особенности r^{γ} и $r^{\gamma}\ln r$ $(\gamma = 0.5\pi/2\theta_1 - 1)$ возникает еще особенность $r^{1.5\pi/2\theta_1 - 1}$, что и следовало ожидать.

При $-1/4 \le \gamma < 0$ в интервале $\pi/2 < 2\theta_1 < 3\pi/2$ напряжения имеют особенности $r^{-\gamma}$ и $r^{-\gamma}\ln r$, а в интервале $3\pi/2 < 2\theta_1 < 2\pi$ появляется дополнительное слагаемое типа $r^{p_1^{(3)}-1}$.

Для $\gamma > 0$ имеет место обычная степенная особенность.

Таким образом, в настоящей работе установлено, что напряжения в антиплоской задаче теории упругости для изотропного клина могут иметь разные типы особенностей:

1. Независящая от величины угла раствора однородного клина особенность $r^{-\delta}$ $(0 < \delta < 1)$,
2. Логарифмическая особенность $\ln r$,
3. Обычная степенная особенность $r^{p_k^{(n)}-1}$,
4. Особенность смешанного типа $r^{-\delta}\ln r$.

Получены пределы изменения параметров α, β и γ, при которых напряжения имеют те или иные типы особенностей.

В граничной задаче (1)-(2) имеется возможность для устранения особенностей последних трех типов.

Заметим, что такие же особенности напряжений возникают и в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного клина с той лишь разницей, что в данном случае при тех же внешних воздействиях в знаменателях подынтегральных выражений (5)-(7) совпадают нули $p + \upsilon_n = 0$ $(n = 2,3,4)$ и соответствующих трансцендентных уравнений [6].

В заключение отметим следующее. Если в подынтегральном выражении (5) появляются полюсы третьего порядка, что может иметь место, например, при следующих граничных условиях:

$$u_z(r, \pm\theta_1) = \begin{cases} u^z (r/a)^{\alpha} \ln(r/a), & r \le a \\ 0, \quad r > a, & a > 0 \end{cases}$$

поведение напряжений в окрестности угловой точки представляется в виде

$$\tau = \left[\widetilde{A}_{\upsilon}(\theta) + \widetilde{B}_{\upsilon}(\theta)\ln r/a + \widetilde{C}_{\upsilon}(\theta)\ln^2 r/a\right](r/a)^{\alpha-1}.$$

Аналогичная ситуация имеет место и для граничных условий (6) и (7).

Исходя из того, что частная производная бигармонической функции $u(x, y, \lambda)$ по параметру λ также есть бигармоническая функция, в работе [7] обсуждены вопросы о возможности появления особенности напряжений $\ln r$ или $\ln^2 r$ в плоской задаче теории упругости для однородного клина.

Так как уравнение (1) и аналогичные граничные условия имеют место и для других физичестих полей (тепловых, диффузионных, фильтрационных, электрических, магнитных и т.д.), то метод решения поставленных задач и основные выводы применимы и к этим полям [6, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ting T.C.T. Elastic wedge subjected to antiplane shear tractions — a paradox explained. //Q.J. of Mech. appl. Math, 1985. Vol. 38. Pt. 2. P. 245-255.
2. Саркисян В.С., Белубекян В.М. Об одной антиплоской задаче для клина. //Ученые записки ЕГУ. 1986. №3. С. 36-40.
3. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. Ереванского ун-та. 1997. 241с.
4. Галпчян П.В. Определение особенностей вблизи вершины сектора из пьезокристалла. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. №5. С. 35-39.
5. Григорян Э.Х. О контактных задачах для полуплоскости и составной плоскости, усиленных кусочно-однородными тонкостенными элементами, и о методе плоских волн в динамических задачах теории упругости. //Диссертация на соискание уч. степ. док. Физ.-мат наук. Ереван. 1991. 384с.
6. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. //Докл. АН АрмССР. 1988. №4. С. 161-165.
7. Sinclair G.B. Logarithmic Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extention. //Trans. Of the ASME, J. appl. Mech, 1999. Vol. 66. June. P. 556-560.
8. Саргсян А.М. О влиянии граничных условий на малонапряженность антиплоской задачи кусочно-однородного клина. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. №1. С. 17-22.

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.07.2003