ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 517.9:62.50

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В НЕПОЛНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Барсегян В. Р.

Վ.Ռ.Բարսեղյան
Բաշխված պարամետրերով համակարգի վիճակի օպտիմալ վերականգնման խնդիրը թերի և սխալով չափումների դեպքում

Դիտարկված է բաշխված պարամետրերով համակարգի վիճակի օպտիմալ վերականգնման խնդիրը թերի և սխալով չափումների դեպքում: Փոփոխականների անջատման եղանակով խնդրի լուծումը բերված է հաստատուն գործակիցներով սովորական ածանցյալով դիֆերենցիալ հավասարումների անվերջ համակարգի: Ուժեղացնելով յուրաքանչյուր հարմոնիկի համար ստացված ազդակը, կառուցված է բոլոր կետերում համակարգի վիճակը վերականգնող ունիվերսալ օպտիմալ գործողություն:

V.R. Barseghyan
The problem of systems condition optimal recovery with distributed parameters in the presence of incomplete measurements errors

Рассматривается задача оптимального восстановления состояния систем с распределенными параметрами при наличии погрешностей в неполных измерениях. Методом разделения переменных решение задачи приводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для каждой гармоники, усиливая поступающий сигнал, строится универсальная оптимальная операция, позволяющая восстановить состояние всех точек в любой момент времени.

Теория оптимального управления и наблюдения системами с распределенными параметрами непрерывно расширяет область приложения. Для задачи оптимального управления динамическими системами необходимо знать текущее состояние процесса. С помощью непосредственных измерений переменные состояния точно определить невозможно. Наблюдаемые переменные представляются функционалом, определенным состоянием системы и содержащим погрешности измерений. В таких случаях возникает задача восстановления переменных состояния системы с наибольшей точностью. В работах [1,2] обсуждаются вопросы восстановления неизвестных характеристик и управления динамических систем с распределенными параметрами и приведены обширные библиографии.

В настоящей работе рассматривается задача восстановления состояния систем при наличии распределенного управляющего воздействия с помощью реальных (содержащих ошибки) сигналов, поступающих через измерительные устройства.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial\, \mathrm{w}(x,t)}{\partial t} = A_x\, \mathrm{w}(x,t) + u(x,t) \tag{1.1}$$

определенное для $t \ge t_0$ в области X с граничными условиями на границе S области X

$$\alpha_s \mathrm{w}(s,t) = 0, \quad s \equiv x \in S \tag{1.2}$$

Здесь $\mathrm{w}(x,t)$ и $u(x,t)$ — векторы состояния и управления, A_x и α_s — матрицы линейных дифференциальных операторов, характеризующих объект и его воздействие с окружающей средой.

В частном случае уравнение (1.1) будет описывать управляемый процесс теплопроводности [3]. Тогда в однородном случае ($0 \le x \le l$ объект — стержень конечной длины) задается одна из краевых условий

$$\mathrm{w}(0,t) = \mathrm{w}(l,t) = 0, \qquad \mathrm{w}_x(0,t) = \mathrm{w}_x(l,t) = 0$$

$$\mathrm{w}_x(0,t) + \lambda \mathrm{w}(0,t) = 0, \qquad \mathrm{w}_x(l,t) + \mu \mathrm{w}(l,t) = 0$$

и
$$A_x = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad a^2 = \frac{\mathrm{K}}{c\rho_0}$$

K — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость, ρ_0 — удельная плотность материала стержня.

Характерным для систем с распределенными параметрами является то, что управляющие воздействия могут быть распределены не по всей области X, а по некоторым ее подобластям X_u. Область X_u называется пространственной базой управляющего воздействия.

Для синтеза оптимального управления по принципу обратной связи необходима полная информация о состоянии системы, т.е. в каждый момент времени необходимо знание состояния $\mathrm{w}(x,t)$ в каждой точке области X. Однако точно измерить состояние системы в каждой точке области X в принципе невозможно. Обычно в реальной ситуации наблюдаемые переменные являются некоторыми функционалами, определенными состоянием системы. Кроме полезного сигнала, наблюдаемые переменные могут содержать и погрешности измерения.

Предположим, что наблюдаемый m-мерный реальный сигнал $\mathrm{Z}(\tau)$ связан с состоянием системы $\mathrm{w}(x,\tau)$ и погрешности измерения $\omega(x,\xi(\tau))$ ($\omega(x,\xi(\tau))$ — случайный процесс) уравнением

$$\mathrm{Z}(\tau) = \int_{\mathrm{X}} \mathrm{N}(x,\tau)\left[w(x,\tau) + \omega(x,\xi(\tau))\right]dx \tag{1.3}$$

Матрица $\mathrm{N}(x,\tau)$ характеризует способ и участки объекта, подлежащие измерению. Элементы матрицы $\mathrm{N}(x,\tau)$ могут быть δ-функции и их производные.

Примерами функционалов типа (1.3) являются состояние процесса в фиксированных точках области X, среднее по значению состояния и т.д.

Множество $\mathrm{X}_{\mathrm{N}} = \{x : x \in \mathrm{X}, \ \ \mathrm{N}(x,\tau) \ne 0\}$ называется пространственной базой измерительного устройства. Множество X_{N} может состоять из изолированных точек области X, быть подмножеством X (объединение нескольких подмножеств X) или совпадать с ним. Пусть, например, измеряется состояние поля в некоторой фиксированной точке $x = x_0 \in \mathrm{X}$, тогда

$$Z(\tau) = W(x_0,\tau) + \omega(x_0,\xi(\tau)) = \int_X \delta(x - x_0)[W(x,\tau) + \omega(x,\xi(\tau))]dx$$

Здесь $N(x,\tau) = \delta(x - x_0)$, а пространственной базой измерителя будет только одна точка $x = x_0$.

Пусть величина $Z(\tau)$ (1.3) измеряется на промежутке времени $[t - \vartheta, t]$, где $\vartheta > 0$ постоянное число – длина интервала, в течение которого учитывается некоторая предыстория поступающего сигнала. Число ϑ определяется из дополнительных требований, сопровождающих задачу наблюдений, и зависит от физических возможностей измерительных устройств.

Требуется по известному наблюдаемому сигналу $Z(\tau)$, $\tau \in [t - \vartheta, t]$ восстановить состояние $w(x,t)$ в момент времени t. Восстанавливаемая функция $w(x,t)$ используется в ходе процесса его контроля и обеспечения определенного технологического качества. Такова ситуация, например, в процессах электрошлакового переплава [4], в которых по ходу процесса требуется определять и контролировать температуру агрессивного шлака для обеспечения правильного течения процесса.

2. Сведение исходной задачи к задаче восстановления состояния системы для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предположим, что функция состояния $w(x,\tau)$, управляющее воздействие $u(x,\tau)$ и погрешность измерения $\omega(x,\xi(\tau))$ могут быть представлены в виде разложения

$$w(x,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(\tau)\Phi_i(x), \quad u(x,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(\tau)\Phi_i(x)$$

$$\omega(x,\xi(\tau)) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i(\tau)\Phi_i(x) \tag{2.1}$$

где $\Phi_i(x)$ – некоторая полная система ортонормированных собственных функций оператора A_x с дискретными и простыми собственными числами λ_i, а коэффициенты разложения $w_i(\tau)$, $u_i(\tau)$ и $\omega_i(\tau)$ определяются по формулам

$$w_i(\tau) = \int_X w(x,\tau)\Phi_i(x)dx, \qquad u_i(\tau) = \int_X u(x,\tau)\Phi_i(x)dx$$

$$\omega_i(\tau) = \int_X \omega(x,\xi(\tau))\Phi_i(x)dx$$

Подставляя $w(x,\tau)$ и $u(x,\tau)$ из (2.1) в исходное уравнение (1.1) и умножая скалярно обе части уравнения на функции $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_i(x), \ldots$, учитывая, что для собственных функций $\Phi_i(x)$ выполняются условия нормировки

$$\int_X \Phi_i(x)\Phi_j(x)dx = \delta_{ij}$$

получим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{w}_i(\tau) = \lambda_i w_i(\tau) + u_i(\tau) \qquad (i = 1,2,\ldots) \tag{2.2}$$

Учитывая (2.1), из (1.3) будем иметь

$$Z(\tau) = \int_X N(x,\tau)\left[\sum_{i=1}^{\infty} w_i(\tau)\Phi_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i(\tau)\Phi_i(x)\right]dx = \sum_{i=1}^{\infty}\left(N_i(\tau)w_i(\tau) + \Delta_i(\tau)\right)$$

где приняты следующие обозначения:

$$N_i(\tau) = \int_X N(x,\tau)\Phi_i(x)dx, \qquad \Delta_i(\tau) = N_i(\tau)\omega_i(\tau)$$

Таким образом, для каждой гармоники поступающий реальный сигнал можно представить в следующем виде:

$$Z_i(\tau) = N_i(\tau)w_i(\tau) + \Delta_i(\tau), \qquad \tau \in [t - \vartheta, t]$$

Погрешность $\Delta_i(\tau)$ неизвестна (т.к. неизвестна $\omega_i(\tau)$), однако можно принять, что из физических условий процесса измерения вытекает некоторая оценка этой погрешности. Пусть $\Delta_i(\tau)$ является элементом пространства L_2, тогда оценку возможной помехи $\Delta_i(\tau)$ можно записать в виде

$$\rho[\Delta_i(\cdot)] = \left(\int_{t-\vartheta}^{t} \Delta_i^2(\tau)d\tau\right)^{1/2} \le \delta_i \tag{2.3}$$

здесь $\delta_i\,(i = 1,2,\ldots)$ – положительные постоянные. Если погрешность измерения отсутствует, то измерение является точным (а поступающий сигнал идеальным), но неполным.

Требуется найти операцию $\varphi_i^0[t, Z_i(\tau)]$, которая удовлетворяет условию

$$\sup_{Z_i}\left|\varphi_i^0[t, Z_i(\tau)] - w_i(t)\right| = \min_{\varphi_i}\sup_{Z_i}\left|\varphi_i[t, Z_i(\tau)] - w_i(t)\right| \tag{2.4}$$

по всевозможным реализациям $Z_i(\tau)$ и по всевозможным операциям φ_i.

Отметим, что операция φ_i, которая при каждом t обеспечивает конечную верхнюю грань (2.4), удовлетворяет условию

$$\varphi_i[t, N_i(\tau)w_i(\tau)] = w_i(t) \tag{2.5}$$

Из (2.5) и линейности операции φ_i получим

$$\varphi_i[t, Z_i(\tau)] - w_i(t) = \varphi_i[t, \Delta_i(\tau)]$$

но так как

$$\sup_{\Delta_i}\left|\varphi_i[t, \Delta_i(\tau)]\right| = \delta_i\rho^*[\varphi_i] \tag{2.6}$$

при условии (2.3), следовательно [5], для решения поставленной задачи надо найти операцию

$$\varphi_i^0[t, N_i(\tau)w_i(\tau)] = w_i(t)$$

и имеющую при каждом рассматриваемом значении t наименьшую возможную норму $\rho^*[\varphi_i^0]$. Поэтому необходимо строить разрешающую операцию для идеального сигнала

$$N_i(\tau)w_i(\tau), \qquad \tau \in [t - \vartheta, t] \tag{2.7}$$

При сигнале $\{N_i(\tau)w_i(\tau), u_i(\tau)\}$, где для $N_i(\tau)w_i(\tau)$ $\tau \in [t-\vartheta, t]$, а для $u_i(\tau)$, $\tau \in [t-\vartheta, t)$ необходимо строить линейную операцию так, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi_i[t, \{N_i(\tau)w_i(\tau), u_i(\tau)\}] = w_i(t) \qquad (i = 1,2,\ldots) \tag{2.8}$$

Для каждого $i = 1,2,\ldots$ будем рассматривать по отношению к (2.7) "усиленный" сигнал [6],

$$y_i(\tau) = \lambda_i^{\alpha} e^{\lambda_i \vartheta} N_i(\tau) w_i(\tau) \qquad \tau \in [t-\vartheta, t] \tag{2.9}$$

где $\alpha = 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – малое число.

3. Решение задачи. Для каждого $i = 1,2,\ldots$ решение однородной части уравнения (2.2) запишется в виде

$$w_i(\tau) = w_i(t) e^{\lambda_i(\tau - t)} \qquad \tau \in [t-\vartheta, t] \tag{3.1}$$

Операции, вычисляющие функции $w_i(t)$, по сигналу (2.9) с учетом (3.1) будем искать в виде

$$\int_{t-\vartheta}^{t} V_i(t,\tau) \lambda_i^{\alpha} e^{\lambda_i \vartheta} N_i(\tau) w_i(t) e^{\lambda_i(\tau - t)} d\tau = w_i(t)$$

или

$$\lambda_i^{\alpha} e^{\lambda_i \vartheta} \int_{t-\vartheta}^{t} V_i(t,\tau) N_i(\tau) e^{\lambda_i(\tau - t)} d\tau = 1 \tag{3.2}$$

Для каждого $i = 1,2,\ldots$ найдем функцию $V_i(t,\tau)$, удовлетворяющую интегральному условию (3.2) и являющуюся оптимальным в смысле

$$\int_{t-\vartheta}^{t} V_i^2(t,\tau) d\tau \to \min \tag{3.3}$$

Решая изопериметрическую задачу (3.2), (3.3), получим

$$V_i^0(t,\tau) = N_i(\tau) e^{\lambda_i(\tau - t)} \left(\lambda_i^{\alpha} e^{\lambda_i \vartheta} \int_{t-\vartheta}^{t} N_i^2(\tau) e^{2\lambda_i(\tau - t)} d\tau \right)^{-1} \tag{3.4}$$

При стационарной матрице $N(x)$ коэффициенты разложения N_i будут постоянными числами, тогда из (3.4) будем иметь

$$V_i^0(t,\tau) = \frac{2e^{-\lambda_i(t-\tau-\vartheta)}}{\lambda_i^{\varepsilon} N_i \left(e^{2\lambda_i \vartheta} - 1\right)} \tag{3.5}$$

Следовательно,

$$\left(V_i^0(\cdot)\right)^2 = \int_{t-\vartheta}^{t} \left(V_i^0(t,\tau)\right)^2 d\tau = \frac{2}{\lambda_i^{1+2\varepsilon} N_i^2 \left(e^{2\lambda_i \vartheta} - 1\right)} = \frac{1}{\lambda_i^{1+2\varepsilon} N_i^2 e^{\lambda_i \vartheta} \operatorname{sh}(\lambda_i \vartheta)} \tag{3.6}$$

Учитывая (2.6) и (3.6), будем иметь

$$\left|\varphi_i^0[t, \Delta_i(\tau)]\right| \le \frac{2\delta_i}{N_i \sqrt{\lambda_i^{1-2\varepsilon} \left(e^{2\lambda_i \vartheta} - 1\right)}} \tag{3.7}$$

Для нормы бесконечномерного вектора $V^0(t,\tau)$ получим

$$\left\|V^0\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left\|V_i^0\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_i^{1+2\varepsilon}N_i^2\left(e^{2\lambda_i\theta}-1\right)} \tag{3.8}$$

Этот ряд сходится и ясно, что выбором функции $N(x)$ и ε можно улучшить его сходимость. Поэтому найденная функция $V_i^0(t,\tau)$ (3.5) является оптимальной и универсальной.

Таким образом, оптимальная операция φ_i^0, восстанавливающая $w_i(t)$ с наименьшей погрешностью, будет

$$\varphi_i^0[t, y_i(\tau)] = \int_{t-\theta}^{t} y_i(\tau)V_i^0(t,\tau)d\tau$$

при этом оценка ошибки выражается соотношением (3.7).

Разрешающая операция $\varphi_i[t\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}]$ согласно (2.8) будет иметь следующий вид:

$$\varphi_i[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}] = \varphi_i^0[t, y_i(\tau)] - \varphi_i^0\left[t, \lambda_i^a e^{\lambda_i\theta}\int_t^{\zeta} e^{\lambda_i(\zeta-\tau)}u_i(\tau)d\tau\right]$$

Таким образом, имея оптимальные функции $V_i^0(t,\tau)$ в явном виде (3.4) (или (3.5)), а также значение измерения $y_i(\tau)$, получим $w_i(t)$ с наибольшей точностью. Подставляя полученное значение $w_i(t)$ в (2.1), будем иметь функцию состояния. Сходимость полученного ряда следует из сходимости нормы (3.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Короткий А.И. Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами.//Изв. ВУЗов. Математика. 1995. №11. С.101-124
2. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т. К. Синтез оптимального управления в системах с распределенными параметрами при неполном измерении состояния (обзор).//Изв. АН СССР. Кибернетика. 1983. № 2. С.123-136
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1977. 736с.
4. Тепловые процессы при электрошлаковом переплаве. Под ред. Б.И. Медовара. Киев: Наукова думка. 1978. 305 с.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.
6. Барсегян В.Р. Задача наблюдения колебаниями струны.// Изв. НАН. РА. Механика. 1998. Т. №1. С. 72-78.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 23.03.2004