ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №2, 2004 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ БЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Григорян Э.Х., Саркисян К.С.

Գրիգորյան Է.Խ., Սարգսյան Կ.Ս.
Կոնտակտային խնդիր երկու անվերջ ստրինգերներով ուժեղացված առաձգական սալի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է անվերջ համասեռ սալի խնդիրը, որը ուժեղացված է երկու զուգահեռ անվերջ առաձգական ստրինգերներով: Սալը դեֆորմացվում է ստրինգերների վրա ազդող ուժերի ազդեցության տակ, որոնք ուղղված են ստրինգերներով: Ֆուրիեի ձևափոխության օգնությամբ որոշված են կոնտակտային տանգենցիալ լարումները և ստրինգերներում նորմալ լարումները: Այդ լարումների համար ստացված են ասիմպտոտական բանաձևեր, որոնք բնութագրում են լարումների վարքը ուժերի ազդման կետերի շրջակայքում և նրանցից հեռու կետերում:

Grigoryan E.Kh., Sargsyan K.S.
The contact problem for elastic plate strengthened by two infinite stringers

В работе рассматривается задача для бесконечной однородной пластины, усиленной двумя бесконечными параллельными упругими стрингерами. Пластина деформируется под действием сил, приложенных к стрингерам и направленных вдоль стрингеров. С помощью преобразования Фурье определены контактные тангенциальные напряжения и нормальные напряжения, действующие в стрингерах. Для этих напряжений получены асимптотические формулы, характеризующие поведение этих напряжений вблизи и вдалеке от точек приложений сил.

1. Пусть бесконечная однородная пластина малой постоянной толщины H усилена двумя параллельными бесконечными стрингерами и деформируется под действием сосредоточенных сил, приложенных к стрингерам и направленных вдоль стрингеров.

В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для упругой однородной пластины справедлива модель обобщенного плоского напряженного состояния. Задача заключается в определении контактных тангенцилаьных напряжений и нормальных напряжений в стрингерах.

Задача для упругой пластины, усиленной одним бесконченым стрингером, рассматривалась в работах [1,2].

В рассматриваемом случае уравнения равновесия пластины запишутся в виде:

$$
\begin{gathered}
\left(\lambda^{*}+2\mu\right)\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\left(\lambda^{*}+\mu\right)\frac{\partial^{2}\mathrm{v}}{\partial x\partial y}+\mu\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}+X(x;y)=0 \\
\mu\frac{\partial^{2}\mathrm{v}}{\partial x^{2}}+\left(\lambda^{*}+2\mu\right)\frac{\partial^{2}\mathrm{v}}{\partial y^{2}}+\left(\lambda^{*}+\mu\right)\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial y}=0 \qquad (1.1) \\
(-\infty<x<\infty;\ -\infty<y<\infty)
\end{gathered}
$$

где

$$X(x;y)=\frac{1}{H}\left[P(x;a)\delta(y-a)+P(x;-a)\,\delta(y+a)\right]$$

$$P(x;a)=b\tau(x;a);\;P(x;-a)=b\tau(x;-a),$$

$\tau(x;a)$; $\tau(x;-a)$ – контактные напряжения, b – ширина стрингеров, $\lambda^{*}=\dfrac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu}$, λ и μ – упругие постоянные Ламе.

Учитывая модель контакта по линии, уравнение равновесия стрингера при $y=a$, когда на него действует сосредоточенная сила $R\delta(x)$, запишется в виде:

$$F_s\frac{dq(x;a)}{dx}-P(x;a)+R\delta(x)=0 \tag{1.2}$$

при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(s)ds=R \tag{1.2'}$$

где $q(x;a)$ – интенсивность нормальных напряжений стрингера, $F_s=hb$ – площадь поперечного сечения стрингера, h – толщина стрингера.

Отдельно рассмотрим четную задачу, когда силы, действующие на стрингеры, имеют одинаковые направления и величины $(R=R_1;q(x;a)=q_1(x))$ и нечетную задачу, когда действующие силы имеют противоположные направления $(R=R_2;q(x;a)=q_2(x))$.

Рассмотрим четную задачу. В этом случае $P(x;a)=P(x;-a)=P_1(x)$, естественно $u(x;a)=u(x;-a)$, следовательно

$$X(x;y)=\frac{P_1(x)}{H}\left[\delta(y-a)+\delta(y+a)\right] \tag{1.3}$$

Применив к уравнениям (1.1) преобразование Фурье по переменной x и разрешив полученные уравнения относительно $\overline{u}_1(\sigma;y)$ и $\overline{v}_1(\sigma;y)$ при $y=a$, получим:

$$\overline{u}_1(\sigma;a)=\overline{P}_1(\sigma)\left\{\left[\frac{(\lambda^{*}+3\mu)}{4\mu(\lambda^{*}+2\mu)H|\sigma|}-\frac{(\lambda^{*}+\mu)}{2\mu(\lambda^{*}+2\mu)H}\cdot a\right]e^{-2|\sigma|a}+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda^{*}+3\mu}{4\mu(\lambda^{*}+2\mu)H|\sigma|}\right. \tag{1.4}$$

где

$$\overline{f}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx,\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma.$$

Уравнение равновесия стрингера (1.2) запишем в перемещениях, имея в виду, что $q_1(x) = E_s \dfrac{du_s}{dx}$.

$$\frac{d^2u_s}{dx^2} - \frac{P_1(x)}{F_sE_s} + \frac{R_1\delta(x)}{F_sE_s} = 0 \tag{1.5}$$

где E_s – модуль упругости стрингера.

Применив к уравнению (1.5) преобразование Фурье, получим:

$$-\sigma^2\overline{u}_s(\sigma) = \frac{\overline{P}_1(\sigma)}{F_sE_s} - \frac{R_1}{F_sE_s} \tag{1.6}$$

Далее имея в виду условие контакта

$$u_1(x;a) = u_s(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.7}$$

для $\overline{P}_1(\sigma)$ получим

$$\overline{P}_1(\sigma) = \frac{TR_1}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a}\,\mathrm{ch}|\sigma|a - ka\sigma^2e^{-2|\sigma|a}} \tag{1.8}$$

где

$$T = \frac{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}{\lambda^* + 3\mu}\cdot\frac{H}{F_sE_s}; \qquad k = \frac{2(\lambda^* + \mu)}{\lambda^* + 3\mu} \tag{1.9}$$

Применив к уравнению (1.2) преобразование Фурье, для определения $\overline{q}(\sigma)$ получим:

$$-i\sigma\overline{q}_1(\sigma) = \frac{\overline{P}_1(\sigma)}{F_s} - \frac{R_1}{F_s} \tag{1.10}$$

Отсюда

$$\overline{q}_1(\sigma) = \frac{i\overline{P}(\sigma)}{\sigma F_s} - \frac{iR_1}{F_s\sigma} + c\delta(\sigma)$$

Так как $q_1(x)$ – нечетная функция, то и $\overline{q}_1(\sigma)$ – нечетная функция, следовательно, $c = 0$.

Таким образом, для $\overline{q}_1(\sigma)$ получим:

$$\overline{q}_1(\sigma) = \frac{iR_1}{F_s}\cdot\frac{ka\sigma e^{-2|\sigma|a} - 2\,\mathrm{sgn}\,\sigma e^{-|\sigma|a}\,\mathrm{ch}|\sigma|a}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a}\,\mathrm{ch}|\sigma|a - ka\sigma^2e^{-2|\sigma|a}} \tag{1.11}$$

Окончательно для искомых величин $P_1(x)$ и $q_1(x)$ получим:

$$P_1(x) = \frac{TR_1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\sigma x\,d\sigma}{T + 2\sigma e^{-\sigma a}\,\mathrm{ch}\sigma a - ka\sigma^2e^{-2\sigma a}} \tag{1.12}$$

$$q_1(x)=\frac{R_1}{\pi F_s}\int_0^{\infty}\frac{\left(ka\sigma e^{-2\sigma a}-2e^{-\sigma a}\operatorname{ch}\sigma a\right)\sin\sigma x}{T+2\sigma e^{-\sigma a}\operatorname{ch}\sigma a-ka\sigma^2 e^{-2\sigma a}}d\sigma$$

Интересно заметить, что при $a\to 0$ для $P_1(x)$ получим:

$$P_1(x)=\frac{TR_1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\sigma x}{T/2+\sigma}d\sigma$$

из которого видно, что жесткость стрингеров удваивается. Это говорит о том, что при приближении стрингеров их жесткость как бы увеличивается.

Приступим к получению асимптотической формулы для $P_1(x)$, когда $|x|\to\infty$. Для этого заметим, что при $|\sigma|\to 0$

$$\overline{P_1}(\sigma)=R_1\left\{1-\frac{2|\sigma|}{T}+\frac{(2+k)aT+4}{T^2}\sigma^2-\frac{2(1+k)a^2T^2+4(2+k)aT+8}{T^3}|\sigma|^3+\right.$$

$$\left.+\frac{(4/3+2k)a^3T^2+\left(k^2+12k+12\right)a^2T+12(2+k)a}{T^3}\sigma^4\right\}+O\left(|\sigma|^5\right) \qquad (1.13)$$

Тогда по известному свойству интеграла Фурье получим при $|x|\to\infty$:

$$P_1(x)=\frac{R_1}{\pi}\left\{\frac{2T}{(Tx)^2}-\frac{6T}{(Tx)^4}\left[2(1+k)a^2T^2+4(2+k)aT+8\right]\right\}+O\left(x^{-6}\right) \qquad (1.14)$$

Здесь были использованы формулы [3]

$$F^{-1}\left[|\sigma|^{2n+1}\right]=(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{\pi}x^{-2n-2}$$

$$F^{-1}\left[\sigma^{2n}\right]=(-1)^n\delta^{(2n)}(x),\qquad n=0;1;2;\ldots \qquad (1.15)$$

где $F[\ ]$ – обобщенное преобразование Фурье, а $F^{-1}[\ ]$ – обратное преобразование.

Для получения асимптотической формулы $q_1(x)$ при $|x|\to\infty$, пользуясь формулой (1.2) и (1.2') выражение $q_1(x)$ запишем в виде:

$$q_1(x)=\frac{1}{F_s}\int_x^{\infty}P_1(s)ds-\frac{R_1}{F_s}\Theta(-x) \qquad (1.16)$$

Далее имея в виду нечетность функции $q_1(x)$ из формулы (1.16) с учетом (1.14) при $|x|\to\infty$ получим:

$$q_1(x)=\frac{R_1}{\pi F_s}\left\{\frac{2}{Tx}-\frac{2T}{(Tx)^3}\left[2(1+k)a^2T^2+4(2+k)aT+8\right]\right\}+O\left(x^{-5}\right) \quad (1.17)$$

Определим асимптотические формулы для $P_1(x)$ и $q_1(x)$ при $|x| \to 0$. Для этого представим $P_1(x)$ в виде:

$$P_1(x) = \frac{TR_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(ks^2 - s\right)e^{-2s} \cos\frac{sx}{a} ds}{\left(T^* + s + se^{-2s} - ks^2 e^{-2s}\right)\left(T^* + s\right)} + \frac{TR_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos\sigma x}{T+\sigma} d\sigma \qquad (1.18)$$

$$T^* = Ta$$

Заметим, что при $a \to \infty$ из (1.18) получится решение задачи для одного стрингера [1,2], который имеет вид:

$$\frac{TR_1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\sigma x}{T+\sigma}d\sigma = \frac{TR_1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(xT)\right]\sin(xT) - \mathrm{Ci}(xT)\cos(xT)\right\}$$

$$0 < x < \infty \qquad (1.19)$$

Получим представление интеграла (1.19) в виде ряда, для чего разложим подынтегральное выражение в ряд при $\sigma \to \infty$:

$$\frac{1}{T+\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{T^{n-1}}{\sigma^n}.$$

Тогда в силу свойств интеграла Фурье будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\sigma x}{T+\sigma}d\sigma = \sum_{m=0}^{\infty}T^{2m}F^{-1}\left[|\sigma|^{-2m-1}\right] - \sum_{m=0}^{\infty}T^{2m-1}F^{-1}\left[\sigma^{-2m-2}\right] \qquad |x| \to 0 \quad (1.20)$$

где [3]

$$F^{-1}\left[|\sigma|^{-2m-1}\right] = (-1)^m\frac{x^{2m}}{\pi(2m)!}\left[\psi(2m+1) - \psi(1) + C - \ln|x|\right]$$

$$F^{-1}\left[\sigma^{-2m-2}\right] = (-1)^{m+1}\frac{|x|^{2m+1}}{2(2m+1)!}, \qquad m = 0;1;2;\ldots \qquad (1.21)$$

где C – неизвестная постоянная, подлежащая определению, $\psi(z)$ – известная функция пси.

Для определения C интеграл (1.20) представим в виде

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\sigma x}{T+\sigma}d\sigma = ix\left[\int_0^{\infty}\ln\left(1+\frac{T}{\sigma}\right)\sin\sigma x\, d\sigma + \int_0^{\infty}\ln\frac{\sigma}{T}\sin\sigma x\, d\sigma\right] \qquad (1.22)$$

где

$$ix\int_0^{\infty}\ln\frac{\sigma}{T}\sin\sigma x\, d\sigma = \psi(1) - \ln(Tx)$$

Сопоставляя формулы (1.20) и (1.22) при $|x| \to 0$, получим $C = \psi(1)$. Таким образом, получим следующее:

$$\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(xT)\right]\sin(xT)-\mathrm{Ci}(xT)\cos(xT)\right\}=\frac{1}{\pi}[\psi(1)-\ln(Tx)]+\frac{T|x|}{2}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(-1)^m\frac{(Tx)^{2m}}{\pi(2m)!}[\psi(2m+1)-\ln(Tx)]+\frac{1}{2}\frac{|Tx|^{2m+1}}{(2m+1)!}\right\} \qquad (1.23)$$

где ряд сходится при любых x.

Окончательно для $P_1(x)$ при $|x|<a$ получим:

$$P_1(x)=\frac{TR_1}{\pi}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!}\left(\frac{x}{a}\right)^{2m-2}A_m+\psi(1)-\ln(Tx)+\frac{\pi T|x|}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(Tx)^{2m}}{(2m)!}[\psi(2m+1)-\ln(Tx)]+\frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(T|x|)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right\} \qquad (1.24)$$

где

$$A_m=\int_0^{\infty}\frac{(ks^2-s)s^{2(m-1)}e^{-2s}ds}{(T^*+s+se^{-2s}-ks^2e^{-2s})(T^*+s)} \qquad (1.25)$$

Можно утверждать, что первый ряд в (1.24) сходится по крайней мере при $|x|<a$.

Для получения асимптотической формулы для $q_1(x)$, когда $|x|\to 0$, воспользуемся следующим представлением (1.2), (1.2'):

$$q_1(x)=\frac{1}{F_s}\int_0^x P_1(s)ds-\frac{R_1}{2F_s}\operatorname{sgn}x \qquad (1.26)$$

Подставляя выражение $P_1(x)$ из (1.24) для $q_1(x)$ при $|x|\to 0$ получим:

$$q_1(x)=\frac{TR_1}{\pi F_s}\left\{a\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}A_m}{(2m-2)!}\left(\frac{x}{a}\right)^{2m-1}+x[\psi(2)-\ln(xT)]+\frac{\pi Tx|x|}{4}+\right. \qquad (1.27)$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(Tx)^{2m+1}}{2T(2m+1)!}[\psi(2m+2)-\ln(xT)]+\frac{\pi|x|}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(Tx)^{2m+1}}{(2m+2)!}\right\}-\frac{R_1}{2F_s}\operatorname{sgn}x$$

2. Рассмотрим нечетную задачу. В этом случае в уравнениях (1.1)

$$X(x;y)=\frac{P_2(x)}{H}[\delta(y-a)-\delta(y+a)] \qquad (2.1)$$

где

$$P_2(x)=P(x;a)=-P(x;-a).$$

В рассматриваемом случае для $\overline{u}(\sigma;a)$ получим (1.1):

$$\bar{u}(\sigma;a) = \bar{P}_2(\sigma)\left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{\mu(\lambda^* + 2\mu)H|\sigma|}e^{-a|\sigma|}\operatorname{sh}a|\sigma| + \frac{\lambda^* + \mu}{\mu(\lambda^* + 2\mu)H}ae^{-2a|\sigma|}\right] \quad (2.2)$$

Поступая аналогично, как и в четной задаче, для $\bar{P}_2(\sigma)$, $\bar{q}_2(\sigma)$ в исследуемой задаче $(R = R_2; q(x;a) = q_2(x))$ получим:

$$\bar{P}_2(\sigma) = \frac{TR_2}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a}\operatorname{sh}a|\sigma| + ka\sigma^2 e^{-2a|\sigma|}} \quad (2.3)$$

$$\bar{q}_2(\sigma) = -\frac{iR_2}{F_s}\cdot\frac{ka\sigma e^{-2a|\sigma|} + 2\operatorname{sgn}\sigma e^{-|\sigma|a}\operatorname{sh}a|\sigma|}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a}\operatorname{sh}a|\sigma| + ka\sigma^2 e^{-2a|\sigma|}} \quad (2.4)$$

Таким образом, для искомых величин $P_2(x)$ и $q_2(x)$ находим:

$$P_2(x) = \frac{TR_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\sigma x d\sigma}{T + 2|\sigma|e^{-|\sigma|a}\operatorname{sh}|\sigma|a + ka\sigma^2 e^{-2|\sigma|a}} \quad (2.5)$$

$$q_2(x) = -\frac{R_2}{\pi F_s}\int_0^\infty \frac{2e^{-\sigma a}\operatorname{sh}a\sigma + ka\sigma e^{-2a\sigma}}{T + 2\sigma e^{-\sigma a}\operatorname{sh}a\sigma + ka\sigma^2 e^{-2a\sigma}}\sin\sigma x d\sigma \quad (2.6)$$

При $a \to 0$ $P_2(x) = R_2\delta(x)$, т.е. жесткость стрингеров стремится к нулю. Значит, в случае нечетной задачи, при приближении стрингеров их жесткость как бы уменьшается.

Приступим к получению асимптотической формулы для $P_2(x)$ при $|x| \to \infty$. Для $\bar{P}_2(\sigma)$ имеем

$$\bar{P}_2(\sigma) = R_2\left\{1 - \frac{(2+k)a\sigma^2}{T} + \frac{2(1+k)a^2|\sigma|^3}{T} + \left[\frac{(2+k)^2a^2}{T^2} - \frac{2}{3}\frac{(2+3k)a^3}{T}\right]\sigma^4\right\} + O(|\sigma|^5), \quad |\sigma| \to 0 \quad (2.7)$$

Тогда для $P_2(x)$ получим:

$$P_2(x) = R_2\frac{12a^2(1+k)}{\pi T}\frac{1}{x^4} + O(x^{-6}), \quad |x| \to \infty \quad (2.8)$$

Используя формулу (1.16), для $q_2(x)$ получим:

$$q_2(x) = -R_2\frac{4a^2(1+k)}{\pi TF_s}\frac{1}{x^3} + O(|x|^{-5}), \quad |x| \to \infty \quad (2.9)$$

Аналогичным образом получим формулы для $P_2(x)$ и $q_2(x)$ при $|x| < a$.

$$P_2(x)=\frac{TR_2}{\pi}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-2)!}\left(\frac{x}{a}\right)^{2m-2}B_m+\psi(1)-\ln(Tx)+\frac{\pi T|x|}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(Tx)^{2m}}{(2m)!}\left[\psi(2m+1)-\ln(Tx)\right]+\frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(T|x|)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right\} \tag{2.10}$$

$$q_2(x)=\frac{TR_2}{\pi F_s}\left\{a\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}B_m}{(2m-2)!}\left(\frac{x}{a}\right)^{2m-1}+x\left[\psi(2)-l\,n(xT)\right]+\frac{\pi Tx|x|}{4}+\right. \tag{2.11}$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(Tx)^{2m+1}}{2T(2m+1)!}\left[\psi(2m+2)-\ln(xT)\right]+\frac{\pi|x|}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(Tx)^{2m+1}}{(2m+2)!}\right\}-\frac{R_2}{2F_s}\operatorname{sgn}x$$

где

$$B_m=\int_0^{\infty}\frac{\left(s-ks^2\right)s^{2(m-1)}e^{-2s}\,ds}{\left(T^*+s-se^{-2s}+ks^2e^{-2s}\right)\left(T^*+s\right)}.$$

Из полученных результатов можно получить решение задачи, когда при $y=a$ по направлению x действует сила $P\delta(x)$, а при $y=-a$ – сила $Q\delta(x)$. В этом случае контактные напряжения равны

$$P(x;a)=P_1(x)+P_2(x);\quad R_1+R_2=P$$
$$P(x;-a)=P_1(x)-P_2(x);\quad R_1-R_2=Q$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. // Ingenieur-Archiv. 1932. Bd.3. Haft 2. p.123-129.
2. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение. 1980. 416с.
3. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука. 1972. 544с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 17.02.2004