ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОГО ПРИКРЕПЛЕН ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ УПРУГИЙ СЛОЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Григорян Э.Х., Саркисян К.Г.

Է.Խ. Գրիգորյան, Կ.Հ. Սարգսյան

Պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումների վերաբերյալ, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է դիէլեկտրիկ առաձգական շերտ՝ դիէլեկտրիկ թափանցելիության կտոր առ կտոր հաստատուն գործակցով

Աշխատանքում ուսումնասիրված են առաձգական պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության (6mm դասի հեքսագոնալ սիմետրիայի պիեզոէլեկտրիկ) սահքային կայունացած տատանումները, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է փոքր հաստությամբ դիէլեկտրիկ առաձգական շերտ՝ դիէլեկտրիկ թափանցելիության կտոր առ կտոր հաստատուն գործակցով: Միջավայրի տատանումները առաջանում են դիէլեկտրիկ շերտի եզրային մակերևույթի վրա կիրառված տատանման գծային աղբյուրի հետևանքով: Օգտվելով Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության մեթոդից՝ խնդիրը հանգում է երկրորդ սեռի Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որը թույլ է տալիս լուծում հաջորդական մոտավորության մեթոդով: Ցույց է տրվում, որ էլեկտրական դաշտի ինդուկցիան և շոշափող լարումները դիէլեկտրիկ շերտի և պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության հպման տիրույթում ունեն վերջավոր թռիչք՝ պայմանավորված դիէլեկտրիկ թափանցելիության գործակիցների տարբերությամբ:

Ստացված են էլեկտրական դաշտի ինդուկցիայի, շոշափող լարման և տեղափոխության համար ասիմպտոտական բանաձևեր կոնտակտի տեղամասի անվերջ հեռու կետերում:

E.Kh. Grigoryan, K.H. Sargsyan

On the Shear Vibrations of Piezoelectric Half-Space, on the Boundary Surface of which a Dielectric Elastic Layer with Piecewise Constant Dielectric Permeability Coefficient Is Fixed

В работе рассматривается задача о сдвиговых установившихся колебаниях пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический слой малой толщины с кусочно-постоянным диэлектрическим коэффициентом проницаемости. Колебания среды возбуждаются с помощью линейного источника колебаний, приложенного на поверхности диэлектрического слоя. Используя метод интегрального преобразования Фурье, задача сводится к решению Фредгольмовского интегрального уравнения второго рода, допускающее решение методом последовательных приближений. Показано, что на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства индукция электрического поля и контактные напряжения на линии раздела диэлектриков имеют конечный скачок. Получены асимптотические формулы для индукции электрического поля, контактных напряжений и перемещений в далеких точках участка контакта.

Предполагаем, что упругая среда отнесена к прямоугольной декартовой координатной системе $x_1x_2x_3$. Плоскость $x_2 = 0$ является граничной поверхностью между пьезоэлектрическим полупространством и диэлектрическим слоем. Ось x_2 направлена по глубине пьезоэлектрического полупространства. Ось x_3 совпадает с осью пьезоэлектрика класса 6mm гексагональной симметрии.

Рассмотрим динамическую контактную задачу для пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический бесконечный слой малой толщиный $(k_2 h << 1)$ с кусочно-постоянным коэффициентом диэлектрической проницаемости, причем коэффициент диэлектрической проницаемости при $|x_1| > a$ есть ε_1, а при $|x_1| < a$ – ε_2. Пьезоэлектрическое полупространство и диэлектрический слой подвергаются установившемуся колебанию под действием линейного источника $P\delta(x_1)e^{-i\omega t}$, приложенного на граничной поверхности $x_2 = -h$ диэлектрического слоя, где $\delta(x_1)$ – функция Дирака, ω–частота колебаний, t–параметр времени. Считается, что граничная поверхность диэлектрика металлизирована. Задача заключается в определении индукции электрического поля на контактном участке диэлектрического слоя и пьезоэлектрического полупространства.

Обозначим упругие перемещения пьезоэлектрического полупространства и диэлектрического слоя $u_*^{(1)}(x_1, x_2, t)$, $u_*^{(2)}(x_1, x_2, t)$, а электрические потенциалы $\phi_*^{(1)}(x_1, x_2, t)$, $\phi_*^{(2)}(x_1, x_2, t)$ соответственно.

Упругие перемещения и электрические потенциалы ищем в виде:

$$u_*^{(1)}(x_1, x_2, t) = u^{(1)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad u_*^{(2)}(x_1, x_2, t) = u^{(2)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$$

$$\phi_*^{(1)}(x_1, x_2, t) = \phi^{(1)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad \phi_*^{(2)}(x_1, x_2, t) = \phi^{(2)}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$$

Тогда поставленная задача в амплитудах сводится к граничной задаче[1]:

$$\Delta u^{(1)} + k_1^2 u^{(1)} = 0, \quad \Delta\phi^{(1)} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k_1^2 u^{(1)}, \qquad -\infty < x_1 < \infty, \ 0 < x_2 < \infty \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}(x_1)}{\partial x_1^2} + k_2^2 u^{(2)}(x_1) = \frac{1}{hG_2}\left(P\delta(x_1) - \tau(x_1)\right) \qquad (2)$$

Условия контакта на $x_2 = 0$ имеют вид:

$$\begin{cases} c_{44}\left.\dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} + e_{15}\left.\dfrac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = \tau(x_1) \\ e_{15}\left.\dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} - \varepsilon_{11}\left.\dfrac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = D_1^{(2)}(x_1,0) + D_2^{(2)}(x_1,0) \\ \left.u^{(1)}\right|_{x_2=0} = u^{(2)}(x_1), \quad \left.\phi^{(1)}\right|_{x_2=0} = \left.\phi^{(2)}\right|_{x_2=0} \end{cases} \qquad (3)$$

где $\tau(x_1)$–контактное напряжение,

$$D_1^{(2)}(x_1,0) = \left(\theta(-x_1 - a) + \theta(x_1 - a)\right)D^{(2)}(x_1,0),$$

$$D_2^{(2)}(x_1,0) = \left(\theta(x_1 + a) - \theta(x_1 - a)\right)D^{(2)}(x_1,0), \quad -\infty < x_1 < \infty$$

$D^{(2)}(x_1,0) = -\varepsilon_1 \left.\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}$ при $|x_1| > a$, $D^{(2)}(x_1,0) = -\varepsilon_2 \left.\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}$ при $|x_1| < a$, $D^{(2)}(x_1,x_2)$–индукция электрического поля, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, $c_1^2 = c_{44}/\rho_1$, $k_1^2 = \omega^2/c_1^2(1+\chi^2)$, $\chi^2 = e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$ –коэффициент электромеханической связи, e_{15}–пьезоэлектрическое постоянное, ε_{11}–коэффициент диэлектрической проницаемости пьезоэлектрика, а ε_1, ε_2–коэффициенты диэлектрической проницаемости диэлектрика, ρ_1–плотность пьезоэлектрика, c_{44}–коэффициент упругости пьезоэлектрика, $c_2^2 = G_2/\rho_2$, $k_2^2 = \omega^2/c_2^2$, G_2 и ρ_2–соответственно модуль сдвига и плотность материала диэлектрического слоя.

В силу малости толщины диэлектрического слоя считается, что $D^{(2)}(x_1,x_2)$ по толщине слоя не изменяется, т.е. $D^{(2)}(x_1,x_2) = D^{(2)}(x_1,0)$, тогда в силу $\phi^{(2)}\big|_{x_2=-h} = 0$ для $\phi^{(2)}(x_1,x_2)$ будем иметь:

$$\phi^{(2)}(x_1,x_2) = \left(-\frac{1}{\varepsilon_1} D_1^{(2)}(x_1,0) - \frac{1}{\varepsilon_2} D_2^{(2)}(x_1,0)\right)(x_2+h), \quad -\infty < x_1 < \infty \tag{4}$$

Для решения уравнений (1), (2), (4) с контактными условиями (3), применим интегральное преобразование Фурье –

$$\overline{\varphi}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \quad -\infty < \sigma < \infty .$$

Получим граничную задачу:

$$\frac{d^2\overline{u}^{(1)}}{dx_2^2} - (\sigma^2 - k_1^2)\overline{u}^{(1)} = 0, \quad \frac{d^2\overline{\phi}^{(1)}}{dx_2^2} - \sigma^2\overline{\phi}^{(1)} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \cdot k_1^2 \cdot \overline{u}^{(1)} \tag{5}$$

$$\overline{u}^{(2)}(\sigma) = \frac{\overline{\tau}(\sigma) - P}{hG_2(\sigma^2 - k_2^2)}, \quad \overline{\phi}^{(2)}(\sigma;0) = -\frac{h}{\varepsilon_1}\overline{D}_1^{(2)}(\sigma;0) - \frac{h}{\varepsilon_2}\overline{D}_2^{(2)}(\sigma;0)$$

Условия контакта на $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} c_{44} \left.\dfrac{d\overline{u}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} + e_{15} \left.\dfrac{d\overline{\phi}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} = \overline{\tau}(\sigma) \\ e_{15} \left.\dfrac{d\overline{u}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} - \varepsilon_{11} \left.\dfrac{d\overline{\phi}^{(1)}}{dx_2}\right|_{x_2=0} = \overline{D}_1^{(2)}(\sigma,0) + \overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0) \\ \overline{u}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \overline{u}^{(2)}(\sigma), \quad \overline{\phi}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \overline{\phi}^{(2)}\big|_{x_2=0} \end{cases} \tag{6}$$

Выше имелось в виду, что контур вдоль действительной оси обходит точку $\sigma = -k_2$ сверху, а точку $\sigma = k_2$ снизу.

Решая эту граничную задачу и удовлетворяя условиям уходящей волны, получим функциональное уравнение:

$$\left(\chi^2|\sigma| - \left(1+\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_1}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\right)\cdot\overline{D}_1^{(2)}(\sigma,0)+ \tag{7}$$

$$\left(\chi^2|\sigma| - \left(1+\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_2}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\right)\cdot\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0) = -\frac{Pe_{15}}{c_{44}}|\sigma|$$

После этого, имея в виду функциональное уравнение (7), для упругого перемещения, электрического потенциала в пьезоэлектрике и контактных напряжений получим:

$$\overline{u}^{(1)}(\sigma,x_2) = \frac{P/c_{44}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)+e_{15}/c_{44}\cdot\left(1-\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)h|\sigma|\cdot\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}x_2} \tag{8}$$

$$\overline{\varphi}^{(1)}(\sigma,x_2) = \frac{\frac{-Pe_{15}\varepsilon_1}{c_{44}\varepsilon_{11}}-\left(1-\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)/h\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\cdot\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}e^{-|\sigma|x_2}+$$

$$+\frac{Pe_{15}/\varepsilon_{11}c_{44}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)+\chi^2\left(1-\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)h|\sigma|\cdot\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}\cdot e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}x_2} \tag{9}$$

Чтобы удовлетворялись условия уходящей волны, однозначная ветвь функции $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}$ выбрана таким образом, чтобы $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$ и $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}=-i\sqrt{k_1^2-\sigma^2}$. При этом контур вдоль действительной оси обходит точку ветвления $\sigma=-k_1$ сверху, а точку $\sigma=k_1$ снизу [2].

$$\overline{\tau}(\sigma) = \frac{P\left(\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(1+\chi^2\right)\cdot\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\right)+\frac{e_{15}G_2}{c_{44}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)h^2|\sigma|\left(\sigma^2-k_2^2\right)\cdot\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]} \tag{10}$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (7).

Для решение функционального уравнения (7) перепишем его в виде:

$$\overline{D}_1^{(2)}(\sigma,0)+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0) = \left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\overline{K}(\sigma)\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0)-\overline{S}(\sigma) \tag{11}$$

где

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{\varepsilon_1\left(\chi^2|\sigma|-\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\right)}{\left(\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\right)}$$

$$\overline{S}(\sigma)=\frac{Pe_{15}\varepsilon_1|\sigma|}{c_{44}\left(\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]\right)}$$

Далее приступим к исследованию знаменателя $\overline{K}(\sigma)$, $\overline{S}(\sigma)$:

$$\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\frac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]=f(\sigma)$$

Легко видеть, что при $k_2>k$ $\left(k^2=\dfrac{\omega^2}{c_1^{\ 2}}\right)$ и при любых значениях χ $f(k_1)>0$, $f(k_2)<0$. Кроме того, $\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}<0$ при $\sigma>k_1$ и при любых значениях χ.

Из этого следует, что в интервале $k_1<\sigma<k_2$ функция $f(\sigma)$ имеет единственный нуль $\sigma=\sigma_0$. Из-за четности функции $f(\sigma)$ следует, что $\sigma=-\sigma_0$ в интервале $-k_1<\sigma<-k_2$ также является нулем этой функции. Чтобы удовлетворялись условия уходящей волны, контур вдоль действительной оси должен обходить точку $\sigma=-\sigma_0$ сверху, а точку $\sigma=\sigma_0$ –снизу. Из вышесказанного следует, что существует электроупругая поверхностная волна Лява, которая распространяется со скоростью $C_L=\omega/\sigma_0$.

Применив к уравнению (11) обратное преобразование Фурье и пользуясь теоремой о свертке, будем иметь:

$$D_1^{(2)}(x_1,0)+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D_2^{(2)}(x_1,0)=\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\int_{-a}^{+a}K(|x_1|-l)D^{(2)}(l,0)dl-S(x_1)$$

$$K(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{K}(\sigma)e^{-i\sigma x_1}d\sigma,\ S(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{S}(\sigma)e^{-i\sigma x_1}d\sigma\quad -\infty<x_1<\infty$$

Требуя, чтобы $|x_1|\le a$, для определения $D^{(2)}(x_1,0)$ получим Фредгольмовское интегральное уравнение второго рода:

$$D^{(2)}(x_1,0)=\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\int_{-a}^{+a}K(|x_1|-l)D^{(2)}(l,0)dl-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}S(x_1)\quad \text{при } |x_1|\le a \quad (12)$$

допускающее решение методом последовательных приближений в пространстве непрерывных функции $C[-a;a]$ при

$$\left|\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right|\max_{|x_1|\le a}\int_{-a}^{+a}\left|K(|x_1|-l)D^{(2)}(l,0)\right|dl<1.$$

После определения $D^{(2)}(x_1,0)$ при $|x_1|\le a$ её значение $|x_1|\ge a$ определится по формуле:

$$D^{(2)}(x_1,0)=\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\int_{-a}^{+a}K(|x_1|-l)D^{(2)}(l,0)dl-S(x_1)\ \text{при}\ |x_1|\ge a \tag{13}$$

Поскольку $\overline{K}(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$ имеет порядок $|\sigma|^{-1}$, то из свойств интеграла Фурье следует, что $K(|x_1|-l)$ при $x_1=l$ имеет логарифмическую особенность, поскольку $\widetilde{F}^{-1}\left(|\sigma|^{-1}\right)=-\frac{1}{\pi}\ln|x_1|+\mathrm{const}$, где F – обобщенное преобразование Фурье, F^{-1} – обратное преобразование Фурье. Что касается $S(x_1)$, то она непрерывная функция, поскольку $\overline{S}(\sigma)$ абсолютно интегрируемая функция.

В силу вышесказанного следует, что функция $D_1^{(2)}(x_1,0)+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D_2^{(2)}(x_1,0)$ в точках $x_1=\pm a$ непрерывна. Следовательно, функция $D^{(2)}(x_1,0)=D_1^{(2)}(x_1,0)+D_2^{(2)}(x_1,0)$ в точках $x_1=\pm a$ может иметь конечный скачок, поскольку $D^{(2)}(a+0;0)=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D^{(2)}(a-0;0)$,

$$D^{(2)}(-a-0;0)=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D^{(2)}(-a+0;0)\ \text{при}\ \varepsilon_1\neq\varepsilon_2.$$

Исходя из функционального уравнения, в силу вышесказанного $D_1^{(2)}(x_1,0)+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D_2^{(2)}(x_1,0)$ можно представить в виде:

$$D_1^{(2)}(x_1,0)+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D_2^{(2)}(x_1,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\overline{g}(\sigma)-\frac{2A\sigma_0}{\sigma^2-\sigma_0^2}\right)e^{-i\sigma x_1}d\sigma+iAe^{i\sigma_0|x_1|} \tag{14}$$

где $-\infty<x_1<\infty$, а A является вычетом $\overline{g}(\sigma)$ и определяется в следующем виде:

$$A=\frac{\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_{11}\chi^2h\sigma_0^2}{\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h\sigma_0}\cdot\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)D_2^{(2)}(\sigma_0,0)-\dfrac{Pe_{15}}{c_{44}}\sigma_0}{f'(\sigma)\big|_{\sigma=\sigma_0}}$$

$$\overline{g}(\sigma)=\frac{\left(\varepsilon_1\chi^2|\sigma|-\varepsilon_1\left[(1+\chi^2)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\dfrac{G_2h}{c_{44}}(\sigma^2-k_2^2)\right]\right)\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)D_2^{(2)}(\sigma,0)-\dfrac{Pe_{15}}{c_{44}}|\sigma|}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|)\left[(1+\chi^2)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\dfrac{G_2h}{c_{44}}(\sigma^2-k_2^2)\right]}$$

Если учесть, что функция $D^{(2)}(x_1,0)$ принимает при $x_1=0$ конечное значение, то в силу свойств интеграла Фурье можно заключить, что $\overline{D}_2^{(2)}(\sigma,0)$ имеет порядок $\dfrac{2\sin a\sigma}{\sigma}$ при $|\sigma|\to\infty$. Тогда легко видеть, что $\overline{g}(\sigma)-\dfrac{2A\sigma_0}{\sigma^2-\sigma_0^2}$ и $\dfrac{d}{d\sigma}\left(\overline{g}(\sigma)-\dfrac{2A\sigma_0}{\sigma^2-\sigma_0^2}\right)$ – абсолютно интегрируемые функции $(-\infty<\sigma<\infty)$. И после интегрирования по частям, можно убедиться, что интегральный член в выражении $D_1^{(2)}(x_1,0)+\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D_2^{(2)}(x_1,0)$ при $|x_1|\to\infty$ имеет порядок $o\left(x_1^{-1}\right)$. Таким образом, для $\overline{D}^{(2)}(\sigma,0)$ получим асимптотическую формулу:

$$D^{(2)}(x_1,0)=iAe^{i\sigma_0|x_1|}+o\left(x_1^{-1}\right)\ |x_1|\to\infty \tag{15}$$

Теперь приступим к исследованию $\tau(x_1)$. Для этого $\tau(x_1)$ запишем в виде:

$$\tau(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{L}(\sigma)e^{-i\sigma x_1}d\sigma+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)D_2^{(2)}(x_1,0)$$

где

$$\overline{L}(\sigma)=\frac{P\left(\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(1+\chi^2\right)\cdot\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\right)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\dfrac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}-$$

$$-\frac{\dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\left\{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(1+\chi^2\right)\cdot\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}-\varepsilon_1\dfrac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right\}D_2^{(2)}(\sigma_0,0)}{\chi^2\varepsilon_1|\sigma|-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h|\sigma|\right)\left[\left(1+\chi^2\right)\sqrt{\sigma^2-k_1^2}+\dfrac{G_2h}{c_{44}}\left(\sigma^2-k_2^2\right)\right]}$$

Нетрудно убедиться, что интегральный член является непрерывной функцией в точках $x_1=\pm a$, значит $\tau(x_1)$ в точках $x_1=\pm a$ может иметь конечный скачок, как и функция $D_2^{(2)}(x_1,0)$. Далее поступая, как и выше, для $\tau(x_1)$ получим асимптотическую формулу:

$$\tau(x_1)=iBe^{i\sigma_0|x_1|}+o\left(x_1^{-1}\right),\ |x_1|\to\infty \tag{16}$$

$$B=\frac{P\left(\varepsilon_1+\varepsilon_{11}h\sigma_0\right)\dfrac{G_2h}{c_{44}}\left({\sigma_0}^2-k_2^2\right)-\dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\left\{\sigma_0\dfrac{G_2h^2}{c_{44}}\left({\sigma_0}^2-k_2^2\right)\right\}D_2^{(2)}(\sigma_0,0)}{f'(\sigma)\big|_{\sigma=\sigma_0}}$$

Представляет интерес также получение поведения $\tau(x_1)$ при $|x_1| \to 0$. Так как функция $\overline{L}(\sigma)$ при $|\sigma| \to \infty$ имеет вид $\overline{L}(\sigma) = \dfrac{E}{|\sigma|} + o(\sigma^{-1})$, то в силу свойств интеграла Фурье будем иметь: $\tau(x_1) = -\dfrac{E}{\pi}\ln|x_1| + O(1)$, $|x_1| \to 0$,

$$E = \frac{(1+\chi^2)c_{44}P}{G_2 h}.$$

Асимптотическая формула для перемещения $u^{(1)}(x_1,0)$ имеет вид:

$$u^{(1)}(x_1,0) = iCe^{i\sigma_0|x_1|} + o(x_1^{-1}) \text{ при } |x_1| \to \infty$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука. 1982. 240с.
2. Нобл Б. Метод Винера Хопфа. М.: ИЛ. 1962. 279с.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
29.01.2004