ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 534.1, 539.1

К УПРАВЛЕНИЮ ДВИЖЕНИЕМ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ

Габриелян М.С., Мовсисян Л.А.

Մ.Ս. Գաբրիելյան, Լ.Ա. Մովսիսյան

Առաձգամածուցիկ հեծանի շարժման ղեկավարման մասին

Դիտարկվում է առաձգամածուցիկ (Մաքսվելի և Մաքսվել-Թամսոնի մոդելներ) հեծանի ղեկավարման խնդիրը: Օպտիմիզացման հարցը դրվում է սովորական ձևով և խնդիրը լուծվում է մոմենտների պրոբլեմի միջոցով: Սակայն ի տարբերություն առաձգական խնդիրներից, այստեղ օպտիմալ բեռները որոշվում են հաստատուն գումարելիների ճշտությամբ, որի համար անհրաժեշտ է լինում դարձյալ կատարել մինիմիզացիա:

M.S.Gabrielyan, L.A.Movsisyan

On Control of Motion of Viscoelastic beam

В работах [1-3 и др.] были рассмотрены задачи управления движением упругих систем в различных постановках. В настоящей статье изучается задача управления наследственно-упругих систем (на примере балки и для всех деформируемых систем, уравнения движением которых допускает разделения переменных, решения строятся аналогичным образом). Задачи для систем с наследственно-упругими свойствами принципиально отличаются от [1-3] не только техникой их решения, но и разнообразием понятия оптимальности. В отличие от упругих задач, когда для заданного времени требуется, чтобы перемещения и скорость принимали определенные значения, для наследственно-упругих систем вследствие ползучести материала необязательно, чтобы интервалы действия нагрузки и желаемого результата совпадали. Так что возможны различные постановки, однако здесь изучается лишь один вариант, аналогичный упругой задаче.

Задача решается с помощью проблемы моментов [4]. Однако в отличие от предыдущих задач, здесь управляющая нагрузка определяется с точностью произвольных постоянных, так что их можно определить, исходя из каких-то соображений целесообразности или еще раз из минимальных условий.

1.Уравнение движения балки возьмем в виде

$$\tilde{E}J\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q(x,t) \tag{1.1}$$

здесь $\tilde{E}$ – оператор и будем изучать два вида материалов:

а) материал с затухающей памятью, в частности, материал Томпсона-Максвелла

$$\tilde{E}u=E\left[u-\frac{E-H}{En}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)}u(\tau)d\tau\right] \tag{1.2}$$

здесь E – мгновенный модуль упругости, H – длительный модуль, n – время релаксации,

б) материал с памятью типа Максвелла – в (1.2) отсутствует H.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$\Gamma=\frac{E-H}{En},\quad \frac{1}{n}=\kappa \tag{1.3}$$

для второго материала $\Gamma=\kappa$.

В (1.1) под $q(x,t)$ подразумевается сумма двух величин: заданная действующая нагрузка $q^{(0)}(x,t)$ и искомая $q^{(1)}(x,t)$ нагрузка, которая оптимальным образом управляет движением объекта. Причем, не обязательно, чтобы интервалы действия $q^{(0)}$ и $q^{(1)}$ совпадали и были расположены по всей длине балки.

К уравнению (1.1) должны быть присоединены еще начальные условия

$$w = \Psi_1(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \Psi_2(x) \text{ при } t = 0 \tag{1.4}$$

Вопрос ставится обычным образом: в момент времени $t = t_1$ движение (1.1) с начальными условиями (1.4) привести к заданному положению и скорости

$$w = \Psi_3(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \Psi_4(x) \text{ при } t = t_1 \tag{1.5}$$

при этом минимизируя некоторый функционал (подробно об этом чуть позже).

2. Если перейти к безразмерным координатам $\xi = x/l$, $\tau = at/l$, $a = (E/\rho)^{1/2}$ и искать решение (1.1) в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) X_m(\xi) \tag{2.1}$$

где $X_m(\xi)$ – фундаментальные (собственные) функции соответствующей однородной задачи (по этим функциям разлагаются также $q(\xi,\tau)$ и условия (1.4), (1.5)), то для $f_m(\tau)$ будем иметь

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \omega_m^2 \left[f_m - \Gamma \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\kappa(\tau-\theta)} f_m(\theta) d\theta \right] = q_m(\tau) \tag{2.2}$$

здесь $\omega_m^2 = \dfrac{EJ}{\rho S} k_m^4$ – собственные частоты упругой балки, k_m – собственные значения соответствующей однородной задачи.

Преобразованные условия (1.4) и (1.5) для (2.2) соответственно будут

$$\begin{aligned} &f_m(0) = \psi_m^{(1)}, \qquad f_m(0) = \psi_m^{(2)} \\ &f_m(\tau) = \psi_m^{(3)}, \qquad f_m(\tau) = \psi_m^{(4)}, \qquad T = at_1/l \end{aligned} \tag{2.3}$$

Вместо интегродифференциального уравнения (2.2) исключением интегрального члена можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} &\frac{d^3 f_m}{d\tau^3} + \kappa \frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \omega_m^2 \frac{df_m}{d\tau} + \omega_m^2 (\kappa - \Gamma) f_m = F_m \\ &F_m = F_m^{(0)} + F_m^{(1)} = \left(\frac{dq_m^{(0)}}{d\tau} + \kappa q_m^{(0)} \right) + \left(\frac{dq_m^{(1)}}{d\tau} + \kappa q_m^{(1)} \right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Теперь к первым условиям (2.3) должны быть добавлены

$$\ddot{f}_m(0) = \psi_m^{(5)} = -\omega_m^2 \psi_m^{(1)} \tag{2.5}$$

В дальнейшем, там, где не создается путаница, для краткости индексы m будем опускать.

В случае а) характеристическое уравнение для (2.4) имеет один действительный и два комплексных (сопряженных) корня, причем действительная часть отрицательна

$$\begin{gathered} p_1 = -2\sqrt{\frac{a}{3}}\operatorname{ctg} 2\varepsilon = \alpha < 0 \\ p_{2,3} = \sqrt{\frac{a}{3}}\left(\operatorname{ctg} 2\varepsilon \pm i\sqrt{3}\operatorname{cosec} 2\varepsilon\right) = \beta \pm i\gamma, \quad (\beta < 0,\ \gamma > 0) \\ \operatorname{tg} 2\varepsilon = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}, \quad \left(|\varepsilon| \le \frac{\pi}{4}\right), \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{2}{b}\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}, \quad \left(|\delta| \le \frac{\pi}{2}\right) \\ a = \omega^2 - \frac{\kappa^2}{3}, \quad b = 2\left(\frac{\kappa}{3}\right)^3 - \frac{\kappa\omega^2}{3} + \omega^2(\kappa - \Gamma) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Для случая б) $(\kappa = \Gamma)$ корни характеристического уравнения суть

$$\begin{gathered} p_1 = 0, \quad p_{2,3} = \beta \pm i\gamma \\ \beta = -\frac{\kappa}{2}, \quad \gamma = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} \end{gathered} \tag{2.7}$$

Поставленную задачу будем решать с помощью проблемы моментов [4].

В качестве минимизируемого функционала будем изучать два случая:

а) можно минимизировать квадратичный функционал от искомой нагрузки $q^{(1)}(x,t)$, т.е.

$$I_1 = \int_0^T\int_0^1 \left[q^{(1)}(\xi,\tau)\right]^2 d\xi d\tau \tag{2.8}$$

Учитывая, что фундаментальные функции $X_m(\xi)$ ортогональны и $q_m^{(1)}(\tau)$ независимы, минимизация функционала (2.8) равносильна минимизации

$$\mathrm{I}_m^{(1)} = \int_0^T \left[q_m^{(1)}(\tau)\right]^2 d\tau \tag{2.9}$$

б) так как в дифференциальном уравнении правая часть есть $F = F^{(0)} + F^{(1)}$, по аналогии (2.8) можно минимизировать $F^{(1)}$, которая приводит к условиям типа (2.9), т.е

$$\mathrm{I}_m^{(2)} = \int_0^T \left[F_m^{(1)}(\tau)\right]^2 d\tau = \int_0^T \left[\frac{dq_m^{(1)}}{d\tau} + \kappa q_m^{(1)}\right]^2 d\tau \tag{2.10}$$

3.Построим теперь фундаментальную матрицу. Для первого материала

$$y_{11}=\frac{1}{\Delta}\left\{\sigma Y_1+Y_2\left[\alpha(\alpha-2\beta)Y_4-\frac{\alpha}{\gamma}\left(\gamma^2-\beta\alpha+\beta^2\right)Y_3\right]\right\}$$

$$y_{21}=\frac{1}{\Delta}\left\{-\alpha\sigma Y_1+Y_2\sigma\left[\frac{\alpha}{\gamma}(\alpha-\beta)Y_3+\alpha Y_4\right]\right\}$$

$$y_{31}=\frac{1}{\Delta}\left\{-\alpha^2\sigma Y_1+\frac{\alpha}{\gamma}Y_2\left[\left(\alpha\beta\left(\beta^2+2\gamma^2\right)-\sigma^2\right)Y_3+\alpha\beta\sigma Y_4\right]\right\}$$

$$y_{12}=\frac{1}{\Delta}\left\{2\beta Y_1+Y_2\left[\frac{1}{\gamma}\left(\beta^2-\alpha^2-\gamma^2\right)Y_3-2\beta Y_4\right]\right\}$$

$$y_{22}=\frac{1}{\Delta}\left\{2\alpha\beta Y_1+\frac{1}{\gamma}Y_2\left[\beta\left(\sigma-\alpha^2\right)Y_3-\gamma\left(\alpha^2+\sigma\right)Y_4\right]\right\}$$

$$y_{32}=\frac{1}{\Delta}\left\{2\alpha^2\beta Y_1+\frac{1}{\gamma}Y_2\left[\left(\sigma^2+\alpha^2\left(\gamma^2-\beta^2\right)\right)Y_3-2\alpha^2\beta\gamma Y_4\right]\right\}$$

$$y_{13}=\frac{1}{\Delta}\left\{-Y_1+\frac{1}{\gamma}Y_2\left[(\beta-\alpha)Y_3+\gamma Y_4\right]\right\}$$

$$y_{23}=\frac{1}{\Delta}\left\{-\alpha Y_1+\frac{1}{\gamma}Y_2\left[\left(\alpha^2-\sigma\right)Y_3+\alpha\gamma Y_4\right]\right\}$$

$$y_{33}=\frac{1}{\Delta}\left\{-\alpha^2 Y_1+\frac{1}{\gamma}Y_2\left[\left(\alpha\left(\beta^2-\gamma^2\right)-\beta\sigma\right)Y_3+\gamma(2\alpha\beta-\sigma)Y_4\right]\right\}$$

здесь

$$\Delta=\gamma^2+(\alpha-\beta)^2,\quad \sigma=\beta^2+\gamma^2,\quad Y_1=e^{\alpha\tau},\quad Y_2=e^{\beta\tau},\quad Y_3=\sin\gamma\tau,\quad Y_4=\cos\gamma\tau$$

Для второго материала элементы фундаментальной матрицы получатся из предыдущих, положив $\alpha=0$.

Имея фундаментальную матрицу (y_{ij}), по формуле Коши решение системы (2.4) запишем

$$y(\tau)=Y(\tau,0)y(0)+\int_0^\tau\begin{pmatrix}y_{13}(\tau,\theta)\\ y_{23}(\tau,\theta)\\ y_{33}(\tau,\theta)\end{pmatrix}\left(F^{(0)}(\theta)+F^{(1)}(\theta)\right)d\theta \qquad (3.1)$$

Учитывая начальные и конечные значения для функций $y_i(\tau)$, получим следующее интегральное условие:

$$\int_0^T h_i(\theta)F^{(1)}(\theta)d\theta=c_i \qquad (3.2)$$

здесь

$$h_i(\theta) = y_{i3}(T,\theta), \qquad i = 1,2,3$$

$$c_i = y_i(0) - \left(y_{ij}(0,T)\right)\psi_i - \int_0^T \begin{pmatrix} y_{13}(0,\theta) \\ y_{23}(0,\theta) \\ y_{33}(0,\theta) \end{pmatrix} F^{(0)}(\theta)d\theta \tag{3.3}$$

$$\psi_i = \Psi\left(\psi^{(1)},\psi^{(2)},\psi^{(5)}\right)$$

При (3.3) норма основного пространства определится

$$\rho_0^2 = \min_{\sum_{k=1}^{3} l_k c_k} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{3} l_i h_i(\theta)\right]^2 d\theta > 0 \tag{3.4}$$

т.к. функции $h_i(\theta)$ линейно независимы. Если обозначить через

$$s_{ij} = \int_0^\tau h_i(\theta) h_j(\theta) d\theta, \ \ (i, j = 1,2,3) \tag{3.5}$$

то (3.4) можно записать в виде

$$\rho_0^2 = \min_{\sum_{k=1}^{3} l_k c_k} \sum_{i,j=1}^{3} s_{ij} l_i l_j$$

Учитывая, что матрица $\|s_{ij}\|$ симметричная и определенно положительная, для минимизирующих l_i получим

$$l_i^0 = A_i \Big/ \sum_{k=1}^{3} A_k c_k, \qquad i = 1,2,3$$

$$A_1 = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} c_1 & s_{12} & s_{13} \\ c_2 & s_{22} & s_{23} \\ c_3 & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_2 = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} s_{11} & c_1 & s_{13} \\ s_{21} & c_2 & s_{23} \\ s_{31} & c_3 & s_{33} \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

$$A_3 = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & c_1 \\ s_{21} & s_{22} & c_2 \\ s_{31} & s_{32} & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \left|s_{ij}\right| > 0$$

Тогда для оптимальной $F_0^{(1)}$ получим

$$F_0^{(1)}(\tau) = \frac{1}{\rho_0^2}\sum_{i=1}^{3} l_i^0 h_i(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i h_i(\tau)}{\sum_{i=1}^{3} A_i c_i} \tag{3.7}$$

Однако, оптимальная нагрузка определится, исходя из связи (2.4)

$$\frac{dq^{(1)}}{d\tau} + \kappa q^{(1)} = F_0^{(1)}(\tau) \tag{3.8}$$

то есть

$$q_0^{(1)}(\tau)=Ce^{-\kappa\tau}+\int_0^{\tau}e^{-\kappa(\tau-\theta)}\frac{\sum_{i=1}^{3}A_ih_i(\theta)}{\sum_{i=1}^{3}A_ic_i}d\theta \tag{3.9}$$

Оптимальную нагрузку можно определить и исходя из (2.9). Если в (3.2) поставить связь между $q^{(1)}$ и $F^{(1)}$ по (2.4) и совершить интегрирование по частям, то взамен (3.2) будем иметь

$$\tilde{c}_i=\int_0^{T}\tilde{h}_i(\tau)q^{(1)}(\tau)d\tau,\qquad (i=1,2,3) \tag{3.10}$$

где уже

$$\begin{aligned}&\tilde{c}_i=c_i+\left(h_i(0)q^{(1)}(0)-h_i(\tau)q^{(1)}(\tau)\right)\\&\tilde{h}_i(\tau)=\kappa h_i(\tau)-\kappa h_i'(\tau)\end{aligned} \tag{3.11}$$

Окончательные выражения для $q_0^{(1)}$ будут определяться по виду (3.7), но уже соответствующие величины должны быть заменены величинами с волной по (3.11).

Как видно из (3.9) и из последнего выражения для $q_0^{(1)}$, они определяются с точностью до постоянных слагаемых, в частности, значения $q_0^{(1)}(0)$ и $q_0^{(1)}(\tau)$. Произвольные постоянные можно выбирать как из специфики и удобства осуществления оптимальной нагрузки, так и, что еще естественно, из новых минимальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. Об одной задаче управления движением термоупругой пластинки-полосы.//Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №3. С.15-23.
2. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. Некоторые задачи оптимального управления движением упругих систем./Сб.научн.тр.конференции. Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: 1997, с.67-70.
3. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению движением упругих систем.//Изв.НАН РФ. МТТ. 1999. №6. С.146-153.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.

Ереванский государственный университет
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
23.01.2004