ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТОНКОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПО НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Мутафян М.Н., Саркисян С.О.

Մ. Ն. Մութաֆյան, Ս. Հ. Սարգսյան
Բարակ ուղղանկյան համար առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության եզրային խնդիրների ասիմպտոտիկ լուծումները

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը ուղղանկյուն բարակ տիրույթի համար, երբ ուղղանկյան երկայնական կողմերի վրա տրված են ուժային և մոմենտային լարումների թենզորների համապատասխան բաղադրիչները, իսկ ուղղահայաց եզրային կողմերի վրա տրված են առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության հարթ խնդրի եզրային պայմաններից որևէ մի տարբերակ: Կառուցված է ներքին ասիմպտոտիկ վերլուծությունը, որը տարբեր ասիմպտոտիկ մոտավորություններում բերվում է առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության կիրառական միաչափ տեսության (ձողերի տեսության): Կառուցված է նաև սահմանային շերտի տիպի ասիմպտոտիկ վերլուծությունը, ուսումնասիրված է այդ վերլուծության հատկությունները: Ցույց է տրված, որ գոյություն ունեն երկու տիպի սահմանային շերտեր (ուժային և մոմենտային): Կառուցված են սահմանային շերտի տիպի ֆունկցիաները և ցույց է տրված նրանց ընդհանրացված օրթոգոնալությունը: Ուսումնասիրված է ներքին և սահմանային շերտերի ասիմպտոտիկ վերլուծությունների համակցման խնդիրը, որի արդյունքում ուղղանկյան համապատասխան ուղղաձիգ եզրերի վրա տրված առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության հարթ խնդրի եզրային պայմանները վերաբաշխվում են ներքին և սահմանային շերտի տիպի խնդիրների միջև և, դրա արդյունքում, ներքին և սահմանային շերտերի տիպի խնդիրները առանձնանում են միմյանցից որպես ինքնուրույն եզրային խնդիրներ:

M.N. Moutafyan, S.H. Sargsyan
Asimptotic solutions of boundary problems of thin rectangle by the asymmetrical theory of elasticity

Рассматривается задача плоской несимметричной теории упругости для области тонкого прямоугольника, когда на продольных сторонах заданы соответствующие компоненты силового и моментного тензоров напряжений, а на перпендикулярных граничных кромках задан один из вариантов граничных условий плоской задачи несимметричной теории упругости.

Построено внутреннее разложение, которое при различных приближениях приводится к прикладной одномерной теории по несимметричной теории упругости (теория стержней). Построено также асимптотическое разложение типа погранслоя и исследуются свойства этого разложения. Показывается, что существуют два типа погранслоя (силовой и моментный). Построены функции типа погранслоев. Исследуется задача сопряжения внутренней задачи и пограничных слоев, при котором граничные условия плоской задачи несимметричной теории упругости на граничных кромках прямоугольника расщепляются между внутренней задачей и задачами погранслоев, в результате которого внутренняя задача и задачи погранслоев отделяются друг от друга как самостоятельные граничные задачи.

Наряду с различными известными подходами к построению классической модели сплошной среды в последние десятилетия интенсивное развитие получили новые, неклассические подходы к описанию механических процессов, особенно в твердых телах сложной микроструктуры [1-3].

Актуальна проблема построения таких математических моделей микрополярной (моментной, несимметричной) теории упругости для тонких стержней, пластин и оболочек [1], которые могли бы с достаточной математической строгостью адекватно отражать физическую сущность соответствующих двумерных или трехмерных граничных задач, и которые были бы приемлемы для их вычислительной реализации.

В математической физике и его приложениях асимптотические методы получают в последнее время все более широкие и разнообразные применения. Особенно естественным является использование таких подходов в теории тонких стержней, пластин и оболочек [4,5], так как последние представляют собой тонкое деформируемое тело и малый параметр (относительная толщина) в сущности входит в определение самих объектов исследования.

В работах [6,7] асимптотический метод применен для анализа напряженно-деформированного состояния упругого изотропного и ортотропного прямоугольника по классической теории упругости.

В работе [8] на основе асимптотического метода изучена задача определения напряженно-деформированного состояния микрополярной упругой тонкой пластинки.

В данной работе, используя отдельные результаты, полученные в работах [9-11], изучается задача построения общей асимптотической теории изгиба и растяжения-сжатия микрополярного упругого тонкого прямоугольника.

1. Рассмотрим упругий прямоугольник длиной a, высотой $2h$: $S=\{(x_1,x_2):\ x_1\in[0,a],\ |x_2|\le h;\ 2h<<a,\ \delta=h/a$ — малый геометрический параметр$\}$. Будем исходить из уравнений плоской задачи несимметричной теории упругости [2,3,12-14], которые составляют следующую группу уравнений.

Уравнения равновесия

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}=0, \qquad \dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=0\\ \dfrac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0\end{cases} \tag{1.1}$$

Физические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{1}{E}(\sigma_{11}-\upsilon\sigma_{22}),\ \gamma_{12}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21},\ \chi_{13}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{13}\ (1\leftrightarrow 2) \tag{1.2}$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\ (1\leftrightarrow 2),\ \gamma_{12}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3,\ \gamma_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3,\ \chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}\ (1\leftrightarrow 2) \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma_{ij}\ (ij:11,22,12,21)$ и $\mu_{mn}\ (mn:13,23)$ — компоненты тензоров силовых и моментных напряжений; $\gamma_{ij}\ (ij:11,22,12,21)$ — компоненты несимметрического тензора деформаций; $\chi_{mn}\ (mn:13,23)$ — компоненты тензора изгиба-кручения; (u_1,u_2) — компоненты вектора перемещения точек прямоугольника относительно осей x_1, x_2; ω_3 — независимый поворот точек прямоугольника относительно оси x_3; $E,\ \upsilon,\ \mu=\dfrac{E}{2(1+\upsilon)},\ \alpha,\ \gamma,\ \varepsilon$ — упругие константы материала пластинки.

На продольных сторонах прямоугольника $(x_2=\pm h)$ считаем заданными значения силовых и моментных напряжений по НТУ:

$$\sigma_{21} = \pm X^{\pm}(x_1), \quad \sigma_{22} = \pm Y^{\pm}(x_1), \qquad \mu_{23} = \pm M^{\pm}(x_1) \text{ на } x_2 = \pm h \tag{1.4}$$

а на торцах $x_1 = 0, a$ — одна из комбинаций следующих типов граничных условий НТУ:

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \ \sigma_{12} = \varphi_2(x_2), \ \mu_{13} = \varphi_3(x_2) \text{ (задача 1)} \tag{1.5$_1$}$$

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \ u_2 = \varphi_2(x_2), \ \mu_{13} = \varphi_3(x_2) \text{ (задача 2)} \tag{1.5$_2$}$$

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \ \sigma_{12} = \varphi_2(x_2), \ \omega_3 = \varphi_3(x_2) \text{ (задача 3)} \tag{1.5$_3$}$$

Функционал общего вариационного принципа плоской задачи НТУ для прямоугольной области имеет вид [12]:

$$I = \int_S \{W(\gamma_{ij}, \chi_{i3}) - \sigma_{ij}[\gamma_{ij} - (\nabla_i u_j - э_{3ij} \cdot \omega_3)] - \mu_{i3}[\chi_{i3} - \nabla_i \omega_3]\} dS -$$

$$- \int_{a^+} (p_i^+ u_i + m_3^+ \omega_3) da^+ - \int_{a^-} (p_i^- u_i + m_3^- \omega_3) da^- -$$

$$- \int_{\Sigma_1} (p_{*i} u_i + m_{*3} \omega_3) d\Sigma - \int_{\Sigma_2} (p_i (u_i - u_{*i}) + m_3(\omega_3 - \omega_{*3})) d\Sigma$$

Вариационное уравнение ($\delta I = 0$) содержит в качестве уравнений Эйлера и естественных граничных условий определяющие уравнения и граничные условия (1.1) – (1.5) плоской задачи НТУ для прямоугольной области.

Возможны и другие варианты граничных условий на торцах прямоугольника $x_1 = 0$ и $x_2 = a$, которым будет посвящена отдельная работа.

Во всех случаях считаем обеспеченным равновесие прямоугольника как жесткого тела.

Решение поставленной плоской краевой задачи НТУ (1.1)-(1.5) для прямоугольной области складывается из суммы решений симметричной по x_2 и обратно-симметричной задач (в симметричной задаче четные по x_2 величины будут $\sigma_{11}, u_1, \sigma_{22}, \mu_{23}$, а нечетные — $\sigma_{12}, \sigma_{21}, u_2, \mu_{13}, \omega_3$; в обратно-симметричной задаче — наоборот).

В двумерных уравнениях НТУ (1.1)-(1.3) перейдем к безразмерной системе координат

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \qquad \zeta = \frac{x_2}{h} \tag{1.6}$$

после которого, из системы (1.1)-(1.3) получим сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений с малым параметром δ.

Придерживаясь основополагающего принципа асимптотической теории интегрирования сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений, в основу рассуждений положим свойство напряженно-деформированного состояния (НДС), испытывающего статическое воздействие, выражаемое структурной формулой:

$$(\text{НДС})_{\text{полн}} = (\text{НДС})_{\text{вн}} + (\text{НДС})_{\text{кр}} \tag{1.7}$$

В этом равенстве нижними индексами отмечены полное, внутреннее (проникающее) и краевое НДС тонкого прямоугольника по НТУ. Последнее возникает вблизи боковых граней прямоугольника ($x = 0$, $x = a$) и быстро (экспоненциально) затухает при удалении от них в глубь двумерной области. Концепция расчленения НДС тонкого прямоугольника на внутреннее (ВНДС) и краевое (КНДС) и факт коренного различия между их свойствами (как физического, так и математического характера) будет приводить к их раздельному исследованию. С этой точки зрения, основным предметом изучения будет вопрос о приближенных методах внутреннего расчета (определение ВНДС по НТУ) и краевого расчета (определение КНДС по НТУ). Оба метода строятся на базе асимптотического интегрирования двумерных линейных уравнений (1.1)-(1.3) статической задачи НТУ.

2. Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения:

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^{S} \delta^{s} \cdot Q^{(s)} \tag{2.1}$$

где Q — любое из напряжений (силовых и моментных), безразмерных перемещений — $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ или поворот — ω_3; $Q^{(s)} \equiv 0$ при $s < 0$; S — число приближений; q — натуральное число, которое различно для различных величин [9]:

Для симметричной по ζ задачи: $q = 2$ для $\sigma_{11}, u_1, \mu_{23}$; $q = 1$ для $\sigma_{21}, \sigma_{12}, u_2, \mu_{13}, \omega_3$; $q = 0$ для σ_{22};

Для обратно-симметричной по ζ задачи: $q = 1$ для $\sigma_{21}, \sigma_{12}, u_2, \mu_{13}, \omega_3$; $q = 0$ для $\sigma_{11}, \sigma_{22}, u_1, \mu_{23}$.

Специфические свойства внутреннего итерационного процесса для тонкого прямоугольника состоит в следующем:

а) так как полученная в асимптотических приближениях система уравнений плоской задачи НТУ допускает интегрирование по переменной ζ, то в результате получается, что ВНДС изменяется по толщине пластинки по весьма простому закону;

б) в описании ВНДС остается выяснить роль переменного ξ, задающего положение точки на средней линии прямоугольника.

С этой точки зрения целесообразно введение вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентных усилий, моментов и гипермоментов.

Для задачи изгиба прямоугольника по НТУ (обратно-симметричная по x_2 задача) этими понятиями будут усилия N_{12}, N_{21}, моменты L_{13}, M_{11}, M_{22} и гипермомент Λ_{23}:

$$N_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dx_2 \ (1 \rightleftarrows 2), \quad L_{13} = \int_{-h}^{h} \mu_{13} dx_2$$
$$M_{11} = \int_{-h}^{h} x_2 \sigma_{11} dx_2 \ (1 \to 2), \quad \Lambda_{23} = \int_{-h}^{h} x_2 \mu_{23} dx_2 \tag{2.2}$$

Для задачи растяжения-сжатия прямоугольника по НТУ (симметричная по x_2 задача), осредненные по толщине прямоугольника силовые и моментные характеристики, будут: усилия T_{11}, T_{22}, моменты L_{23}, M_{12}, M_{21} и гипермомент Λ_{13}:

$$T_{11} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} dx_2 \, (1 \to 2), \quad L_{23} = \int_{-h}^{h} \mu_{23} dx_2$$

$$M_{12} = \int_{-h}^{h} x_2 \sigma_{12} dx_2 \, (1 \leftrightarrow 2), \; \Lambda_{13} = \int_{-h}^{h} x_2 \mu_{13} dx_2 \tag{2.3}$$

Основная разрешающая система уравнений для ВНДС по НТУ для задачи изгиба прямоугольника на уровне асимптотического приближения s получается относительно величин $\overset{0}{N}{}_{12}^{(s)}, \overset{0}{N}{}_{21}^{(s)}, \overset{0}{L}{}_{13}^{(s)}, \overset{0}{k}{}_{13}^{(s)}, \overset{0}{\Gamma}{}_{12}^{(s)}, \overset{0}{w}{}^{(s)}, \overset{0}{\Omega}{}^{(s)}$ и выражается так:

Уравнения равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{dN_{12}^{(s)}}{dx_1} = -\left(\overset{s}{Y}{}^{+} + \overset{s}{Y}{}^{-}\right) \\ \dfrac{dL_{13}^{(s)}}{dx_1} + N_{12}^{(s)} - N_{21}^{(s)} = -\left(\overset{s}{M}{}^{+} + \overset{s}{M}{}^{-}\right) \end{cases} \tag{2.4}$$

Соотношения упругости

$$\overset{2m}{N}{}_{12}^{(s)} = \frac{2h^{2m+1}}{2m+1}\left[(\mu+\alpha)\cdot \overset{2m}{\Gamma}{}_{12}^{(s)} + (\mu-\alpha)\cdot \overset{2m}{\Gamma}{}_{21}^{(s)}\right] (1 \rightleftarrows 2)$$

$$\overset{2m}{L}{}_{13}^{(s)} = \frac{2h^{2m+1}}{2m+1}\cdot\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot \overset{2m}{k}{}_{13}^{(s)} \tag{2.5}$$

Геометрические соотношения

$$\overset{2m}{\Gamma}{}_{12}^{(s)} = \frac{d\overset{2m}{w}{}^{(s)}}{dx_1} - \overset{2m}{\Omega}{}^{(s)}, \; \overset{2m}{k}{}_{13}^{(s)} = \frac{d\overset{2m}{\Omega}{}^{(s)}}{dx_1} \tag{2.6}$$

Здесь, начиная с приближения $s = 2$ и для $m = 1, 2, ..., [s/2]$, имеют место следующие соотношения:

$$\overset{2m}{w}{}^{(s)} = \frac{2m+1}{4mE\, h^{2m+1}}\left(\overset{2m-1}{M}{}_{22}^{(s-2)} - \upsilon\cdot \overset{2m-1}{M}{}_{11}^{(s-2)}\right), \quad \overset{2m}{\Omega}{}^{(s)} = \frac{2m+1}{4mh^{2m+1}}\cdot\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\cdot\varepsilon}\cdot \overset{2m-1}{\Lambda}{}_{23}^{(s-2)} .$$

Здесь следует иметь в виду также, что в уравнениях равновесия $P^{(s)} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \overset{2m}{P}{}^{(s)}$ и, кроме того,

$$\begin{cases} \overset{0}{Y}{}^{\pm} = Y^{\pm}, \; \overset{s}{Y}{}^{\pm} = 0 \text{ при } s \ge 1, \; \overset{0}{M}{}^{\pm} = M^{\pm}, \; \overset{s}{M}{}^{\pm} = 0 \text{ при } s \ge 1 \\ N_{21}^{(0)} = h\left(X^{+} - X^{-}\right), \; N_{21}^{(1)} = 0, \; N_{21}^{(s)} = \dfrac{dM_{11}^{(s-2)}}{dx_1} \text{ при } s \ge 2 \end{cases}$$

Остальные величины выражаются так:

$$\overset{2m+1}{M}{}_{11}^{(s)} = \frac{2Eh^{2m+3}}{2m+3}\cdot \overset{2m+1}{K}{}_{11}^{(s)} + \upsilon\cdot \overset{2m+1}{M}{}_{22}^{(s)}, \quad \overset{2m+1}{K}{}_{11}^{(s)} = \frac{d\overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)}}{dx_1}$$

$$\Gamma_{22}^{(0)} = \Gamma_{22}^{(1)} = 0,\quad \overset{2m-1(s)}{\Gamma}_{22} = 2m\cdot \overset{2m(s)}{w} \quad \text{при } s \ge 2,$$

$$k_{23}^{(0)} = k_{23}^{(1)} = 0,\quad \overset{2m-1(s)}{k}_{23} = 2m\cdot \overset{2m(s)}{\Omega} \quad \text{при } s \ge 2,$$

$$\overset{2m+1(s)}{\beta} = \frac{1}{2h^{2m+1}}\left(\frac{\mu+\alpha}{4\mu\cdot\alpha}\cdot \overset{2m(s)}{N}_{21} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\cdot\alpha}\cdot \overset{2m(s)}{N}_{12}\right) - \frac{1}{2m+1}\overset{2m(s)}{\Omega}$$

$$\overset{2m+1(s)}{M}_{22} = -\frac{2h^{2m+3}}{(2m+3)(2m+1)}\cdot\left[(\mu+\alpha)\cdot\frac{d\overset{2m(s)}{\Gamma}_{12}}{dx_1} + (\mu-\alpha)\cdot\frac{d\overset{2m(s)}{\Gamma}_{21}}{dx_1}\right] \quad \text{при } s \ge 2$$

$$\mathrm{M}_{22}^{(0)} = \frac{1}{3}\cdot h^2\left(Y^+ + Y^-\right),\quad \mathrm{M}_{22}^{(1)} = 0$$

$$\overset{2m+1(s)}{\Lambda}_{23} = -\frac{2h^{2m+3}}{(2m+3)(2m+1)}\cdot\left[\frac{4\gamma\cdot\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{d\overset{2m(s)}{k}_{13}}{dx_1} + 2\alpha\left(\overset{2m(s)}{\Gamma}_{12} - \overset{2m(s)}{\Gamma}_{21}\right)\right] \quad \text{при } s \ge 2$$

$$\Lambda_{23}^{(0)} = \frac{1}{3}\cdot h^2\left(\mathrm{M}^+ + \mathrm{M}^-\right),\quad \Lambda_{23}^{(1)} = 0$$

Основная разрешающая система ВНДС по НТУ для задачи растяжения-сжатия будет выражаться так (система уравнений относительно величин $\overset{0(s)}{T}_{11}, \overset{0(s)}{\Gamma}_{11}, \overset{0(s)}{u}$):

Уравнения равновесия

$$\frac{dT_{11}^{(s)}}{dx_1} = -\left(\overset{s}{X}^+ + \overset{s}{X}^-\right) \tag{2.7}$$

Соотношения упругости

$$\overset{2m(s)}{\Gamma}_{11} = \frac{2m+1}{2E\,h^{2m+1}}\left(\overset{2m(s)}{T}_{11} - \upsilon\cdot\overset{2m(s-2)}{T}_{22}\right) \tag{2.8}$$

Геометрические соотношения

$$\overset{2m(s)}{\Gamma}_{11} = \frac{d\overset{2m(s)}{u}}{dx_1} \tag{2.9}$$

Здесь, начиная с приближения $s = 2$ и для $m = 1, 2, ..., [s/2]$, имеет место следующее соотношение:

$$\overset{2m(s)}{u} = \frac{1}{2m}\cdot\frac{2m+1}{2h^{2m+1}}\left(\frac{\mu+\alpha}{4\mu\cdot\alpha}\cdot\overset{2m-1(s-2)}{M}_{21} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\cdot\alpha}\cdot\overset{2m-1(s-2)}{M}_{12}\right) - \frac{1}{2m}\overset{2m-1(s-2)}{O}.$$

В уравнении равновесия (2.7) нужно иметь в виду, что

$$\overset{0}{X}^{\pm} = X^{\pm},\ \overset{s}{X}^{\pm} = 0 \ \text{при } s \ge 1,\ \text{а также } P^{(s)} = \sum_{m=0}^{[s/2]}\overset{2m(s)}{P}.$$

Остальные величины выражаются так:

$$\overset{2m+1}{O}{}^{(s)} = \frac{1}{2h^{2m+1}} \cdot \frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\cdot\varepsilon} \cdot \overset{2m}{L}{}^{(s)}_{23}$$

$$\overset{2m}{L}{}^{(s)}_{23} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{d\,\overset{2m-1}{\Lambda}{}^{(s-2)}_{13}}{dx_1} + \overset{2m-1}{M}{}^{(s-2)}_{12} - \overset{2m-1}{M}{}^{(s-2)}_{21} \right) \quad \text{при } s \geq 2, m > 0,$$

$$L^{(0)}_{23} = h\left(M^+ - M^-\right),\ L^{(1)}_{23} = 0$$

$$\overset{2m+1}{M}{}^{(s)}_{21} = -\frac{h^2}{(2m+3)} \cdot \frac{d\,\overset{2m}{T}{}^{(s)}_{11}}{dx_1} \ \text{при } s \geq 2,\ M^{(0)}_{21} = \frac{1}{3}\cdot h^2\left(X^+ + X^-\right),\quad M^{(1)}_{21} = 0$$

$$\overset{2m+1}{M}{}^{(s)}_{12} = \frac{2h^{2m+3}}{2m+3} \cdot \frac{4\mu\cdot\alpha}{\mu+\alpha} \cdot \overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{12} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha} \cdot \overset{2m+1}{M}{}^{(s)}_{21}$$

$$\overset{2m+1}{\Lambda}{}^{(s)}_{13} = \frac{2h^{2m+3}}{2m+3} \cdot \frac{4\gamma\cdot\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \cdot \overset{2m+1}{\iota}{}^{(s)}_{13} ?.$$

$$T^{(s)}_{22} = \frac{dM^{(s)}_{12}}{dx_1} + h\cdot Y^{(s)}_1,\ \text{где } Y^{(0)}_1 = Y^+ - Y^-;\ Y^{(s)}_1 = 0 \ \text{при } s \geq 1$$

$$\overset{2m+2}{T}{}^{(s)}_{22} = -\frac{1}{2m+2} \cdot \frac{d\,\overset{2m+1}{M}{}^{(s)}_{12}}{dx_1},$$

$$\overset{2m}{\Gamma}{}^{(s)}_{22} = (2m+1)\,\overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)},\quad \overset{2m+1}{\iota}{}^{(s)}_{13} = \frac{d\,\overset{2m+1}{O}{}^{(s)}}{dx_1}$$

$$\overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{12} = \frac{d\,\overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)}}{dx_1} - \overset{2m+1}{O}{}^{(s)},\quad \overset{2m}{k}{}^{(s)}_{23} = (2m+1)\cdot \overset{2m+1}{O}{}^{(s)}$$

$$\overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{21} = (2m+2)\,\overset{2m+2}{u}{}^{(s)} + \overset{2m+1}{O}{}^{(s)} \quad \text{при } m < [s/2],\ \text{а при } m = [s/2],\ \overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{21} = \overset{2m+1}{O}{}^{(s)}$$

$$\overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)} = \frac{1}{2Eh^{2m+1}}\left(\overset{2m}{T}{}^{(s-2)}_{22} - \upsilon\cdot \overset{2m}{T}{}^{(s)}_{11} \right)$$

Следует отметить, что компоненты вектора перемещения и независимый поворот, компоненты тензоров силовых и моментных напряжений, деформаций и изгиба-кручения, как в задаче изгиба, так и в задаче растяжения-сжатия по НТУ, будут определяться по соответствующим формулам после решения основной разрешающей системы уравнений.

Отметим, что на основании определяющих уравнений (2.4)-(2.6) (для задачи изгиба) и (2.7)-(2.9) (для растяжения-сжатия) можно получить соответствующие прикладные (одномерные) теории по НТУ (теория стержней по НТУ).

3. Обратимся к изучению краевых упругих явлений по НТУ в тонком прямоугольнике. Краем прямоугольника, вблизи которого будем исследовать напряженное состояние типа погранслоя, пусть будет сторона прямоугольника $x_1 = 0$.

Введем в уравнения плоской задачи НТУ (1.1)-(1.3) преобразование растяжения $t=\xi/\delta, \zeta=x_2/h$. Вводим также безразмерные перемещения $(v_i=u_i/a,\ i=1,2)$.

Решение вновь полученных уравнений отыщем в виде асимптотического разложения

$$R=\sum_{s=0}^{S}\delta^{\chi_R+s}\cdot R^{(s)} \tag{3.1}$$

где $R^{(s)}$ – любое из величин рассматриваемой задачи. Так как силовые и моментные неоднородные граничные условия (1.4), заданные на лицевых линиях прямоугольника $\zeta=\pm1$, были удовлетворены решением внутренней задачи, то решение (3.1) должно удовлетворять однородным граничным условиям:

$$\sigma_{21}=\sigma_{22}=0,\ \ \mu_{23}=0\ \text{ при }\ \zeta=\pm1 \tag{3.2}$$

После подстановки (3.1) в преобразованную систему уравнений (1.1)-(1.3) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра δ в правых и левых частях, начиная с наинизшей, получим непротиворечивую систему рекуррентных уравнений относительно величин $R^{(s)}$, если

$$\begin{cases}\sigma_{ij}=\delta^{\chi}\sum\limits_{s=0}^{S}\delta^{s}\sigma_{ij}^{(s)},\ \ (ij:11,22,12,21,)\ \ \mu_{i3}=\delta^{\chi}\sum\limits_{s=0}^{S}\delta^{s}\mu_{i3}^{(s)}\ (i=1,2)\\ v_i=\delta^{\chi+1}\sum\limits_{s=0}^{S}\delta^{s}v_i^{(s)},(i=1,2),\qquad \omega_3=\delta^{\chi+1}\sum\limits_{s=0}^{S}\delta^{s}\omega_3^{(s)}\end{cases} \tag{3.3}$$

где целое число χ характеризует интенсивность погранслоя.

Эту систему уравнений можем представить в виде следующих двух групп уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{11}^{(s)}}{\partial t}+\dfrac{\partial\sigma_{21}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\quad \dfrac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial t}+\dfrac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}=0\\ \dfrac{\partial v_1^{(s)}}{\partial t}=\dfrac{1}{E}\left(\sigma_{11}^{(s)}-\upsilon\cdot\sigma_{22}^{(s)}\right),\quad \dfrac{\partial v_2^{(s)}}{\partial\zeta}=\dfrac{1}{E}\left(\sigma_{22}^{(s)}-\upsilon\cdot\sigma_{11}^{(s)}\right)\\ \dfrac{\partial v_2^{(s)}}{\partial t}=\dfrac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}^{(s)}-\dfrac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21}^{(s)}+\omega_3^{(s-1)},\quad \dfrac{\partial v_1^{(s)}}{\partial\zeta}=\dfrac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21}^{(s)}-\dfrac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}^{(s)}-\omega_3^{(s-1)}\end{cases} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial\mu_{13}^{(s)}}{\partial t}+\frac{\partial\mu_{23}^{(S)}}{\partial\zeta}=a\sigma_{21}^{(S-1)}-a\cdot\sigma_{12}^{(S-1)},\quad \frac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial t}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}a\cdot\mu_{13}^{(s)},\quad \frac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}a\cdot\mu_{23}^{(s)} \tag{3.5}$$

Отметим, что при любом s решение погранслойных уравнений (3.4), (3.5) обладает некоторыми важными свойствами:

$$\int_{-1}^{1}\sigma_{1j}^{(s)}(t=0)d\zeta=0\ \ (j=1,2),\quad \int_{-1}^{1}\mu_{13}^{(s)}(t=0)d\zeta=\int_{-1}^{1}d\zeta\int_{0}^{\infty}\left(a\sigma_{12}^{(s-1)}-a\sigma_{21}^{(s-1)}\right)dt$$

$$\int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{11}^{(s)}(t=0)d\zeta+\frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\int_{-1}^{1}v_2^{(s)}(t=0)d\zeta=-\frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\int_{-1}^{1}d\zeta\int_{0}^{\infty}\omega_3^{(s-1)}dt$$

$$\int_{-1}^{1} \omega_3^{(s)}(t=0)d\zeta = -\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\cdot a\int_0^\infty tdt\int_{-1}^{1}\left(a\sigma_{12}^{(s-1)} - a\sigma_{21}^{(s-1)}\right)d\zeta,$$

$$\int_{-1}^{1} \zeta\sigma_{12}^{(s)}(t=0)d\zeta + \frac{E}{\nu}\int_{-1}^{1} v_1^{(s)}(t=0)d\zeta = 0. \tag{3.6}$$

При $s=0$ система уравнений как (3.4), так и (3.5), однородна, а при $s\geq 1$ неоднородна.

Система уравнений погранслоя (3.4), (3.5) (при $s=0$) распадается на две группы независимых однородных уравнений. Отметим, что в первую группу уравнений (3.4) будут входить величины $\sigma_{11}^{(0)}, \sigma_{22}^{(0)}, \sigma_{12}^{(0)}, \sigma_{21}^{(0)}, v_1^{(0)} v_2^{(0)}$ и поэтому ее назовем силовым погранслоем, а во вторую группу будут входить величины $\mu_{13}^{(0)}, \mu_{23}^{(0)}, \omega_3^{(0)}$, которую назовем моментным погранслоем. Факт существования силового и моментного погранслоев — одно из существенных проявлений погранслоя для тонкого прямоугольника по НТУ.

Для построения функций типа погранслоев рассмотрим (при $s=0$) системы уравнений силового (3.4) и моментного (3.5) погранслоев.

Каждая указанная система при этом однородна, независима и затухающее решение можем получить методом разделения переменных:

$$\overset{c}{R}_p{}^{(0)} = \sum_{(\lambda_n)} e^{-\lambda_n t} \cdot \overset{c}{R}{}^{(0)}(\zeta) \quad (\text{с}\to\text{м}) \tag{3.7}$$

где $\overset{c}{R}_p{}^{(0)}$ (с→м) — любое из силовых (моментных) напряжений, линейных перемещений или независимий поворот.

Решение силового погранслоя (при $s=0$) можем привести к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно перемещения $\overset{c}{v}{}_{2p}^{(0)}$:

$$\frac{d^4 \overset{c}{v}{}_{2P}^{(0)}}{d\zeta^4} + 2\lambda^2 \cdot \frac{d^2 \overset{c}{v}{}_{2P}^{(0)}}{d\zeta^2} + \lambda^4 \cdot \overset{c}{v}{}_{2P}^{(0)} = 0 \tag{3.8}$$

к которому следует присоединить вытекающие из (3.2) граничные условия

$$\left(\overset{c}{v}{}_{2P}^{(0)'''} + A\cdot\lambda_n^2 \cdot \overset{c}{v}{}_{2P}^{(0)'}\right)_{\zeta=\pm1} = 0, \quad \left(\overset{c}{v}{}_{2P}^{(0)''} + B\cdot\lambda_n^2 \cdot \overset{c}{v}{}_{2P}^{(0)}\right)_{\zeta=\pm1} = 0 \tag{3.9}$$

где A и B — некоторые постоянные, зависящие от упругих констант материала прямоугольника.

Решение моментного погранслоя (при $s=0$) аналогичным образом приводится к граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно $\overset{г}{\omega}{}_3^{(0)}$:

$$\frac{d^2 \overset{м}{\omega}{}_{3P}^{(0)}}{d\zeta^2} + \lambda^2 \cdot \overset{м}{\omega}{}_{3P}^{(0)} = 0, \quad \left.\frac{d\,\overset{м}{\omega}{}_{3P}^{(0)}}{d\zeta}\right|_{\zeta=\pm1} = 0 \tag{3.10}$$

Общее решение краевых задач (3.8)-(3.9) или (3.10) можем представить соответственно в виде рядов ($A_n^{(0)}, B_n^{(0)}$ — произволы соответствующих погранслоев)

$$\overset{c}{v}_2^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(0)} \cdot F_n, \qquad \overset{M}{\omega}_3^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(0)} \cdot \varphi_n \tag{3.11}$$

где F_n и φ_n — собственные функции соответствующих краевых задач.

Здесь для симметричной по ζ задачи:

$$F_n(\lambda_n, \zeta) = -\left(\operatorname{ctg} \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{b_1}{b_2}\right) \cdot \sin \lambda_n \zeta + \zeta \cdot \cos \lambda_n \zeta$$

λ_n — корень уравнения ($\operatorname{Re} \lambda_n > 0$)

$$k \cdot \sin 2\lambda + 2\lambda = 0, \quad k = 1 - \frac{4\alpha}{\alpha(1-\upsilon) - \mu(1+\upsilon)}, \quad \varphi_n(\lambda_n, \zeta) = \sin \lambda_n \zeta$$

λ_n — корень уравнения

$$\cos \lambda_n = 0, \quad \text{т.е. } \lambda_n = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Для антисимметричной по ζ задачи

$$F_n(\lambda_n, \zeta) = -\left(\operatorname{tg} \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{b_2}{b_1}\right) \cdot \cos \lambda_n \zeta + \zeta \cdot \sin \lambda_n \zeta$$

λ_n — корень уравнения ($\operatorname{Re} \lambda_n > 0$)

$$k \cdot \sin 2\lambda - 2\lambda = 0, \quad \varphi_n(\lambda_n, \zeta) = \cos \lambda_n \zeta$$

λ_n — корень уравнения

$$\sin \lambda_n = 0, \quad \text{т.е. } \lambda_n = \pi n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Для силового погранслоя

$$\overset{p}{v}_2^{(s)} = \sum_{(\lambda_n)} \overset{p}{A}_n^{(s)} \overset{p}{\tilde{v}}_{2n} e^{-\lambda_n t}, \quad \overset{p}{v}_1^{(s)} = \sum_{(\lambda_n)} \overset{p}{A}_n^{(s)} \overset{p}{\tilde{v}}_{1n} e^{-\lambda_n t}, \quad \overset{p}{\sigma}_{11}^{(s)} = \sum_{(\lambda_n)} \overset{p}{A}_n^{(s)} \overset{p}{\tilde{\sigma}}_{11n} e^{-\lambda_n t}$$

$$\overset{p}{\sigma}_{22}^{(s)} = \sum_{(\lambda_n)} \overset{p}{A}_n^{(s)} \overset{p}{\tilde{\sigma}}_{22n} e^{-\lambda_n t}, \overset{p}{\sigma}_{12}^{(s)} = \sum_{(\lambda_n)} \overset{p}{A}_n^{(s)} \overset{p}{\tilde{\sigma}}_{12n} e^{-\lambda_n t}, \quad \overset{p}{\sigma}_{21}^{(s)} = \sum_{(\lambda_n)} \overset{p}{A}_n^{(s)} \overset{p}{\tilde{\sigma}}_{21n} e^{-\lambda_n t}$$

где

$$\overset{p}{\tilde{v}}_{2n} = F(\zeta, \lambda_n); \qquad \overset{p}{\tilde{v}}_{1n} = \frac{1}{\lambda_n} a_1 \cdot F_n' + \frac{1}{\lambda_n^3} a_2 \cdot F_n'''$$

$$\overset{p}{\tilde{\sigma}}_{12n} = \lambda_n b_1 \cdot F_n + \frac{1}{\lambda_n} b_2 \cdot F_n''; \quad \overset{p}{\tilde{\sigma}}_{21n} = \lambda_n c_1 \cdot F_n + \frac{1}{\lambda_n} c_2 \cdot F_n''$$

$$\overset{p}{\tilde{\sigma}}_{11n} = d_1 \cdot F_n' + \frac{1}{\lambda_n^2} d_2 \cdot F_n'''; \qquad \overset{p}{\tilde{\sigma}}_{22n} = e_1 \cdot F_n' + \frac{1}{\lambda_n^2} e_2 \cdot F_n'''$$

Отметим, что a_i, b_i, c_i, d_i, e_i $(i = 1, 2)$ из себя представляют постоянные, которые выражаются соответствующими формулами через упругие константы материала пластинки.

Для моментного погранслоя:

$$\overset{p}{\omega}{}_3^{(s)} = \sum_{(\lambda_n)} \overset{p}{B}{}_n^{(s)} \overset{p}{\tilde{\omega}}_{3n} e^{-\lambda_n \xi}, \quad \overset{p}{\mu}{}_{13}^{(s)} = \sum_{(\lambda_n)} \overset{p}{B}{}_n^{(s)} \overset{p}{\tilde{\mu}}_{13n} e^{-\lambda_n \xi}, \quad \overset{p}{\mu}{}_{23}^{(s)} = \sum_{(\lambda_n)} \overset{p}{B}{}_n^{(s)} \overset{p}{\tilde{\mu}}_{23n} e^{-\lambda_n \xi}$$

где

$$\overset{p}{\tilde{\omega}}_{3n} = \varphi_n(\zeta, \lambda_n), \quad \overset{p}{\tilde{\mu}}_{13n} = -\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \cdot \frac{1}{a} \cdot \varphi_n, \quad \overset{p}{\tilde{\mu}}_{23n} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \cdot \frac{1}{a} \cdot \varphi_n'$$

Можем показать, что решение типа погранслоя (для силового погранслоя) удовлетворяет следующему условию типа обобщенной ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} \left(\sigma_{11m}^{(0)} \cdot v_{1n}^{(0)} - \sigma_{12n}^{(0)} \cdot v_{2m}^{(0)} \right) d\zeta = 0 \quad (m \neq n) \tag{3.12}$$

Соотношение обобщенной ортогональности (3.12) при некоторых граничных условиях (1.5) могут играть важную роль при определении произволов силового погранслоя (в первой формуле (3.11)) при сращивании асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоев.

При $s \geq 1$ системы уравнений двух погранслоев (силового и моментного) становятся неоднородными (с известными из предыдущих приближений правыми частями). В зависимости от природы правых частей, каждый погранслой проявляется в двух качествах: в основном и сопутствующем.

Структура общего решения для задачи каждого из двух типов погранслоев (при $s \geq 1$) можем представить в виде следующего равенства:

$$\overset{c}{R}{}_p^{(s)} = \sum_{(\lambda_n)} A_n^{(s)} \cdot \overset{c}{R}{}_{pn}^{(s)}(\zeta) \cdot e^{-\lambda_n \xi} + \overset{c}{R}{}_{n*}^{(s)} \quad (\text{с} \to \text{м}, A_n \to B_n) \tag{3.13}$$

где $A_n^{(s)}\left(B_n^{(s)}\right)$ — произволы погранслоя, λ_n — собственные числа соответствующего погранслоя при $s = 0$; $\overset{c}{R}{}_*^{(s)}$ — частное решение соответствующей неоднородной системы, удовлетворяющее условиям (3.2).

Таким образом, мы построили два типа решений — решение внутренней задачи и решения для пограничных слоев. Их сумма

$$I = Q + R_p^{(1)} + R_p^{(2)} \tag{3.14}$$

является асимптотическим решением исходной сингулярно-возмущенной краевой задачи плоской НТУ для прямоугольной области. Здесь Q — решение внутренней задачи, $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}$ — решения погранслоев, построенные соответственно вблизи $x_1 = 0$ и $x_1 = a$.

Таким образом, проблему раздельного построения дифференциальных уравнений внутренней задачи и погранслоя для тонкого прямоугольника по НТУ считаем решенной и на основе структурной формулы (1.7) выражение (3.14) будет представлять общее решение поставленной краевой задачи НТУ (1.1)-(1.5).

Перейдем теперь к изучению проблемы разделения двумерных граничных условий НТУ на граничных кромках прямоугольника $x_1 = 0$ и $x_1 = a$, в рамках которого необходимо выяснить вопрос о том, какие граничные условия на каждом уровне асимптотического приближения надо приписывать к внутренним и какие к погранслойным дифференциальным уравнениям.

Чтобы осуществить задачу сращивания решения внутренней задачи с решениями обоих типов погранслоев, нам следует конкретизировать заданные на кромках прямоугольника $x_1=0$ и $x_1=a$ двумерные граничные условия НТУ. Рассмотрим некоторые варианты граничных условий НТУ (1.5_1) -(1.5_3).

4. Рассмотрим первую граничную задачу НТУ. Подставляя (3.14) в $(1.5)_1$ и учитывая (2.1), (3.1), а также то, что при $x_1=0$ проявляет себя только $R_p^{(1)}$, (т. е. продольный размер a прямоугольника таков, что влиянием погранслоя $R_p^{(2)}$ на этом торце можем пренебречь) в результате получим непротиворечивый итерационный процесс, если для задачи расстяжения-сжатия $\chi=-2$ и $\chi=-1$ – для задачи изгиба. Далее рассмотрим задачу изгиба. Таким образом, для задачи изгиба получим следующие граничные условия в итерациях (на $t=0$):

$$\begin{cases} \overset{вн}{\sigma}{}_{11}^{(s-1)} + \overset{p}{\sigma}{}_{11}^{(s)} = \tilde{\varphi}_1^{(s-1)} \\ \overset{вн}{\sigma}{}_{12}^{(s)} + \overset{p}{\sigma}{}_{12}^{(s)} = \tilde{\varphi}_2^{(s)} \\ \overset{вн}{\mu}{}_{13}^{(s)} + \overset{p}{\mu}{}_{13}^{(s)} = \tilde{\varphi}_3^{(s)} \end{cases} \tag{4.1}$$

где

$$\begin{cases} \varphi_1 = \delta^0\tilde{\varphi}_1 \;, \varphi_2 = \delta^{-1}\tilde{\varphi}_2, \varphi_3 = \delta^{-1}\tilde{\varphi}_3 \\ \tilde{\varphi}_k^{(0)} = \tilde{\varphi}_k, \;\; \tilde{\varphi}_k^{(s)} = 0 \text{ при } s \geq 1 \;\; (k=1,2,3) \end{cases}$$

При изучении проблемы сращивания асимптотических разложений внутренней задачи и задач погранслоев (при s=0) неоценимую роль играют так называемые условия разделимости двумерных краевых условий между ВНДС и КНДС для прямоугольной области. Такие условия можем получить на основании свойств (3.6) погранслойного решения.

Если применить (3.6) (при $s=0$) к граничным условиям (4.1), то легко убедиться, что краевые условия (1.5_1) расщепляются между ВНДС и КНДС. Это означает, что внутренняя задача изгиба прямоугольника по НТУ со своими уравнениями и граничными условиями отделяется как самостоятельная граничная задача, которая будет выражаться следующим образом:

Уравнение равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{d\overset{0}{N}{}_{12}^{(0)}}{dx_1} = -\left(Y^+ + Y^-\right), \;\; \dfrac{d\overset{0}{L}{}_{13}^{(0)}}{dx_1} + \overset{0}{N}{}_{12}^{(0)} - \overset{0}{N}{}_{21}^{(0)} = -\left(M^+ + M^-\right) \end{cases} \tag{4.2}$$

Физические соотношения

$$\begin{cases} \overset{0}{N}{}_{12}^{(0)} = 2h\left[(\mu+\alpha)\overset{0}{\Gamma}{}_{12}^{(0)} + (\mu-\alpha)\overset{0}{\Gamma}{}_{21}^{(0)}\right](1\to 2), \; \overset{0}{L}{}_{13}^{(0)} = 2h\cdot\dfrac{4\gamma\cdot\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\overset{0}{k}{}_{13}^{(0)}, \overset{0}{N}{}_{21}^{(0)} = h\left(X^+ - X^-\right) \end{cases} \tag{4.3}$$

Геометрические соотношения

$$\begin{cases} \overset{0}{\Gamma}{}^{(0)}_{12} = \dfrac{d\overset{0}{w}{}^{(0)}(x_1)}{dx_1} + \overset{0}{\Omega}{}^{(0)}(x_1) \quad , \overset{0}{k}{}^{(0)}_{13} = \dfrac{d\overset{0}{\Omega}{}^{(0)}(x_1)}{dx_1} \end{cases} \tag{4.4}$$

Граничные условия

$$\overset{0}{N}{}^{(0)}_{12}\Big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_2 \cdot dx_2, \quad \overset{0}{L}{}^{(0)}_{13}\Big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_3 \cdot dx_2 \tag{4.5}$$

После решения основной краевой задачи ВНДС все расчетные величины поставленной плоской задачи (1.1)-(1.5) НТУ для прямоугольника определяются по соответствующим формулам.

Краевая задача (4.2)-(4.5) представляет собой прикладную (одномерную) теорию изгиба (для стержней) по НТУ.

Для КНДС прямоугольника по НТУ получим следующие граничные задачи:

для силового погранслоя:

$$\begin{cases} L_1\left[\overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{11}, \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{22}, \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{12}, \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{21}, \overset{p}{v}{}^{(0)}_{1}, \overset{p}{v}{}^{(0)}_{2}\right] = 0 \\ \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{11}\Big|_{t=0} = 0, \quad \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{12}\Big|_{t=0} = f_2(\zeta), \quad \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{21}\Big|_{\zeta=\pm1} = \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{22}\Big|_{\zeta=\pm1} = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

для моментного погранслоя:

$$\begin{cases} L_2\left[\overset{p}{\mu}{}^{(0)}_{13}, \overset{p}{\mu}{}^{(0)}_{23}, \overset{p}{\omega}{}^{(0)}_{3}\right] = 0, \\ \overset{p}{\mu}{}^{(0)}_{13}\Big|_{t=0} = \Psi(\zeta), \quad \overset{p}{\mu}{}^{(0)}_{23}\Big|_{\zeta=\pm1} = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

где

$$f_2(\zeta) = \tilde{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\varphi}_2 \cdot d\zeta, \quad \Psi(\zeta) = \tilde{\varphi}_3 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\varphi}_3 \cdot d\zeta \tag{4.8}$$

Здесь $L_1\ L_2$ представляют собой дифференциальные операторы соответственно для силового (3.4) и моментного (3.5) погранслоев.

Важно здесь отметить следующее. Так как из (4.6) имеем

$$\overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{11}\Big|_{t=0} = 0$$

то это одновременно означает, что

$$\int_{-1}^{1} \zeta \cdot \overset{p}{\sigma}{}^{(0)}_{11}(t=0)\, d\zeta = 0$$

и следовательно, из (3.6) (при $s = 0$) будет вытекать следующее равенство:

$$\int_{-1}^{1} \overset{p}{v}{}^{(0)}_{2}(t=0)\, d\zeta = 0 \tag{4.9}$$

Погранслой вблизи противоположного торца $x_1 = a$ можем строить аналогичным образом. Данные для этого погранслоя получим из приведенного выше ($x_1 = 0$) формальной заменой t на $t_1 = \dfrac{a - x_1}{h}$.

При изучении КНДС пластинки при задаче изгиба прямоугольника по НТУ в исходном ($s = 0$) асимптотическом приближении имеем общее решение каждого из двух типов погранслоев (соответствующие формулы (3.11)) и, фактически, решение каждого из указанных погранслоев сводится к определению произволов погранслоев.

Отметим, что для определения произволов погранслоев $A_n^{(0)}$ и $B_n^{(0)}$ $(n = 1,2,...)$ можем использовать вариационный подход. Для этого следует обратиться к вариационной постановке рассматриваемой плоской задачи НТУ для прямоугольной области. Функционал плоской задачи НТУ имеет вид (1.6). На этой основе составим вариационное уравнение рассматриваемой задачи, подставим туда все величины соответственно внутренней задачи и погранслоев при $s = 0$. Вариационное уравнение плоской задачи НТУ для прямоугольника будет почти полностью удовлетворяться тождественно и, в окончательном итоге, превращаться в вариационное соотношение на граничных кромках прямоугольника $x_1 = 0$ и $x_1 = a$:

$$\int_{-1}^{1}\left[\left(\overset{\text{вн}}{\sigma}_{11} + \overset{p}{\sigma}_{11} - \varphi_1'\right)\delta \overset{p}{v}_1 + \left(\overset{\text{вн}}{\sigma}_{12} + \overset{p}{\sigma}_{12} - \varphi_2'\right)\delta \overset{p}{v}_2 + \left(\overset{\text{вн}}{\mu}_{13} + \overset{p}{\mu}_{13} - \varphi_3'\right)\delta \overset{p}{\omega}_3\right]_{x_1=0} dl + \tag{4.10}$$

$$+\int_{-1}^{1}\left[\left(\overset{\text{вн}}{\sigma}_{11} + \overset{p}{\sigma}_{11} - \varphi_1''\right)\delta \overset{p}{v}_1 + \left(\overset{\text{вн}}{\sigma}_{12} + \overset{p}{\sigma}_{12} - \varphi_2''\right)\delta \overset{p}{v}_2 + \left(\overset{\text{вн}}{\mu}_{13} + \overset{p}{\mu}_{13} - \varphi_3''\right)\delta \overset{p}{\omega}_3\right]_{x_1=a} dl = 0$$

где штрихами отмечены граничные данные на $x_1 = 0$, а двумя штрихами – данные на $x_1 = a$.

Если теперь, в вариационном соотношении (4.10) подставить общие решения для погранслоев (3.11), в итоге, для определения произволов погранслоев приходим к следующему результату.

Для произволов силового погранслоя получим алгебраическую систему уравнений вида:

$$\overset{p}{a}_{mn} \overset{p}{A}{}_n^{(0)} = \overset{p}{c}{}_m^{(0)}, \text{ где } \overset{p}{a}_{mn} = \int_{-1}^{1}\left[\overset{p}{\tilde{\sigma}}_{11n} \overset{p}{\tilde{v}}_{1m} + \overset{p}{\tilde{\sigma}}_{12n} \overset{p}{\tilde{v}}_{2m}\right] d\zeta$$

$$\overset{p}{c}{}_m^{(0)} = \int_{-1}^{1} f_2(\zeta) \overset{p}{\tilde{v}}_{2m} d\zeta, \quad (m, n = 1,2,...) \tag{4.11}$$

(здесь будем считать, что по индексу "n" происходит суммирование).

Для произволов моментного погранслоя получим:

$$\overset{p}{B}{}_n^{(0)} = -\frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \cdot a \cdot \frac{1}{\lambda_n} \cdot \overset{p}{b}{}_n^{(0)}, \quad \text{где } \overset{p}{b}{}_n^{(0)} = \int_{-1}^{1} \Psi(\zeta) \overset{p}{\tilde{\omega}}_{3n} d\zeta, \; (n = 1,2,...) \tag{4.12}$$

5. Пусть теперь на граничных кромках $x_1 = 0$, $x_1 = a$ прямоугольника заданы граничные условия (1.5_2) плоской задачи НТУ.

Чтобы удовлетворить граничным условиям (1.5_2), подставим туда (3.14) и приравним к нулю коэффициенты при соответствующих степенях δ, тогда получим непротиворечивый итерационный процесс, если $\chi = -2$ как для задачи растяжения-сжатия, так и для задачи изгиба. Далее рассмотрим задачу изгиба.

Граничные условия (1.5_2) в итерациях имеют вид (задача изгиба):

$$\begin{cases} \overset{вн(s-2)}{\sigma_{11}} + \overset{p\,(s)}{\sigma_{11}} = \widetilde{\varphi}_1^{(s-2)} \\ \overset{вн(s)}{u_2} + \overset{p\,(s)}{u_2} = \widetilde{\varphi}_2^{(s)} \\ \overset{вн(s-1)}{\mu_{13}} + \overset{p\,(s)}{\mu_{13}} = \widetilde{\varphi}_3^{(s-1)} \end{cases} \tag{5.1}$$

где

$$\begin{cases} \varphi_1 = \delta^0 \widetilde{\varphi}_1 \quad, \varphi_2 = \delta^{-1}\widetilde{\varphi}_2, \varphi_3 = \delta^{-1}\widetilde{\varphi}_3 \\ \widetilde{\varphi}_k^{(0)} = \widetilde{\varphi}_k, \ \ \widetilde{\varphi}_k^{(s)} = 0 \ \text{ при } \ s \geq 1 \ \ (k = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Рассмотрим приближение $s = 0$, тогда будем иметь:

$$\overset{p\,(0)}{\sigma_{11}} = 0, \qquad \overset{0\,(0)}{v_2} + \overset{p\,(0)}{v_2} = \widetilde{\varphi}_2 \quad , \qquad \overset{p\,(0)}{\mu_{13}} = 0 \ \text{ при } \ t = 0 \tag{5.2}$$

Используя первое равенство из (5.2), можем написать тождество

$$\int_{-1}^{1} \zeta \cdot \overset{p\,(0)}{\sigma_{11}} (t = 0) d\zeta = 0 \tag{5.3}$$

следовательно, на основании свойств погранслоев (3.6) получим важное равенство:

$$\int_{-1}^{1} \overset{p\,(0)}{v_2} (t = 0) d\zeta = 0 \tag{5.4}$$

Из (5.4) и второго условия (5.2) приходим к одному из граничных условий внутренней задачи при $t = 0$:

$$\left. \overset{0\,(0)}{v_2} \right|_{x_1 = 0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \widetilde{\varphi}_2 d\zeta \tag{5.5}$$

Для получения второго граничного условия внутренней задачи, из третьего условия (5.1) сначала будем иметь

$$2\overset{0\,(0)}{\upsilon_{13}} + \overset{p\,(1)}{\mu_{13}} = \widetilde{\varphi}_3^{(0)} \quad \text{ при } \ t = 0 \tag{5.6}$$

На основании равенств (3.6) (при $s = 1$), используя соответствующие значения при $s = 0$, можем показать, что

$$\int_{-1}^{1} \overset{p\,(1)}{\mu_{13}} (t = 0) d\zeta = 0 \tag{5.7}$$

Тогда, с учетом (5.7) из условия (5.6) получим

$$\left. \overset{0\,(0)}{\upsilon_{13}} \right|_{x_1 = 0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \widetilde{\varphi}_3 d\zeta \tag{5.8}$$

Объединяя (5.5) и (5.8), для внутренней задачи получим граничные условия вида:

$$\left.\overset{0}{w}{}^{(0)}\right|_{x_1=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi_2\cdot dx_2, \quad \left.\overset{0}{L}{}_{13}^{(0)}\right|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h}\varphi_3\cdot dx_2 \tag{5.9}$$

Таким образом, граничная задача (4.2)-(4.4) и (5.9) определяет внутреннюю задачу (задачу изгиба) для приближения $s = 0$.

Погранслойные граничные задачи определяются так.

Для силового погранслоя имеем систему уравнений (4.6), к которой необходимо присоединить однородные граничные условия на $\zeta = \pm 1$ (как в (4.6)), а граничные условия на $t=0$ необходимо заменить условиями:

$$\left.\overset{p}{\sigma}{}_{11}^{(0)}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\overset{p}{v}{}_2^{(0)}\right|_{t=0} = \tilde{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{\varphi}_2\cdot d\zeta \tag{5.10}$$

Для моментного погранслоя получим следующее однородное граничное условие:

$$\left.\overset{p}{\mu}{}_{13}^{(0)}\right|_{t=0} = 0$$

Так как (при $s = 0$) уравнения указанного погранслоя однородны, следовательно, в этом случае моментный погранслой превращается в нуль. Для определения произволов погранслоев необходимо использовать вариационное соотношение

$$\int_{-1}^{1}\left[\left(\overset{\text{вн}}{\sigma}_{11}+\overset{p}{\sigma}_{11}-\varphi_1'\right)\delta\overset{p}{u}_1+\left(\varphi_2'-\left(\overset{\text{вн}}{u}_2+\overset{p}{u}_2\right)\right)\delta\overset{p}{\sigma}_{12}+\left(\overset{\text{вн}}{\mu}_{13}+\overset{p}{\mu}_{13}-\varphi_3'\right)\delta\overset{p}{\omega}_3\right]_{x_1=0}dl+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left[\left(\overset{\text{вн}}{\sigma}_{11}+\overset{p}{\sigma}_{11}-\varphi_1''\right)\delta\overset{p}{u}_1+\left(\varphi_2''-\left(\overset{\text{вн}}{u}_2+\overset{p}{u}_2\right)\right)\delta\overset{p}{\sigma}_{12}+\left(\overset{\text{вн}}{\mu}_{13}+\overset{p}{\mu}_{13}-\varphi_3''\right)\delta\overset{p}{\omega}_3\right]_{x_1=a}dl=0$$

которое получается на основе вариационного уравнения плоской задачи НТУ для прямоугольника с использованием (3.14) и результатов (при $s = 0$) внутренней и погранслойных задач. Аналогичным образом, как в предыдущей задаче, для определения $\overset{p}{A}{}_n^{(0)}$ приходим к соответствующей линейной системе алгебраических уравнений, где при использовании формулы обобщенной ортогональности (3.12) получим выражения, индувидуально определяющие постоянные $\overset{p}{A}{}_n^{(0)}$ $(n = 1,2,...)$.

6.Рассмотрим граничные условия (1.5_3). Приводим рассуждения для задачи изгиба ($\chi = -2$).

Граничные условия в итерациях для задачи изгиба имеют вид:

$$\begin{cases} \overset{\text{вн}}{\sigma}{}_{11}^{(s-2)} + \overset{p}{\sigma}{}_{11}^{(s)} = \tilde{\varphi}_1^{(s-2)} \\ \overset{\text{вн}}{\sigma}{}_{12}^{(s-1)} + \overset{p}{\sigma}{}_{12}^{(s)} = \tilde{\varphi}_2^{(s-1)} \\ \overset{\text{вн}}{\omega}{}_3^{(s)} + \overset{p}{\omega}{}_3^{(s)} = \tilde{\varphi}_3^{(s)} \end{cases} \tag{6.1}$$

где

$$\begin{cases}\varphi_1 = \delta^0\tilde{\varphi}_1 \quad , \varphi_2 = \delta^{-1}\tilde{\varphi}_2, \varphi_3 = \delta^{-1}\tilde{\varphi}_3 \\ \tilde{\varphi}_k^{(0)} = \tilde{\varphi}_k, \quad \tilde{\varphi}_k^{(s)} = 0 \text{ при } s \geq 1 \quad (k = 1, 2, 3)\end{cases}$$

При $s = 0$ из (6.1) получим:

$$\left.\overset{p}{\sigma}{}_{11}^{(0)}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\overset{p}{\sigma}{}_{12}^{(0)}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\overset{0}{\Omega}{}_3^{(0)}\right|_{t=0} + \left.\overset{p}{\omega}{}_3^{(0)}\right|_{t=0} = \tilde{\varphi}_3 \tag{6.2}$$

Так как на основании свойств погранслоев (3.6), при $s = 0$ имеет место равенство

$$\int_{-1}^{1} \overset{p}{\omega}{}_3^{(0)} (t = 0) d\zeta = 0 \tag{6.3}$$

следовательно, из последнего условия (6.2) получим одно из двух граничных условий внутренней задачи

$$\left.\overset{0}{\Omega}{}_3^{(0)}\right|_{x_1=0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\varphi}_3 d\zeta \tag{6.4}$$

Теперь, подставив $s = 1$ во второе условие (6.1), получим условие следующего вида:

$$\overset{0}{\tau}{}_{12}^{(0)} + \overset{p}{\sigma}{}_{12}^{(1)} = \tilde{\varphi}_2^{(0)} \quad \text{при } t = 0. \tag{6.5}$$

На основании (3.6) легко получить

$$\int_{-1}^{1} \overset{p}{\sigma}{}_{12}^{(1)} (t = 0) d\zeta = 0 \tag{6.6}$$

Используя (6.6), из (6.5) получим второе граничное условие внутренней задачи:

$$\left.\overset{0}{\tau}{}_{12}^{(0)}\right|_{x_1=0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\varphi}_2 d\zeta \tag{6.7}$$

Таким образом, для задачи изгиба определяющая система внутренней задачи (при $s = 0$) будет выражаться уравнениями (4.2)-(4.4), к которым следует присоединить следующие граничные условия:

$$\left.\overset{0}{N}{}_{12}^{(0)}\right|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_2 \cdot dx_2, \quad \left.\overset{0}{\Omega}{}^{(0)}\right|_{x_1=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \varphi_3 \cdot dx_2$$

Для силового погранслоя будем иметь однородные граничные условия и если учитывать, что (при $s = 0$) однородны также соответствующие определяющие уравнения, то получим, что силовой погранслой просто обращается в нуль.

Что касается моментного погранслоя, то уравнения этого погранслоя совпадают с уравнением (4.7), граничные условия на $\zeta = \pm 1$, как и в (4.7), однородны, а граничные условия на $x_1 = 0$ необходимо заменить на условие вида:

$$\left.\overset{p}{\omega}{}_3^{(0)}\right|_{t=0} = \tilde{\varphi}_3 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\varphi}_3 \cdot d\zeta$$

Вариационное соотношение, из которого необходимо определить произволы погранслоев для рассматриваемого случая граничных условий плоской задачи НТУ для прямоугольника, имеет вид

$$\int_{-1}^{1}\left[\left(\overset{\text{вн}}{\sigma}_{11}+\overset{p}{\sigma}_{11}-\varphi_1^{\prime}\right)\delta\overset{p}{v}_1+\left(\overset{\text{вн}}{\sigma}_{12}+\overset{p}{\sigma}_{12}-\varphi_2^{\prime}\right)\delta\overset{p}{v}_2+\left(\varphi_3^{\prime}-\left(\overset{\text{вн}}{\omega}_3+\overset{p}{\omega}_3\right)\right)\delta\overset{p}{\mu}_{13}\right]_{x_1=0}dl+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left[\left(\overset{\text{вн}}{\sigma}_{11}+\overset{p}{\sigma}_{11}-\varphi_1^{\prime\prime}\right)\delta\overset{p}{v}_1+\left(\overset{\text{вн}}{\sigma}_{12}+\overset{p}{\sigma}_{12}-\varphi_2^{\prime\prime}\right)\delta\overset{p}{v}_2+\left(\varphi_3^{\prime\prime}-\left(\overset{\text{вн}}{\omega}_3+\overset{p}{\omega}_3\right)\right)\delta\overset{p}{\mu}_{13}\right]_{x_1=a}dl=0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1999. 214с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 862с
3. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука. 1984. 256с.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512с.
5. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 415с.
6. Агаловян Л. А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977.Т. 30. N5. С. 48-62.
7. Агаловян Л. А., Хачатрян Ш. М. О некоторых плоских задачах для ортотропной полосы// Уч. записки Ереванск. ун-та. Естеств. науки. 1977. N 2(135). С. 20-26.
8. Саркисян С. О. О некоторых результатах внутреннего и краевого расчетов тонких пластин по несимметричной теории упругости // В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Посвященный 80-летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяна. Ереван: Изд-во НАН Армении, 2002. С. 285-296.
9. Саркисян С. О., Мутафян М. Н. Внутренняя задача изотропного упругого прямоугольника по несимметричной теории упругости/ Изв. ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. N 3. С. 141-142.
10. Мутафян М. Н. Погранслой для упругого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Материалы XII республиканской конференции молодых ученых. Механика. Ереван. 2003. С. 151-156.
11. Мутафян М. Н. Сопряжение асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоя для тонкого прямоугольника по несимметричной теории упругости//Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ереван. 2002. С.185-190.
12. Саркисян С.О. Асимптотическая теория и вариационное уравнение плоской задачи упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости//Докл. НАН Армении. 1999.Т.99.N2. С.138-148.
13. Пальмов В. А. Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1117-1120.
14. Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Плоская деформация в асимметричной теории упругости // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 543-547.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию 19.02.2004