ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Мкртчян К.Ш.

Կ. Շ. Մկրտչյան
Պտտական շարժման հաշվառումով ուղղանկյուն սալի հարկադրական տատանման մասին

Հետազոտվում է առաձգական, իզոտրոպ, եզրագծով ազատ հենված սալի հարկադրական տատանումները նորմալ, կենտրոնացված, ըստ ժամանակի պարբերական ուժի ազդեցության տակ: Խնդիրը լուծվում է [1]-ում շարադրված մեթոդով, օգտագործելով կոմբինացված պայմաններ, որը ներառում է սալի մակերևույթին դինամիկ ազդեցությունը և ուժի ազդեցության կետի նկատմամբ պտտական շարժումը նշված կետով անցնող, սալի միջին մակերևույթին ուղղահայաց տարբեր հարթությունների մեջ: Դիտարկվող խնդրի լուծումը կառուցվում է սեփական տատանման ձևերի կրկնակի շարքերի տեսքով: Սալի համար ստացված են երկու տիպի հարկադրական տատանումներ և նոր ռեզոնանսային հաճախականություններ: Հաշվարկների թվային արդյունքները բերված են գրաֆիկների տեսքով և ստացված արդյունքների համար կատարված է անալիզ:

K. Sh. Mkrtchyan
On forced vibrations of the rectangular plate with regard to the rotational motion

Исследуются вынужденные колебания упругой, изотропной, шарнирно-опертой пластинки под действием нормальной, сосредоточенной, периодической во времени, силы. Задача решается методом, предложенным в [1], с использованием комбинированных условий, включающих динамическое воздействие на поверхность пластинки и вращательное движение относительно точки приложения силы в различных плоскостях, перпендикулярных срединной плоскости пластинки и проходящих через вышеуказанную точку. Используемый метод позволяет решать широкий класс краевых задач, в частности, он может быть применен для решения задач изгибных колебаний упругой прямоугольной пластинки при различного рода нагрузках и граничных условиях. Решение поставленной задачи строится в виде двойных рядов собственных форм колебаний. Получены два типа вынужденных колебаний и новые резонансные частоты для пластинки. Численные результаты расчетов приведены в виде графиков и дан анализ полученных результатов.

Рассмотрим вынужденные колебания упругой, изотропной, шарнирно-опертой по контуру прямоугольной пластинки с размерами a, b, h, вызванные нормальной, сосредоточенной, во времени, периодической силой, приложенной в точке $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$. Вынужденные колебания пластинки, отнесенные к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ (оси x_1, x_2 расположены в срединной плоскости), с учетом эффектов поперечного сдвига и инерции вращения описывается следующими уравнениями и граничными условиями [2]:

$$D\left[(1-\nu)\Delta\psi_1 + (1+\nu)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\right] - 2k^2Gh\left(\psi_1 + \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\right) = 2\rho J\,\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}$$

$$D\left[(1-\nu)\Delta\varphi_1 + (1+\nu)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2}\right] - 2k^2Gh\left(\varphi_1 + \frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right) = 2\rho J\,\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} \qquad (1)$$

$$k^2Gh(\Delta w_1 + \Phi_1) - \rho h\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = q\delta(x_1 - c_1)\delta(x_2 - c_2)\sin\omega t$$

$$(x_1 = 0, b) \quad w_1 = 0, \; M_{x_1} = 0, \; \varphi_1 = 0 \tag{2}$$
$$(x_2 = 0, a) \quad w_1 = 0, \; M_{x_2} = 0, \; \psi_1 = 0$$

где

$$M_{x_1} = D\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right), \; M_{x_2} = D\left(\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right), \; \Phi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}$$

$D = \dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; ν, ρ, E, G – соответственно: коэффициент Пуассона, плотность материала и модули упругости при растяжении и сдвиге, J – момент инерции поперечного сечения; k^2 – численный коэффициент; Δ – оператор Лапласа; $\delta(\xi)$ – дельта-функция, q – амплитуда силы; w_1 – прогиб пластинки; ψ_1, φ_1 – средние по толщине углы поворота элемента относительно осей x_1 и x_2.

Граничные условия (2) будут удовлетворены, если решение системы (1) представить в виде двойных тригонометрических рядов

$$w_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} \sin\frac{m\pi x_1}{b} \sin\frac{n\pi x_2}{a} \sin\omega t$$
$$\psi_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{1mn} \cos\frac{m\pi x_1}{b} \sin\frac{n\pi x_2}{a} \sin\omega t \tag{3}$$
$$w_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{2mn} \sin\frac{m\pi x_1}{b} \cos\frac{n\pi x_2}{a} \sin\omega t$$

Подставляя значения w_1, ψ_1, φ_1 из (3) в систему уравнений (1), для искомых коэффициентов f_{mn}, c_{1mn}, c_{2mn} получаем

$$f_{mn} = -\frac{4q}{ab} \frac{\dfrac{1}{\rho h} - \dfrac{J\omega_2}{k^2 Gh} + \sqrt{\dfrac{D}{\rho h}} \dfrac{k_{mn}}{k^2 Gh}}{k_{mn}^2 - \beta_{mn}\omega^2 + c\omega^4} \sin\frac{m\pi c_1}{b} \sin\frac{n\pi c_2}{a}$$

$$c_{1mn} = \frac{m\pi}{b}\alpha_{mn}, \; c_{2mn} = \frac{n\pi}{a}\alpha_{mn}, \; c = \frac{\rho J}{k^2 Gh}$$

$$\alpha_{mn} = \frac{2k^2 Ghf_{mn} - D(1+\nu)d_{mn}}{2\rho J\omega^2 - (1-\nu)\sqrt{D\rho h}\,k_{mn} - 2k^2 Gh}$$

$$d_{mn} = \left(\sqrt{\frac{\rho h}{D}} k_{mn} - \frac{\rho\omega^2}{k^2 G}\right) f_{mn} - \frac{4q}{abk^2 Gh} \sin\frac{m\pi c_1}{b} \sin\frac{n\pi c_2}{a}$$

$$\beta_{mn} = 1 + \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\left(\frac{D}{k^2 Gh} + \frac{J}{h}\right) k_{mn}, \quad k_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)$$

Отметим, что система уравнений (1) обладает волновыми свойствами [3] и допускает решения в виде движения волн изгиба и волн сдвига в пластинке. Из условия непрерывности угла поворота элемента пластинки на фронте волны изгиба [3] невозбужденная часть осуществляет вращательное движение. Получается, что точки пластинки внутренней части фронта волны изгиба будут упруго колебаться, а внешняя часть будет вращаться. Для изучения вращательного движения пластинки необходимо выделить упругие колебания точек пластинки. Это можно получить, если фиксировать распространение волн изгиба относительно точки приложения силы. В этом случае $w_1=0$, а влияние вращательного движения на невозбужденные части пластинки переместится в неподвижную точку приложения силы. Отсюда очевидно, что прямая линия, проходящая от неподвижной точки к краю пластинки по направлению φ (φ – полярный угол в неподвижной точке приложения силы), будет совершать вращательные движения по закону $\theta(t,\varphi)$ в плоскости, перпендикулярной к пластинке, проходящей через эту линию (θ–угол поворота элемента пластинки на фронте волны изгиба). Можно исследовать вращательное движение линии по направлению φ, если по тому же закону и в той же плоскости вращать пластинку вокруг оси, проходящей через неподвижную точку и перпендикулярно к этой плоскости, приложив к неподвижной точке вращательный момент $M(t,\varphi)$. Отсюда получим точки на линии, которые по направлению φ совершают новые упругие колебания. Для получения упругих колебаний других точек следует изменять параметр φ в пределах $0 \div 2\pi$. Отметим, что в случае распространения волны изгиба в пластинке, при ее вращательном движении, она приводит края пластинки к неподвижным положениям. В этом случае краевые условия пластинки во время его вращательного движения будут соответствовать условиям первой задачи.

Линейное интегро-дифференциальное уравнение вращательного движения пластинки в вертикальной плоскости по направлению φ и система уравнений упругих вынужденных поперечных колебаний на основе [4] имеют вид:

$$\rho h\iint_{\Omega} x_1'\left(x_1'\ddot{\theta} + \ddot{w}_2\right)d\Omega = M - \rho g h\iint_{\Omega}\left(x_1'\cos\theta - w_2\sin\theta\right)d\Omega \qquad (4)$$

$$\begin{gathered}
D\left\{(1-\nu)\Delta\psi_2 + (1+\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}\cos\varphi + (1+\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}\sin\varphi\right\} - \\
-2k^2Gh\left[\psi_2 + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\cos\varphi + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\sin\varphi\right] = 2\rho J\,\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} \\
D\left\{(1-\nu)\Delta\varphi_2 - (1+\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}\sin\varphi + (1+\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}\cos\varphi\right\} - \\
-2k^2Gh\left[\varphi_2 - \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\sin\varphi + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\cos\varphi\right] = 2\rho J\,\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} \\
k^2Gh(\Delta w_2 + \Phi_2) - \rho h\,\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = -\rho h\left(x_1'\ddot{\theta} + g\cos\varphi\right)
\end{gathered} \qquad (5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
&(x_1 = 0,b;\ \ \varphi = 0) && w_2 = 0,\ \ M_{x_1} = 0,\ \ \varphi_2 = 0 \\
&(x_2 = 0,a;\ \ \varphi = \pi/2) && w_2 = 0,\ \ M_{x_2} = 0,\ \ \psi_2 = 0
\end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь

$$x_1' = (x_1 - c_1)\cos\varphi + (x_2 - c_2)\sin\varphi$$

$$\theta = (\psi_1\cos\varphi + \varphi_1\sin\varphi)\Big|_{\substack{x_1 = x_1' \\ x_2 = x_2}}$$

$$x_1^* = \begin{cases} (vt - 2jd)\cos\varphi + c_1 & \text{при } t > 2jd/v \\ [2(j+1)d - vt]\cos\varphi + c_1 & \text{при } t < 2(j+1)d/v \end{cases}$$

$$x_2^* = \begin{cases} (vt - 2jd)\sin\varphi + c_2 & \text{при } t > 2jd/v \\ [2(j+1)d - vt]\sin\varphi + c_2 & \text{при } t < 2(j+1)d/v \end{cases}$$

$(j = (0,1,...)$

при $t > 2jd/v$

$$\ddot{\theta} = -\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{q\alpha_{mn}}{ab}\{a_{mn}(\varphi)[\theta'_{mn}(\varphi) - \theta''_{mn}(\varphi)] - a_{mn}(-\varphi)[\theta'_{mn}(-\varphi) - \theta''_{mn}(-\varphi)]\}$$

$$\theta'_{mn}(\varphi) = [\omega - a_{mn}(\varphi)v]^2 \cos[(\omega - a_{mn}(\varphi)v)t + b_{mn}(\varphi)]$$

$$\theta''_{mn}(\varphi) = [\omega + a_{mn}(\varphi)v]^2 \cos[(\omega + a_{mn}(\varphi)v)t - b_{mn}(\varphi)]$$

$$a_{mn}(\varphi) = \frac{m\pi}{b}\cos\varphi + \frac{n\pi}{a}\sin\varphi, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

$$b_{mn}(\pm\varphi) = 2jda_{mn}(\pm\varphi) + \frac{m\pi c_1}{b} \pm \frac{n\pi c_2}{a}$$

v–скорость распространения волн изгиба по пластинке, d определяется при численных расчетах.

Решание системы (5) (без учета собственного веса) при $t > 2jd/v$ представим в виде

$$w_2 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\Big[f_{1mn}(\varphi)\theta'_{mn}(\varphi,t) + f_{2mn}(\varphi)\theta''_{mn}(\varphi,t) + f_{3mn}(\varphi)\theta'_{mn}(-\varphi,t) +$$
$$+ f_{4mn}(\varphi)\theta''_{mn}(-\varphi,t)\Big]\sin\frac{m\pi x_1}{b}\sin\frac{n\pi x_2}{a}$$

$$\psi_2 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} A_{11mn}(\varphi)\theta'_{mn}(\varphi,t) + A_{12mn}(\varphi)\theta''_{mn}(\varphi,t) + \\ + A_{13mn}(\varphi)\theta'_{mn}(-\varphi,t) + A_{14mn}(\varphi)\theta''_{mn}(-\varphi,t)\end{bmatrix}\cos\varphi\cos\frac{m\pi x_1}{b}\sin\frac{n\pi x_2}{a} +$$
$$+ \sum_{m,n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} A_{21mn}(\varphi)\theta'_{mn}(\varphi,t) + A_{22mn}(\varphi)\theta''_{mn}(\varphi,t) + \\ + A_{23mn}(\varphi)\theta'_{mn}(-\varphi,t) + A_{24mn}(\varphi)\theta''_{mn}(-\varphi,t)\end{bmatrix}\sin\varphi\sin\frac{m\pi x_1}{b}\cos\frac{n\pi x_2}{a} \quad (7)$$

$$\varphi_2 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} B_{11mn}(\varphi)\theta'_{mn}(\varphi,t) + B_{12mn}(\varphi)\theta''_{mn}(\varphi,t) + \\ + B_{13mn}(\varphi)\theta'_{mn}(-\varphi,t) + B_{14mn}(\varphi)\theta''_{mn}(-\varphi,t)\end{bmatrix}\cos\varphi\sin\frac{m\pi x_1}{b}\cos\frac{n\pi x_2}{a} +$$
$$+ \sum_{m,n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} B_{21mn}(\varphi)\theta'_{mn}(\varphi,t) + B_{22mn}(\varphi)\theta''_{mn}(\varphi,t) + \\ + B_{23mn}(\varphi)\theta'_{mn}(-\varphi,t) + B_{24mn}(\varphi)\theta''_{mn}(-\varphi,t)\end{bmatrix}\sin\varphi\cos\frac{m\pi x_1}{b}\sin\frac{n\pi x_2}{a}$$

которая удовлетворяет всем условиям шарнирно-опертой по всему контуру прямоугольной пластинки. Подставляя значения w_2, ψ_2, φ_2 в систему уравнений (5), для искомых коэффициентов f_{imn}, A_{1imn}, A_{2imn}, B_{1imn}, B_{2imn} $(i = 1 \div 4)$ получаем выражения, которые здесь приводятся только для коэффициентов f_{imn}. Остальные ввиду их громоздкости не приводятся.

$$f_{1mn}(\varphi) = -D_{mn}\left[d^-_{mn}(\varphi) - 1\right]a_{mn}(\varphi)l^-_{mn}(\varphi),\quad f_{3mn}(\varphi) = -f_{1mn}(-\varphi)$$

$$f_{2mn}(\varphi) = D_{mn}\left[d^+_{mn}(\varphi) - 1\right]a_{mn}(\varphi)l^+_{mn}(\varphi),\quad f_{4mn}(\varphi) = -f_{2mn}(-\varphi)$$

$$d^\pm_{mn}(\varphi) = \frac{J\rho}{k^2Gh}\left[\omega \pm a_{mn}(\varphi)\mathrm{v}\right]^2$$

$$D_{mn} = \frac{4q\alpha_{mn}}{abmn\pi^2}\left\{\begin{aligned}&\left[(c_1 - b)\cos m\pi - c_1\right](1 - \cos n\pi)\cos\varphi + \\ &+\left[(c_2 - a)\cos n\pi - c_2\right](1 - \cos m\pi)\sin\varphi\end{aligned}\right\}\sin\frac{m\pi c_1}{b}\sin\frac{n\pi c_2}{a}$$

$$l^\pm_{mn}(\varphi) = \left\{k^2_{mn} - \beta_{mn}\left[\omega \pm a_{mn}(\varphi)\mathrm{v}\right]^2 + c\left[\omega \pm a_{mn}(\varphi)\mathrm{v}\right]^4\right\}^{-1}$$

Вынужденные колебания при $t < 2(j+1)d/\mathrm{v}$ можно получить с помощью формулы (7), заменив j и v на $-(j+1)$ и -v.

Новые резонансные частоты w_2 определяются из условий $\left[l^\pm_{mn}(\pm\varphi)\right]^{-1} = 0$ и имеют вид

$$\omega_{mni} = \pm\gamma_{mni} \pm a_{mni}(\pm\varphi)\mathrm{v} \qquad (i = 1,2)$$

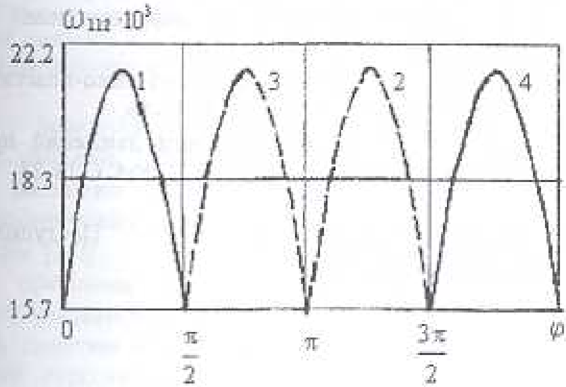
$$\gamma_{mni} = (2c)^{-1/2}\sqrt{\beta_{mn} + (-1)^{i+1}\sqrt{\beta^2_{mn} - 4ck^2_{mn}}}$$

Чтобы вращательное движение пластинки и полученные резонансные частоты были совместимы, необходимы тригонометрические функции, описывающие указанные частоты по величине и по знаку, соответствовали направляющим косинусам (изменения параметра φ в каждой четверти), направления вращения пластинки.

Рассмотрим в качестве конкретного примера пластинку со следующими параметрами:

a=100 см, b=100 см, c_1=30 см, c_2=20 см, ν=0,3, $E=2\times10^6$ Кг/см^2, $\rho=7{,}8\times10^{-3}$ Кг/см^3, h=0,25 см, q=8 Кг, $\omega=10$ с$^{-1}$.

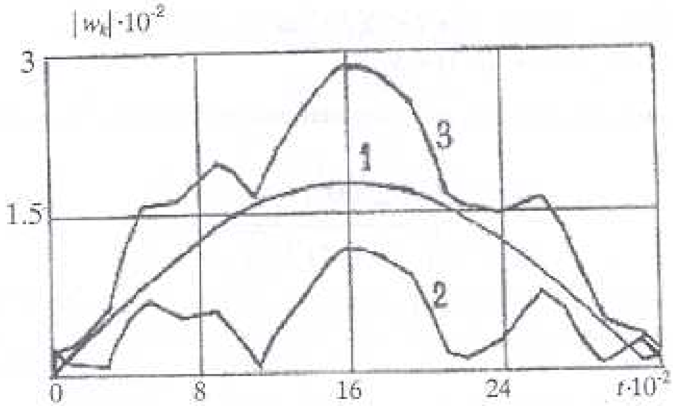
На фиг.1 показана зависимость резонансных частот ω_{112} от параметра φ. Сплошными линиями показаны кривые 1, 4, соответствующие резонансным частотам ω_{112} при $\omega_{112} = \gamma_{112} + a_{11}(\pm\varphi)\mathrm{v}$. Штриховыми линиями показаны кривые 2, 3, соответствующие ω_{112} при $\omega_{112} = \gamma_{112} - a_{11}(\pm\varphi)\mathrm{v}$.



Фиг. 1

Видно, что с увеличением параметра φ, значение ω_{112} сначала возрастая достигает своего максимального значения, а затем начинает убывать.

Наибольшей величины ω_{112} достигает при значениях $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \ldots$ Для $\omega_{112} = -\gamma_{112} \pm a_{11}(\pm\varphi)\nu$ получаются аналогичные графики, а для случая $\omega_{111} = \pm\gamma_{111} \pm a_{11}(\pm\varphi)\nu$ получаются большие значения. На фиг. 2 приведены численные расчеты для двух типов вынужденных колебаний пластинки в зависимости от времени при $x_1 = \frac{b}{2}$, $x_2 = \frac{a}{2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a-2c_2}{b-2c_1}$.



Фиг. 2

Кривые 1, 2 представляют прогибы $|w_1|$ и $|w_2|$, рассчитанные, соответственно, по формулам (3) и (7). Кривая 3 представляет $|w_3| = |w_1 + w_2|$. Видно, что значения прогиба $|w_3|$ больше $|w_1|$, $|w_2|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мкртчян К. Ш. О двойственном характере поперечных колебаний упругого стержня // ПММ. 1999. Т.63. №6. С.1055-1058.
2. Селезов И. Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. Киев: Наукова думка, 1989. 204с.
3. Никитин Л. В. Распространение поперечных упруго-вязко-пластических волн в балках и пластинах.// Инж. Сборник. 1960. Т.30. С.31-46.
4. Гукасян А. А., Саркисян С. В. О колебательном движении прямоугольной пластинки // Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т.43. №4. С.13-23.

Институт Геофизики и инженерной сейсмологии
имени акад. А. Г. Назарова НАН Армении

Поступила в редакцию
22.04.2003