

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА С
ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЕННЫМИ НАКЛАДКАМИ
Алексян Р.К., Едоян В.А., Овакимян А.С., Саркисян В.Г.

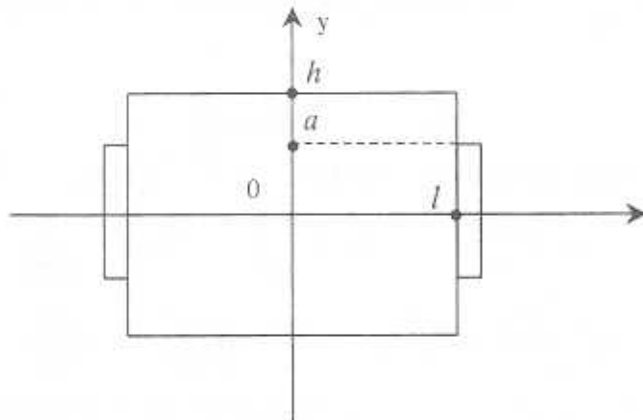
Ռ.Կ. Ալեքսանյան, Վ.Վ. Եդոյան, Ա.Ս. Նովակիմյան, Վ.Գ. Սարգսյան
Նախապես լարված վերադիրներով ուղղանկյան հարթ խնդիրը

Դիտարկված է ուղղանկյան հանար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը, երբ ուղղանկյունը ենթարկված է իր երկու զուգահեռ եզրերով համաչափ դասավորված և նախապես լարված վերադիրների ազդեցությանը: Վերադիրը և ուղղանկյան նյութերը ունեն տարբեր ֆիզիկա-մեխանիկական հատկություններ: Խնդիրը ընդված է քվադր-լիմին սեգույար անվերջ հավասարումների համակարգի: Մտազգված են լարումների և տեղափոխությունների արտահայտությունները անբողջ սփրոյթում: Վերադիրի ծայրակետերի շրջակայքերում անջատված են շոշափող լարումների եզակիության գործակիցները:

R.K. Aleksanyan, V.H. Yedoyan, A.S. Hovakimyan, V.H. Sargsyan
Plane problem for rectangle with previously strained cover plates

Рассмотрена плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда прямоугольник подвергнут воздействию предварительно напряженных накладок, симметрично расположенных по двум параллельным краям прямоугольника. Материалы, накладка и прямоугольник имеют разные физико-механические свойства. Задача приведена к квазивполне регулярной системе бесконечных уравнений. Получены выражения напряжений и перемещений. Выделены коэффициенты особенностей касательных напряжений в окрестности краевых точек накладки.

1. Рассматривается плоская задача теории упругости, когда прямоугольник подвергается воздействию симметрично расположенных по двум своим параллельным краям предварительно напряженных накладок (фиг. 1).



фиг. 1

Для накладок принимаются известные предположения. Тонкие упругие элементы не оказывают сопротивления при изгибных деформациях и находятся в одномерном напряженном состоянии. Применяв эту гипотезу, был решен ряд задач, из которых отметим [1-4].

Материалы накладок и прямоугольника имеют разные физико-механические свойства.

Задача о напряженно-деформационном состоянии прямоугольника приводится к следующей краевой задаче для функции напряжений.

$$\Delta \Delta \phi = 0 \quad (1.1)$$

На линиях $x = 0$ и $y = 0$ удовлетворяются условия симметрии.

$$\tau_{xy}(x;0) = \tau_{xy}(0;y) = 0 \quad (1.2)$$

$$V(x;0) = U(0;y) = 0$$

на краю $y = h$

$$\tau_{xy}(x;h) = 0 \quad (1.3)$$

$$\sigma_y(x;h) = 0 \quad (1.4)$$

на краю $x = l$ при наличии частично-прикрепленной накладки имеем следующие граничные условия :

$$\sigma_x(l,y) = 0 \quad 0 < y < h \quad (1.5)$$

$$\tau_{xy}(l,y) = 0 \quad a < y < h \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{x=l} = \mu \int_y^a \tau_{xy} \Big|_{x=l} dy - \varepsilon_0 \quad 0 < y < a \quad (1.7)$$

где ε_0 — предварительная деформация на концах накладки, $\mu = \frac{1}{h_1 E_1}$,

h_1 — ширина накладки, E_1 — модуль упругости накладки.

2. Функция напряжений представляется в виде [5]

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = & \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k y) \cos \alpha_k x + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (E_k \operatorname{ch} \beta_k x + H_k \beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x) \cos \beta_k y + t_1 x^2 + t_2 y^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{h}$$

Напряжения и перемещения определяются формулами

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.2)$$

$$EU = \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad EV = \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.3)$$

где E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала прямоугольника.

Краевые условия (1.2) удовлетворяются тождественно:

Удовлетворяя условиям (1.3), (1.4) и (1.5), получаем следующие соотношения:

$$(A_k + D_k) \text{sh} \alpha_k h + \alpha_k h \text{ch} \alpha_k h D_k = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{\eta_p}{\sqrt[4]{p^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt[4]{k^3} x_k^{(1)}}{k^2 + \eta_p^2} + \frac{4}{\pi} \frac{\eta_p^3}{\sqrt[4]{p^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt[4]{k^3} x_k^{(2)}}{(k^2 + \eta_p^2)^2} + (-1)^p y_p^{(1)} M_p = 0$$

$$\frac{4\gamma_p^3}{\sqrt[4]{p^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt[4]{k^3} y_k^{(1)}}{(k^2 + \eta_p^2)^2} - (-1)^p x_p^{(1)} \text{cth} \gamma_p \pi + (-1)^p x_p^{(2)} N_p = 0 \quad (2.5)$$

$$2t_1 = -\frac{h}{l\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x_k^{(1)}}{k \sqrt[4]{k}}; \quad t_2 = 0$$

где

$$\eta_p = \frac{h}{l} p; \quad \gamma_p = \frac{l}{h} p; \quad M_p = \text{cth} \eta_p \pi + \frac{\eta_p \pi}{\text{sh}^2 \eta_p \pi}; \quad N_p = \text{cth} \gamma_p \pi + \frac{\gamma_p \pi}{\text{sh}^2 \gamma_p \pi}$$

$$\sqrt[4]{k} \cdot \alpha_k^2 D_k \text{sh} \alpha_k h = y_k^{(1)}; \quad \sqrt[4]{k} \cdot \beta_k^2 H_k \text{sh} \beta_k l = x_k^{(2)} \quad (2.6)$$

$$\sqrt[4]{k} \cdot \beta_k^2 [(E_k + H_k) \text{sh} \beta_k l + H_k \beta_k l \text{ch} \beta_k l] = x_k^{(1)}$$

Удовлетворяя смешанным краевым условиям (1.6) и (1.7), получаем парные уравнения [6]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^{(1)}}{\sqrt[4]{k}} \cos k\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k^{(1)} \cos k\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)} x_k^{(2)} \cos k\gamma + \quad (2.7)$$

$$+ \frac{E\mu h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^{(1)}}{k \sqrt[4]{k}} \cos k\gamma_1 - \varepsilon_0 E + 2t_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{y_k^{(1)}}{\sqrt[4]{k}} f_k(k\gamma) \quad 0 < \gamma < \gamma_1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^{(1)}}{\sqrt[4]{k}} \sin k\gamma = 0 \quad \gamma_1 < \gamma \leq \pi$$

где

$$a_k = \frac{1}{\sqrt[4]{k}} (1 - \text{cth} \gamma_k \pi), \quad M_k^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt[4]{k}} \left(\text{cth} \gamma_k \pi - \frac{\gamma_k \pi}{\text{sh}^2 \gamma_k \pi} \right) \quad (2.8)$$

$$f_k(k\gamma) = \frac{1}{\text{sh} \eta_k \pi} \left(\text{ch} k\gamma + \frac{\eta_k \pi \text{ch} \eta_k \pi \text{ch} \eta_k \gamma - \eta_k \gamma \text{sh} \eta_k \gamma \text{sh} \eta_k \pi}{\text{sh} \eta_k \pi} \right)$$

Заменой переменной $\gamma = \frac{\pi}{h} y$, интервал $y \in [0; h]$ отображается на интервал $y \in [0, \pi]$. Воспользуясь решением уравнений парных рядов, относительно неизвестного $x_p^{(1)}$ получаем :

$$x_p^{(1)} = \frac{p \sqrt[4]{p}}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k^{(1)} I_{kp} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)} x_k^{(2)} I_{kp} + \sum_{k=1}^{\infty} (1)^k \frac{V_{kp}}{\sqrt[4]{k}} y_k^{(1)} + \right. \\ \left. + \frac{E\mu h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^{(1)} \cos k\gamma_1}{k \sqrt[4]{k}} - 2(\varepsilon_0 E - 2t_1) \frac{Z_p(\cos \gamma_1)}{p} \right\} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{kp} &= \int_0^{\gamma_1} Y_k(\cos \theta) Y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
 V_{kp} &= \int_0^{\gamma_1} Y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} g_k(\cos \theta) d\theta \\
 g_k(\cos \theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{f_k(k\gamma) \cos \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} d\gamma
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{h} a, \quad Y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \quad Z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x) \quad |x| \leq 1$$

$P_k(x)$ — многочлен Лежандра.

Для функций (2.10) составим интегралы Ломмела:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Y_k(x) Y_p(x)}{1+x} dx &= -\frac{kZ_k Y_p - pZ_p Y_k}{k^2 - p^2} \\
 \int \frac{Y_k(x) g_k(x)}{1+x} dx &= -\frac{\eta_k F_k(x) + pZ_p(x) g_k(x)}{\eta_k^2 - p^2} + \\
 &+ \frac{\eta_k^2}{(\eta_k^2 + p^2)^2} (\eta_k L_k(x) Y_p(x) + pZ_p(x) l_k(x))
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_k(\cos \theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{H_k(k\gamma) \sin(\gamma/2)}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} d\gamma \\
 H_k(k\gamma) &= \frac{\eta_k \pi \operatorname{ch} \eta_k \pi \operatorname{sh} \eta_k \gamma - \eta_k \gamma \operatorname{ch} \eta_k \gamma \operatorname{sh} \eta_k \pi}{\operatorname{sh}^2 \eta_k \pi}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$L_k(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{2 \operatorname{sh} \eta_k \gamma}{\operatorname{sh} \eta_k \pi} \frac{\sin(\gamma/2)}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} d\gamma$$

$$l_k(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{2 \operatorname{ch} \eta_k \gamma}{\operatorname{sh} \eta_k \pi} \frac{\cos(\gamma/2)}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} d\gamma$$

Для вычисления значений функций $g_k(\cos \theta)$, $F_k(\cos \theta)$, $L_k(\cos \theta)$ и $l_k(\cos \theta)$ эти функции представим в виде рядов функций $Y_m(\cos \theta)$ и $Z_m(\cos \theta)$

$$\begin{aligned}
 g_k(\cos \theta) &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{\eta_k} + \frac{4\eta_k^3}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m Y_m(\cos \theta)}{(m^2 + \eta_k^2)^2} \\
 F_k(\cos \theta) &= -\frac{4}{\pi} \eta_k^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(-1)^m}{(m^2 + \eta_k^2)^2} Z_m(\cos \theta)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$L_k(\cos \theta) = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 + \eta_k^2} Z_m(\cos \theta)$$

$$l_k(\cos \theta) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\eta_k} + \frac{4}{\pi} \eta_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 + \eta_k^2} Y_m(\cos \theta)$$

Вспользуясь

$$Y_k(-1) = Z_k(1) = 0; \quad Y_k(1) = (-1)^{k+1} Z_k(-1) = 2 \quad (2.14)$$

Получаем

$$g_k(1) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\eta_k} + \frac{4\eta_k^3}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{(m^2 + \eta_k^2)^2}$$

$$F_k(1) = 0; \quad L_k(1) = 0 \quad (2.15)$$

$$l_k(1) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\eta_k} + \frac{4}{\pi} \eta_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{m^2 + \eta_k^2}$$

Выясним поведение этих функций для больших значений индекса k . Для получения асимптотических разложений $g_k(\cos \theta)$, $F_k(\cos \theta)$, $L_k(\cos \theta)$ и $l_k(\cos \theta)$, воспользуясь методом перевала [7] для

$$l_k(\cos \theta) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} e^{-k\theta} \int_0^{\theta} \frac{e^{k\gamma} \cos(\gamma/2)}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} d\gamma \quad (2.16)$$

получим

$$l_k(\cos \theta) = \frac{e^{-k(\pi-\theta)}}{\pi} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{k \operatorname{tg}(\theta/2)}} + (k^{-3/2}) \right\} \quad (2.17)$$

$$l_k(\cos \theta), g_k(\cos \theta), F_k(\cos \theta), L_k(\cos \theta) \sim O(\sqrt{k} e^{-k(\pi-\theta)})$$

при $0 < \theta < \pi$ (2.18)

$$Y_k(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad Z_k = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad \text{при } |x| < 1 - \varepsilon$$

на основании которых для коэффициентов бесконечных систем (2.5) и (2.9) имеем следующие оценки:

$$\frac{2}{\pi} \frac{\eta_p}{\sqrt[4]{p^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{k^3}}{k^2 + \eta_p^2} + \frac{4}{\pi} \frac{\eta_p^3}{\sqrt[4]{p^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{k^3}}{(k^2 + \eta_p^2)^2} = O(p^{-\frac{1}{4}})$$

$$\frac{4\gamma_p^3}{\sqrt[4]{p^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{k^3}}{(k^2 + \eta_p^2)^2} = O(p^{-\frac{1}{4}}) \quad (2.19)$$

$$\frac{p^4 \sqrt{p}}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k I_{kp}| + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)} I_{kp} + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{V_{kp}}{\sqrt[4]{k}} \right| + \frac{E\mu h}{\pi} \sum \left| \frac{\cos k\gamma_1}{k\sqrt{k}} \cdot \frac{Z_p(\cos \gamma_1)}{p} \right| \right) = O(p^{-\frac{1}{4}})$$

Следовательно, бесконечные системы уравнений (2.5) и (2.9) квазивполне регулярны.

Для контактного касательного напряжения получается выражение в виде слабо сходящегося ряда в конце линии контакта.

При $x = l$

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^{(1)}}{\sqrt[4]{k}} \sin \beta_k y \quad (2.20)$$

Подставляя значение $x_k^{(1)}$ из (2.9) в (2.20) и используя значение ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} Z_p(\cos \gamma_1) \sin p\gamma = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} \sin(\gamma/2)}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \gamma_1}} & \gamma < \gamma_1 \\ 0 & \gamma > \gamma_1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Для τ_{xy} при $x = l$ получаем выражение с выделенной особенностью в конце линии контакта.

$$\tau_{xy} \Big|_{x=l} = \frac{-\sqrt{2} \sin(\gamma/2)}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \gamma_1}} R + F(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_k^{(1)}, \gamma, \gamma_1) \quad (2.22)$$

где

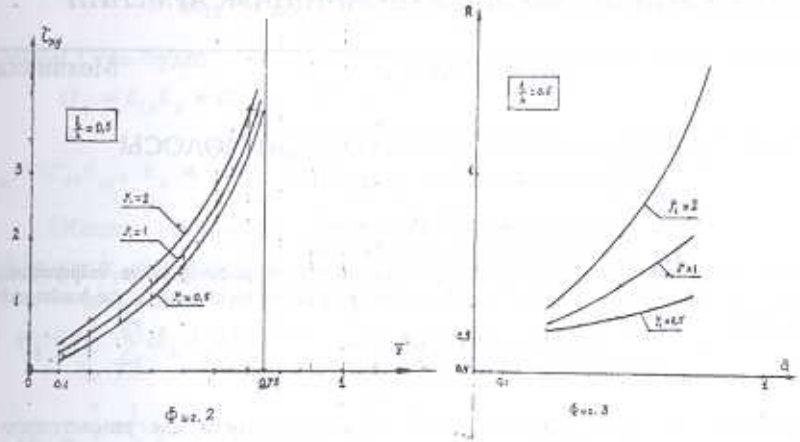
$$R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k(\cos \gamma_1) x_k^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)} y_k(\cos \gamma_1) x_k^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k(\cos \gamma_1) y_k^{(2)} + (\epsilon_0 E + 2t_1) \quad (2.23)$$

$$F(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_k^{(1)}, \gamma, \gamma_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k x_k^{(1)} + M_k^{(1)} x_k^{(2)}) k \sin(\gamma/2) \int_{\gamma}^{\gamma_1} \frac{Z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg}(\theta/2)}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} d\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \eta_k y_k^{(1)} \sin(\gamma/2) \int_{\gamma}^{\gamma_1} \frac{F_k(\cos \theta) \operatorname{ctg}(\theta/2)}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta}} d\theta$$

При некоторых значениях параметра $\mu_1 = \frac{Eh}{E_1 h_1}$ приведены графики

касательного напряжения на линии контакта в зависимости от $\bar{y} = y/h$, $0 \leq y < a$ и коэффициента особенности касательного напряжения в конце накладки в зависимости от отношения $\bar{a} = a/h$, (фиг. 2 и 3).

Из приведенных расчетов выясняется, что увеличение параметра μ приводит к увеличению значений контактного касательного напряжения и коэффициента особенности, как при конкретных значениях параметров \bar{a} и \bar{y} , а также при их увеличении.



ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein. Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.// Ingr.Arch. 1932. Bd.3. №2. P. 123-129.
2. Theocaris P.S., Dafermos K. The elastic strip under mixed boundary conditions // J. Appl. Mech., ser. E. 1964, V. 31. №4. P. 159-162.
3. Чобанян К.С., Хачикян П.С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1967. Т. XX. №6. С.19-29.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 488с.
5. Абрамян Б.Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. // ПММ. 1957. 21. Вып. 1. С.89-101.
6. Баблоян А.А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С.678-689.
7. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Изд. Наука, 1970. 304с.

Ереванский госуниверситет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
26.03.2004