

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛИТ

Амбарцумян А. В., Геворкян Г. А.

Ա. Վ. Համբարձումյան, Գ. Ա. Գևորգյան

Սալերի ծածան խնդիրների լուծման վերջավոր տարրերի մեթոդի մի ձևափոխության մասին Առաջարկվում է ուղղանկյուն տարրերով վերջավոր տարրերի մեթոդի մի ձևափոխություն, որում սալերի ծածան խնդիրների լուծումը հանգեցվում է քառանկյունային ծրագրավորման խնդիրների:

A. V. Hambarcumyan, G. A. Gevorgyan

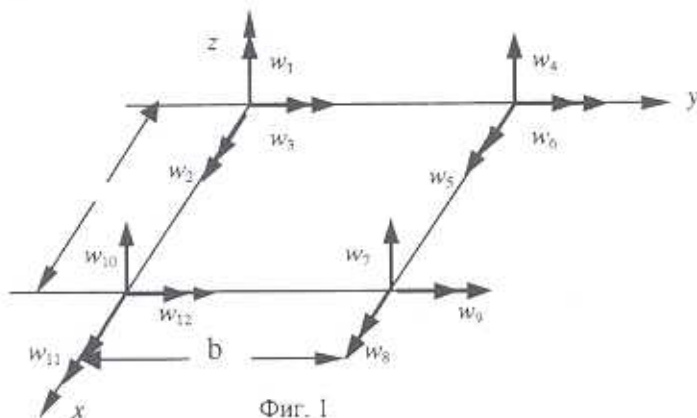
About a Modification of Finite Elements Method for Plates Bending Problems Solution

Предлагается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы, при котором решения задач изгиба плит сводятся к задачам квадратичного программирования.

§1. Характеристики прямоугольного элемента при изгибе плит

Срединную плоскость плиты представим в виде совокупности $s \in N = \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ конечных элементов прямоугольной формы. Рассмотрим прямоугольный элемент плиты в плоскости xy , показанный на фиг.1.

Обозначим через $w_x = (w_1^x, w_2^x, \dots, w_{12}^x)^T$ вектор узловых перемещений. Нумерация и положительные направления компонентов этого вектора приведены на фиг.1. Здесь вектором с двумя стрелками указано положительное направление поворота, связанное с движением штопора в направлении вектора.



Фиг. 1

Перемещения точек срединной поверхности элемента аппроксимируем следующим многочленом четвертого порядка, содержащим 12 неизвестных параметров:

$$w^s(x, y) = \sum_{i=1}^{12} w_i^s \Phi_i(x, y) \tag{1}$$

тогда, при $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$, для функции Эрмита $\Phi_i(x, y)$ имеем [3]

$$\Phi_1^s(\xi, \eta) = 1 - 3\xi^2 - \xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + 2\eta^3 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3$$

$$\Phi_8^s(\xi, \eta) = b(-\xi\eta^2 + \xi\eta^3)$$

$$\Phi_2^s(\xi, \eta) = b(\eta - \xi\eta - 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3)$$

$$\Phi_3^s(\xi, \eta) = a(-\xi + \xi\eta + 2\xi^2 - 2\xi^2\eta - \xi^3 + \xi^3\eta)$$

$$\Phi_4^s(\xi, \eta) = 3\eta^2 + \xi\eta - 2\eta^3 - 3\xi\eta^2 - 3\xi^2\eta + 2\xi\eta^3 + 2\xi^3\eta$$

$$\Phi_5^s(\xi, \eta) = b(-\eta^2 + \eta^3 + \xi\eta^2 - \xi\eta^3)$$

$$\Phi_6^s(\xi, \eta) = a(-\xi\eta + 2\xi^2\eta - \xi^3\eta)$$

$$\Phi_7^s(\xi, \eta) = -\xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3 \quad (2)$$

$$\Phi_9^s(\xi, \eta) = a(\xi^2\eta - \xi^3\eta)$$

$$\Phi_{10}^s(\xi, \eta) = 3\xi^2 + \xi\eta - 2\xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3 - 3\xi^2\eta$$

$$\Phi_{11}^s(\xi, \eta) = b(\xi\eta - 2\xi\eta^2 + \xi\eta^3); \quad \Phi_{12}^s(\xi, \eta) = a(\xi^2 - \xi^3 - \xi^2\eta + \xi^3\eta)$$

Компоненты вектора перемещения $f_s = (w^s, \frac{\partial w^s}{\partial y}, -\frac{\partial w^s}{\partial x})^T =$

$= (w^s, \theta^s, \omega^s)^T$ внутри s -ого элемента соответственно определяются формулой (1) и формулами

$$\theta^s(x, y) = \sum_{i=1}^{12} w_i^s \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial y}, \quad \omega^s(x, y) = -\sum_{i=1}^{12} w_i^s \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial x} \quad (3)$$

Потенциальная энергия изгиба s -ого элемента определяется выражением[3]

$$\Omega_s = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ [\nabla^2 w(x, y)]^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \quad (4)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E - модуль упругости, h - толщина плиты, ν - коэффициент Пуассона.

Подставляя значения $w^s(x, y)$ из выражения (1) в выражение (7), потенциальную энергию изгиба представим в виде

$$\bar{\Omega}_s = \frac{1}{2} (w_s)^T k_s w_s \quad (5)$$

где $k_s = \|k_{ij}^s\|$ - матрица жесткости, компоненты которой определяются формулой

$$k_{ij}^s = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \nabla^2 \Phi_i^s \nabla^2 \Phi_j^s + 2(1-\nu) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial^2 \Phi_i^s}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi_j^s}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_i^s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_j^s}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_i^s}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi_j^s}{\partial x^2} \right] \right\} dx dy$$

Запишем k_s в виде $k_s = \frac{D}{ab} \|\bar{k}_{ij}^s\|$, тогда, при $m = \frac{a}{b}$, исходя из соотношений (6), имеем

$$\bar{k}_{11}^s = \bar{k}_{44}^s = \bar{k}_{77}^s = \bar{k}_{10,10}^s = 4(m^2 + \frac{1}{m^2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\nu)$$

$$\bar{k}_{41}^s = \bar{k}_{10,7}^s = 2(\frac{1}{m^2} - 2m^2) - \frac{1}{5}(14 - 4\nu)$$

$$\bar{k}_{22}^s = \bar{k}_{55}^s = \bar{k}_{88}^s = \bar{k}_{11,11}^s = [\frac{4m^2}{3} + \frac{4}{5}(1 - \nu)]b^2$$

$$\bar{k}_{52}^s = \bar{k}_{11,8}^s = [\frac{2m^2}{3} - \frac{1}{15}(1 - \nu)]b^2$$

$$\bar{k}_{33}^s = \bar{k}_{66}^s = \bar{k}_{99}^s = \bar{k}_{12,12}^s = [\frac{4}{3m^2} + \frac{4}{15}(1 - \nu)]a^2$$

$$\bar{k}_{32}^s = -\bar{k}_{65}^s = \bar{k}_{98}^s = -\bar{k}_{12,11}^s = -\nu ab$$

$$\bar{k}_{21}^s = -\bar{k}_{54}^s = -\bar{k}_{87}^s = \bar{k}_{11,10}^s = [2m^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]b$$

$$\bar{k}_{74}^s = \bar{k}_{10,1}^s = -2(\frac{2}{m^2} - m^2) - \frac{1}{5}(14 - 4\nu)$$

$$\bar{k}_{43}^s = \bar{k}_{61}^s = -\bar{k}_{10,9}^s = -\bar{k}_{12,7}^s = [-\frac{1}{m^2} + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]a$$

$$\bar{k}_{42}^s = \bar{k}_{51}^s = -[2m^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)]b$$

$$\bar{k}_{31}^s = \bar{k}_{64}^s = -\bar{k}_{97}^s = -\bar{k}_{12,10}^s = [-\frac{2}{m^2} - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]a$$

$$\bar{k}_{63}^s = \bar{k}_{12,9}^s = [\frac{2}{3m^2} - \frac{4}{15}(1 - \nu)]a^2$$

$$\bar{k}_{72}^s = -\bar{k}_{81}^s = -\bar{k}_{10,5}^s = \bar{k}_{11,4}^s = [-m^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)]b$$

$$\bar{k}_{85}^s = \bar{k}_{11,2}^s = [\frac{2m^2}{3} - \frac{4}{15}(1 - \nu)]b^2$$

$$\bar{k}_{71}^s = \bar{k}_{10,4}^s = -2(m^2 + \frac{1}{m^2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\nu); \bar{k}_{96}^s = \bar{k}_{12,3}^s = [\frac{2}{3m^2} - \frac{1}{15}(1 - \nu)]a^2$$

$$\bar{k}_{76}^s = -\bar{k}_{94}^s = \bar{k}_{10,3}^s = -\bar{k}_{12,1}^s = [\frac{2}{m^2} + \frac{1}{5}(1 - \nu)]a$$

$$\bar{k}_{82}^s = \bar{k}_{11,5}^s = [\frac{m^2}{3} + \frac{1}{15}(1 - \nu)]b^2$$

$$\bar{k}_{93}^s = -\bar{k}_{91}^s = \bar{k}_{10,6}^s = -\bar{k}_{12,4}^s = [-\frac{1}{m^2} - \frac{1}{5}(1 - \nu)]a$$

$$\bar{k}_{93}^s = \bar{k}_{12,6}^s = \left[\frac{1}{3m^2} + \frac{1}{15}(1-\nu) \right] a^2$$

$$\bar{k}_{75}^s = \bar{k}_{84}^s = -\bar{k}_{10,2}^s = -\bar{k}_{11,1}^s = \left[-m^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \right] b$$

$$\bar{k}_{10,8}^s = -\bar{k}_{11,7}^s = \left[2m^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \right] b$$

$$\bar{k}_{33}^s = \bar{k}_{62}^s = \bar{k}_{83}^s = \bar{k}_{85}^s = \bar{k}_{92}^s = \bar{k}_{95}^s = \bar{k}_{11,3}^s = \bar{k}_{11,5}^s = \bar{k}_{11,9}^s = \bar{k}_{12,2}^s = \bar{k}_{12,5}^s = \bar{k}_{12,8}^s = 0$$

Обозначим через $P_s = (P_1^s, P_2^s, \dots, P_{12}^s)^T$ вектор узловых нагрузок, эквивалентный внешней нагрузке. Положительные направления узловых нагрузок соответствуют таковым для обобщенных узловых перемещений (фиг.1).

В случае равномерно распределенной нагрузки q имеем [3]

$$P_s = \frac{qab}{4} \left(1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, 1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6} \right)^T \quad (7)$$

Работа узловых нагрузок элемента задается формулой [3]

$$\hat{\Omega}^s = w_s^T P_s \quad (8)$$

Общая потенциальная энергия s -ого конечного элемента равна разности потенциальной энергии деформации и работы заданных внешних сил [2]

$$\Omega^s = \bar{\Omega}^s - \hat{\Omega}^s$$

откуда, принимая во внимание формулы (5) и (8), находим

$$\Omega^s = \frac{1}{2} w_s^T k_s w_s - w_s^T P_s \quad (9)$$

§2. Модифицированный метод конечных элементов для решения задач изгиба плит

Учитывая, что срединная плоскость плиты представлена в виде совокупности \bar{n} конечных элементов прямоугольной формы, для потенциальной энергии плиты имеем

$$\Omega = \sum_{s=1}^{\bar{n}} \Omega_s = \sum_{s=1}^{\bar{n}} \left(\frac{1}{2} w_s^T k_s w_s - w_s^T P_s \right) \quad (10)$$

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы [2], для определения искомых векторов $w_s, s \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ получим следующую задачу квадратичного программирования

$$\min \left\{ \sum_{s=1}^{\bar{n}} \left(\frac{1}{2} w_s^T k_s w_s - w_s^T P_s \right) \mid \text{условие совместности деформации,} \right. \\ \left. \text{кинематические краевые условия} \right\} \quad (11)$$

Составим условия совместности деформаций в смежном сечении вдоль границы разделов s -ого и $(s+1)$ -ого конечных элементов. В зависимости от относительных размеров (длины границ разделов конечных элементы одинаковые или разные) смежных конечных элементов они пишутся в двух разных формах:

$$w_{r,s} = w_{r,s+1} \quad (12)$$

$$w_{r,s} = f_{s+1} \text{ или } f_s = w_{r,s+1} \quad (13)$$

Здесь, через $w_r = (w_r^1, w_r^2, w_r^3)^T$ обозначен вектор перемещения r -ого узла, где w_r^1 — смещение в направлении оси z , w_r^2 — вращение вокруг оси x , w_r^3 — вращение вокруг оси y . В обозначениях $w_{r,s}$ и $w_{r,s+1}$ дополнительные индексы показывают те конечные элементы, к которым принадлежат векторы узловых перемещений. Для точек, не являющихся узловыми, значения компонент векторов f_s или f_{s+1} определяются по формулам (1) и (3).

Обозначим через

$w = (w_1^T, w_2^T, \dots, w_n^T)^T = (w_1^1, w_1^2, w_1^3, w_2^1, w_2^2, w_2^3, \dots, w_n^1, w_n^2, w_n^3)^T$ вектор узловых перемещений, где n — общее число узлов пластины. Тогда, если в i -ом узле сходятся узловые точки r элементов, то между обобщенными узловыми перемещениями элементов и компонентами вектора q имеются следующие связи:

$$w_{j,i} = w_i, \quad j \in r, i \in N = \{1, 2, \dots, n\} \quad (14)$$

Принимая во внимание эти связи, легко увидеть, что все условия совместности деформации (12) автоматически выполняются, а условие (13) переписывается в виде

$$f_i = w_i, \quad i \in \hat{N} = \{1, 2, \dots, \hat{n}\} \quad (15)$$

где через \hat{n} обозначено количество тех узлов, в которых не все сходящиеся элементы имеют узловые точки. Условия (15) с учетом формул (1) и (3) перепишем в виде системы уравнений

$$\hat{H}w = 0 \quad (16)$$

где \hat{H} — матрица порядка $\hat{n} \times n$.

Пусть $P = (P_1^1, P_1^2, P_1^3, P_2^1, P_2^2, P_2^3, \dots, P_n^1, P_n^2, P_n^3)^T$ — вектор нагрузок, $K = \|K_{ij}\|$ — матрица жесткости для всей плиты. Тогда, как следует из соотношения (10)

$$P_i^j = \sum_r P_{i,j}^r, \quad i \in N = \{1, 2, \dots, n\}, \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (17)$$

$$K_{ij} = \sum_r k_{ij}^r, \quad i \in N, \quad j \in N \quad (18)$$

В формулах (17) и (18) знак суммы распространяется на все соединяемые в узле стороны конечных элементов.

Как известно [3], функция поперечного смещения w^s , задаваемая формулой (1), обеспечивает непрерывность перемещения, но не обеспечивает совместности наклона нормали вдоль границы разделов элементов. Так как вдоль граничной поверхности элементов наклон нормали изменяется параболически, то для обеспечения непрерывности необходимо ввести на этой поверхности дополнительный узел, на котором будет задано условие непрерывности. Возьмем эти узлы в центре сторон конечных элементов, и, используя формулы (3), найдем в этих

точках величины вращений вокруг осей x и y , т. е. $\theta_i^s, \theta_i^{s+1}, i \in \{1, 2, \dots, \bar{m}\}$ и $\omega_j^s, \omega_j^{s+1}, j \in \{1, 2, \dots, \bar{m}\}$, где \bar{m} и \tilde{m} — соответственно количество сторон конечных элементов, параллельных осям x и y . Подставляя эти значения в условие непрерывности вида

$$\theta_i^s = \theta_i^{s+1}, i \in \{1, 2, \dots, \bar{m}\}, \omega_j^s = \omega_j^{s+1}, j \in \{1, 2, \dots, \tilde{m}\},$$

получаем систему уравнений

$$Hw = 0 \quad (19)$$

где H — матрица порядка $m \times n$, $m = \bar{m} + \tilde{m}$.

Отметим, что, исходя из формул (3), в дополнительных узлах для определения соответствующих вращений имеем

$$\begin{aligned} \theta^s\left(\frac{a}{2}, b\right) &= \frac{a}{8b} w_3^s + \frac{1}{2} w_5^s - \frac{a}{8b} w_6^s + \frac{1}{2} w_8^s + \frac{a}{8b} w_9^s - \frac{a}{8b} w_{12}^s \\ \theta^s\left(\frac{a}{2}, 0\right) &= \frac{1}{2} w_2^s + \frac{a}{8b} w_3^s - \frac{a}{8b} w_6^s + \frac{a}{8b} w_9^s + \frac{1}{2} w_{11}^s - \frac{a}{8b} w_{12}^s \\ \omega^s\left(a, \frac{b}{2}\right) &= \frac{b}{8a} w_2^s - \frac{b}{8a} w_5^s + \frac{b}{8a} w_8^s + \frac{1}{2} w_9^s - \frac{b}{8a} w_{11}^s + \frac{1}{2} w_{12}^s \\ \omega^s\left(0, \frac{b}{2}\right) &= \frac{b}{8a} w_2^s + \frac{1}{2} w_3^s - \frac{b}{8a} w_5^s + \frac{1}{2} w_6^s + \frac{b}{8a} w_8^s - \frac{b}{8a} w_{11}^s \end{aligned} \quad (20)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} w_1^1 + K_{12}^{(0)} w_1^2 + K_{13}^{(0)} w_1^3 + K_{14}^{(0)} w_2^1 + K_{15}^{(0)} w_2^2 + K_{16}^{(0)} w_2^3 + \dots \\ \dots + K_{1(3n-2)}^{(0)} w_n^1 + K_{1(3n-1)}^{(0)} w_n^2 + K_{1(3n)}^{(0)} w_n^3 = -z_1 \\ w_1^2 + K_{23}^{(1)} w_1^3 + K_{24}^{(1)} w_2^1 + K_{25}^{(1)} w_2^2 + K_{26}^{(1)} w_2^3 + \dots \\ \dots + K_{2(3n-2)}^{(1)} w_n^1 + K_{2(3n-1)}^{(1)} w_n^2 + K_{2(3n)}^{(1)} w_n^3 = -z_2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$w_1^3 + K_{34}^{(2)} w_2^1 + K_{25}^{(2)} w_2^2 + K_{26}^{(2)} w_2^3 + \dots + K_{2(3n-2)}^{(2)} w_n^1 + K_{2(3n-1)}^{(2)} w_n^2 + K_{2(3n)}^{(2)} w_n^3 = -z_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$w_n^2 + K_{(3n-1)(3n)}^{(3n-2)} w_n^3 = -z_{3n-1}$$

найдем произведение узловых перемещений. Подставив их в выражение потенциальной энергии (11), определим

$$\Omega = \frac{1}{2} (w^T \hat{D} w + z^T \bar{I} z) - w^T P \quad (22)$$

где $\hat{D} = \left\| \hat{d}_{ij} \right\|$ — диагональная матрица порядка $3n$, \bar{I} — единичная матрица порядка $3n-1$,

$$\begin{aligned} z = (z_1, z_2, \dots, z_{3n-1})^T; K_{ii}^{(0)} = -K_{ii}, i \in M = \{1, 2, \dots, 3n\} \\ K_{1j}^{(0)} = -K_{1j}, j \in \{2, 3, \dots, 3n\} \\ K_{ij}^{(r)} = -K_{ij}^{(r-1)} - K_{i(j-1)}^{(r-1)} K_{ij}^{(r-1)}, r \in \bar{M} = \{1, 2, \dots, 3n-1\} \\ i \in \{r, \dots, 3n\}, j \in \{r+1, \dots, 3n\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\hat{d}_{ii} = K_{ii}^{(0)} - \sum_{s=1}^{i-1} (K_{si}^{(s)})^2 - 1, i \in \bar{M}; \hat{d}_{(3n)3n} = K_{(3n)3n}^{(0)} - \sum_{j=1}^{3n-1} (K_{i(3n)}^{(3n)})^2$$

Пусть $X = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \end{pmatrix}$ – векторы-столбцы порядка $6n-1$,

$D = \|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \hat{D} & 0 \\ 0 & \hat{I} \end{pmatrix}$ – диагональная матрица порядка $6n-1$, тогда

выражение (22) примет вид

$$\Omega = \frac{1}{2} X^T D X + C^T X$$

Обозначим через $A = (A_1, A_2, \dots, A_{6n-1})$ матрицу коэффициентов системы уравнений (16), (19) и (21), где $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{3n+m-1j})^T$. Тогда, взамен задачи (11) для определения искомого вектора X получим следующую задачу квадратичного программирования:

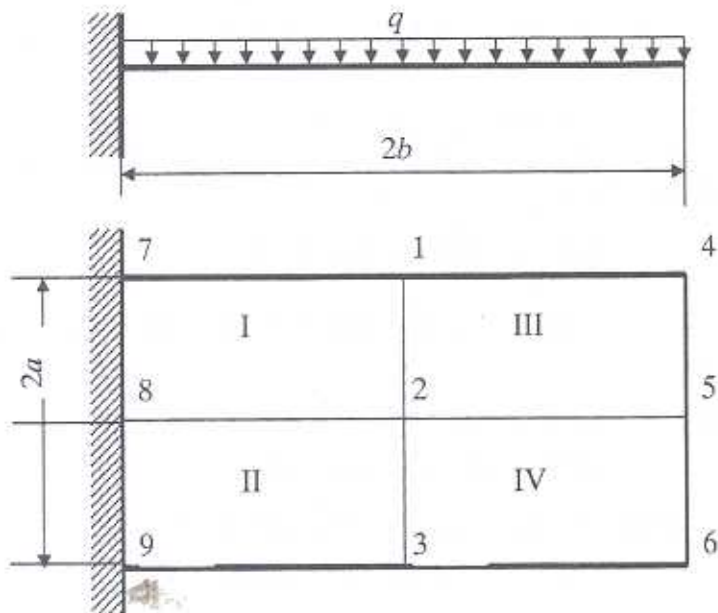
$$\min \left\{ C^T X + \frac{1}{2} X^T D X \mid AX = 0, \text{ кинематические краевые условия} \right\} \quad (24)$$

Отметим, что если в ограничения не включить систему уравнений (19), то задача (24) будет соответствовать расчету плит с "несогласующимися" элементами.

§3. Пример

Прямоугольная консольная плита (фиг. 2) загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, соотношения сторон $m = 0,5$.

По формулам (6) вычисляем компоненты матрицы жесткости s -ого прямоугольного элемента пластины. Далее, принимая $b = 1$ и $a = 2$, с учетом связей (18), находим матрицу жесткости для всей плиты, имеем



Фиг. 2

19,56	0	-8,44	-18,06	0	-8,14	0	0	0	2,22	0,64	-1,78	-2,97	0,11	-1,93	0	0	0
0	2,08	0	0	-0,08	0	0	0	0	-0,64	0,24	0	-0,11	0,26	0	0	0	0
-8,44	0	5,52	8,14	0	2,62	0	0	0	-1,78	0	1,24	1,93	0	0,69	0	0	0
-18,06	0	8,14	39,12	0	0	-18,06	0	-8,14	-2,97	0,11	1,93	4,44	1,28	0	-2,97	0,11	-1,93
0	-0,08	0	0	4,16	0	0	-0,08	0	-0,11	0,26	0	-1,28	0,48	0	-0,11	0,26	0
-8,14	0	2,62	0	0	11,04	8,14	0	2,62	-1,93	0	0,69	0	0	2,48	1,93	0	0,69
0	0	0	-18,06	0	8,14	19,56	0	8,44	0	0	0	-2,97	0,11	1,93	2,22	0,64	1,78
0	0	0	0	-0,08	0	0	2,08	0	0	0	0	-0,11	0,26	0	-0,64	0,24	0
0	0	0	-8,14	0	2,62	8,44	0	5,52	0	0	0	-1,93	0	0,69	1,78	0	1,24
2,22	-0,64	-1,78	-2,97	-0,11	-1,93	0	0	0	9,78	-0,94	-4,22	-9,03	0,19	-4,07	0	0	0
0,64	0,24	0	0,11	0,26	0	0	0	0	-0,94	1,04	0,3	0,19	-0,04	0	0	0	0
-1,78	0	1,24	1,93	0	0,69	0	0	0	-4,22	0,3	2,76	4,07	0	1,31	0	0	0
-2,97	-0,11	1,93	4,44	-1,28	0	-2,97	-0,11	-1,93	-9,03	0,19	4,07	19,56	-1,88	0	-9,03	0,19	-4,07
0,11	0,26	0	1,28	0,48	0	0,11	0,26	0	0,19	-0,04	0	-1,88	2,08	0	0,19	-0,04	0
-1,93	0	0,69	0	0	2,48	1,93	0	0,69	-4,07	0	1,31	0	0	5,52	4,07	0	1,31
0	0	0	-2,97	-0,11	1,93	2,22	-0,64	1,78	0	0	0	-9,03	0,19	4,07	9,78	-0,94	4,22
0	0	0	0,11	0,26	0	0,64	0,24	0	0	0	0	0,19	-0,04	0	-0,94	1,04	-0,3
0	0	0	-1,93	0	0,69	1,78	0	1,24	0	0	0	-4,07	0	1,31	4,22	-0,3	2,76

Исходя из формул (7) и (17), определим вектор нагрузок

$$P = -\frac{qab^2}{4} \left(-1 \ 0 \ 0 \ -2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right)^T$$

Составим условия непрерывности (19). Принимая во внимание формулы (20), найдем

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Для формирования задачи (28), исходя из вышеприведенных значений вектора P , матриц K , H и формул (27), находим вектор C и матрицы D , A . Далее, используя алгоритм решения задач квадратичного программирования, приведенный в [1], вычисляем вектор узловых перемещений. В пятом узле получим

$$w_5 = (-32,3822a \quad -10,8506 \quad -0,128794)^T \frac{qab^2}{4D} \quad (25)$$

При расчете плит с "несогласующимися" элементами соответственно получается

$$w_5 = (-33,0372a \quad -11,1172 \quad -0,436628)^T \frac{qab^2}{4D}$$

Наибольшие значения прогиба и угла поворота защемленной в одном конце балки длиной l , нагруженной равномерно распределенной по всей длине нагрузкой q , определяются формулами

$$w_{\max} = -0,125 \frac{ql^4}{D}, \quad \theta_{\max} = -0,16667 \frac{ql^3}{D} \quad (26)$$

Принимая $a = l/4$, находим эти же величины, исходя из полученного решения (25), получим

$$w_{\max} = -0,126493 \frac{ql^4}{D}, \quad \theta_{\max} = -0,169541 \frac{ql^3}{D} \quad (27)$$

Сопоставляя соответствующие значения задаваемыми формулами (26) и (27), легко увидеть, что их разность меньше двух процентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян Г.А. Об одном методе расчета усилий в элементах ферм // Известия НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. № 2. С.56-62.
2. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 940 с.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение. 1974. 384 с.

Ереванский государственный
Университет Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
9.10.2002