ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №1, 2004 Механика

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ СДВИГОВЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА.

Мартиросян Э. В.

Է. Վ. Մարտիրոսյան
Մագնիսաառաձգական մակերևութային սահքի ալիքները ըստ իդեալ հաղորդիչ կիսատարածության եզրի

Դիտարկվում է կիսատարածության առաձգական իդեալ հաղորդիչ նյութից, որը սահմանափակված է վակուումի շերտով: Արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությունը, որը գործում է կիսատարածության եզրին ուղղահայաց հարթությունում, ապահովում է փոխազդեցություն գրգռված էլեկտրա-մագնիսական դաշտի և կիսատարածության առաձգական տեղափոխումների դաշտի միջև: Ցույց է տրվում որ նշված փոխազդեցությունը բերում է մակերևութային սահքի ալիքների առաջացմանը:

E. V. Martirosyan
Magnetoelastic surface shear waves along the boundary of perfectly conducting semi-space

Рассматривается упругое полупространство из идеально-проводящего материала, граничащее со слоем вакуума. Наличие внешнего постоянного магнитного поля, действующего в плоскости, перпендикулярной границе полупространства, обусловливает взаимодействие возмущенных электромагнитного поля и поля упругих перемещений полупространства. Показывается, что указанное взаимодействие приводит к появлению поверхностных сдвиговых волн.

§ 1. Вначале исследуется вопрос существования поверхностных сдвиговых волн в случае полупространства из упругого идеально-проводящего материала, граничащего с вакуумом.

Рассмотрим упругое идеально - проводящее полупространство $-\infty < x_1 < +\infty$, $0 < x_2 < +\infty$, $-\infty < x_3 < +\infty$. Плоскость $x_2 = 0$ отделяет полупространство от вакуума ($x_3 < 0$). В начальном невозмущенном состоянии полупространство находится в постоянном магнитном поле, вектор напряженности $\vec{H}_0$ которого параллелен плоскости $x_1 O x_2$):

$$\vec{H}_0 = H_{01}\,\vec{i} + H_{02}\,\vec{j}$$

где $\vec{i}, \vec{j}$ –орты осей x_1, x_2, соответственно. Задача состоит в изучении вопроса существования сдвиговой поверхностной волны, распространяющейся вдоль границы полупространства.

Отметим, что в случае поперечного магнитного поля, т. е. когда $H_{01} = 0$, поставленная задача исследовалась в [4]. Похожая задача, однако без полного анализа полученных результатов, изучалась в [5].

В случае антиплоской упругой деформации $u = v = 0$, $w = w(x_1, x_2, t)$, а также при предположении, что все искомые величины возмущенного электромагнитного поля не зависят от координаты x_3, линеаризованное уравнение магнитоупругости [3] имеет вид: при $x_2 > 0$

$$\left(C_t^2 + V_1^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \left(C_t^2 + V_2^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2V_1 V_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

Здесь

$$V_k^2 = \frac{\mu}{4\pi\rho} H_{0k}^2, \;\; k = 1,2 \tag{1.2}$$

$C_t^2 = G\rho^{-1}$, G –модуль сдвига, ρ – плотность материала среды , μ –ее магнитная проницаемость.

Уравнения электродинамики для возмущенного электромагнитного поля в области $x_2 < 0$ приводятся к виду

$$c^2 \Delta h_3 = \frac{\partial^2 h_3}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial e_1}{\partial t} = c \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \tag{1.3}$$

где e_1 –компонента напряженности вектора возмущенного электрического поля, h_3 – компонента напряженности вектора возмущенного магнитного поля, Δ –оператор Лапласа, c – электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме.

На плоскости $x_2 = 0$ решения уравнений (1.2) и (1.3) должны удовлетворять следующим граничным условиям :

$$G \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\mu}{4\pi} H_{02} \left(H_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{4\pi} H_{02} h_3 \tag{1.4}$$

$$\frac{\mu}{c} H_{02} \frac{\partial w}{\partial t} = e_1$$

Первое из условий (1.4) означает, что на границе $x_2 = 0$ выполняется граничное условие типа свободной границы [1]–[3]. Второе условие из (1.4) обеспечивает непрерывность тангенциальной компоненты напряженности e_1 возмущенного электрического поля при переходе через границу $x_2 = 0$.

Решения типа поверхностной волны должны удовлетворять также следующим условиям затухания :

$$\lim_{x_2 \to -\infty} w = 0 \,, \;\; \lim_{x_2 \to -\infty} h_3 = 0 \tag{1.5}$$

Таким образом , задача сводится к решению уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющих условиям (1.4) и (1.5) .

Для решения уравнений (1.1) , (1.3) введем обозначения

$$\chi_k = \frac{V_k^2}{C_t^2}, \quad k = 1,2 \tag{1.6}$$

Уравнение (1.1) и второе уравнение из (1.3) примут, соответственно, следующий вид:

$$(1+\chi_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (1+\chi_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2\sqrt{\chi_1 \chi_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{C_t^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x^2} + \sqrt{\chi_2} \left(\sqrt{\chi_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \sqrt{\chi_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) = \frac{\sqrt{\chi_2}}{\sqrt{4\pi\mu G}} h_3$$

Решения уравнений (1.1), (1.3) будем искать в виде гармонических волн с частотою ω и волновым числом k :

$$w = f(x_2)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$
$$h_3 = g(x_2)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$
$$e_1 = p(x_2)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$

где f, g, p –неизвестные функции (f, g из класса $C^2(-\infty,+\infty)$, p –класса $C(-\infty,+\infty)$).

Так как для уравнения (1.1) ищется затухающее решение, удовлетворяющее первому условию из (1.5), то функция $f(x_2)$ должна иметь следующий вид:

$$f(x_2) = A\exp(-k\alpha x_2)$$

где A, α – постоянные, причем Reα>0. Подставляя значение w в уравнение (1.1), приведем его к виду

$$(1+\chi_2)\alpha^2 + 2i\sqrt{\chi_1\chi_2}\,\alpha - (1+\chi_1-\eta) = 0$$

где $\eta = \dfrac{\omega^2}{k^2 C_t^2}$ – безразмерная характеристика квадрата фазовой скорости волны.

Анализ полученного квадратного уравнения показывает, что для обеспечения условия Reα > 0 нужно требовать выполнение ограничения

$$0 < \eta < 1 + \frac{\chi_1}{1+\chi_2} \tag{1.7}$$

и взять $\alpha = \dfrac{\sqrt{1+\chi_1+\chi_2-(1+\chi_2)\eta} - i\sqrt{\chi_1\chi_2}}{1+\chi_2}$ (1.8)

Итак, при выполнении условия затухания (1.7) имеем

$$w = A\exp(-k\alpha x_2)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$

где α определяется по (1.8), A – произвольная постоянная.

Аналогично, из уравнений (1.3) с учетом второго условия из (1.5) получим значения функций g и p:

$$g(x_2) = B\exp\left(k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,x_2\right)$$
$$p(x_2) = \frac{Bck}{i\omega}\sqrt{1-\theta_1\eta}\exp\left(k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,x_2\right.$$
$$p(x_2) = \frac{c\,k}{i\,\omega}\sqrt{1-\theta_1\eta}\;\;B\exp\left(k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,x_2\right)$$

где $\theta_1 = C_t^2 c^{-2}$, B – произвольная постоянная.

Следовательно, решения уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющие (1.5), выражаются формулами

$$w = A\exp(-k\alpha\,x_2)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$
$$h_3 = B\exp\left(k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,x_2\right)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$
$$e_1 = \frac{c\,k}{i\omega}\sqrt{1-\theta_1\eta}\,B\exp\left(k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,x_2\right)\exp\left[i\,(\omega t - kx_1)\right]$$

Для нахождения произвольных постоянных A, B используем граничные условия (1.4). Подставляя в них значения w, h_3, e_1, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных A, B:

$$k\sqrt{1+\chi_1+\chi_2-(1+\chi_2)\eta}A+\frac{\sqrt{\chi_2}}{\sqrt{4\pi\mu\ G}}B = 0$$

$$\frac{\omega^2\mu}{c^2 k}H_{02}\ A + \sqrt{1-\theta_1\eta}\,B = 0$$

Чтобы однородная система линейных уравнений имела нетривиальное решение, ее определитель должен равняться нулю. Определитель последней системы равен $kN(\eta)$, где

$$N(\eta)=\sqrt{1+\chi_1+\chi_2-(1+\chi_2)\eta}\ \sqrt{1-\theta_1\eta}\ -\chi_2\theta_1\eta$$

Таким образом, для решения изучаемой задачи требуется найти корень уравнения

$$N(\eta)=0 \tag{1.9}$$

удовлетворяющий условию затухания (1.7).

Легко проверить, что если $\chi_2>0$, т. е. с учетом (1.2) и (1.6) $H_{02}\neq 0$, то уравнение (1.9) имеет единственный корень, удовлетворяющий (1.7); если же $\chi_2=0$, т. е. $H_{02}=0$, то уравнение (1.9) не имеет корней, удовлетворяющих (1.7) Следовательно, в приведенной постановке поверхностная сдвиговая волна существует, если только $H_{02}\neq 0$. Однако, квадрат фазовой скорости поверхностной волны очень мало отличается от C_t^2 (т. е. η близка к $1+\dfrac{\chi_1}{1+\chi_2}$) даже в случае сверхсильных магнитных полей. Это обстоятельство хорошо видно из численных данных, приведенных ниже в табл. 1. Поэтому представляется интересным рассмотреть видоизмененную постановку задачи, в которой эффект магнитного поля, обусловливающий существование сдвиговых поверхностных волн, мог бы быть более существенным.

§ 2. Рассмотрим следующий аналог задачи из § 1. Пусть полупространство из упругого идеально-проводящего материала $-\infty<x_1<+\infty$, $0<x_2<+\infty$, $-\infty<x_3<+\infty$ граничит с параллельным слоем $-\infty<x_1<+\infty$, $-h<x_2<0$, $-\infty<x_3<+\infty$, свойства которого отождествляются со свойствами вакуума, причем на границе $x_2=0$ выполняется граничное условие типа свободной границы, а плоскость $x_2=-h$ является экраном для электрического поля. В начальном невозмущенном состоянии полупространство находится в постоянном магнитном поле, вектор напряженности $\vec{H}_0$ которого параллелен плоскости (x_1Ox_2). Задача состоит в изучении вопроса существования сдвиговой поверхностной волны вдоль границы полупространства.

Решение рассматриваемой задачи во многом сходно с решением ее предельного случая из § 1. Уравнения (1.1), (1.3), граничные условия (1.4) и первое из условий затухания (1.5) остаются без изменений; второе из условий (1.5) нужно заменить условием

$$e_1 = 0 \text{ при } x_2 = -h \tag{2.1}$$

Решения уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющие первому условию из (1.5), выражаются следующими формулами :

$$w = A\exp(-k\alpha x_2)\exp[i(\omega t - kx_1)]$$

$$h_3 = \left[B\exp(kx_2\sqrt{1-\theta_1\eta}) + D\exp(-kx_2\sqrt{1-\theta_1\eta})\right]\cdot\exp[i(\omega t - kx_1)]$$

$$e_1 = \frac{ck}{i\omega}\sqrt{1-\theta_1\eta}\left[\left(B\exp(kx_2\sqrt{1-\theta_1\eta}\right) - D\exp\left(-kx_2\sqrt{1-\theta_1\eta}\right)\right]\times$$

$$\times\exp[i(\omega t - kx_1)]$$

где A, B, D – произвольные постоянные и предполагается выполненным ограничение (1.7). Подставляя в граничные условия (1.4) и условие (2.1) значения функций w, h_3, e_1, найдем систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных A, B, D

$$k\left[(1+\chi_2)\alpha + i\sqrt{\chi_1\chi_2}\right]A + \frac{\sqrt{\chi_2}}{\sqrt{4\pi\mu G}}(B+D) = 0$$

$$\frac{\omega^2\mu}{c^2k}H_{02}A + \sqrt{1-\theta_1\eta}\,(B-D) = 0$$

$$D = B\exp(-2kh\sqrt{1-\theta_1\eta})$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим следующее дисперсионное уравнение рассматриваемой задачи :

$$N_1(\eta) = 0 \tag{2.2}$$

где

$$N_1(\eta) = \sqrt{1-\theta_1\eta}\,\sqrt{1+\chi_1+\chi_2-(1+\chi_2)\eta} -$$
$$-\theta_1\chi_2\eta\,\operatorname{cth}(kh\sqrt{1-\theta_1\eta})$$

Таким образом, решение изучаемой задачи сводится к нахождению корней уравнения (2.2), удовлетворяющих условию затухания (1.7).

Анализ полученного результата приводит к заключению, что в рассмотренной постановке, как и выше в § 1, поверхностная сдвиговая упругая волна существует, если только $H_{02} \neq 0$. Однако теперь, сравнение дисперсионных уравнений (2.2) и (1.9) показывает, что влияние магнитного поля на величину сдвиговой поверхностной волны зависит от порядка величины kh. Этот факт иллюстрируют числовые данные из табл. 2. В частности, при $kh \to +\infty$ имеем $\operatorname{cth}(kh\sqrt{1-\theta_1\eta}) \to 1$, поэтому из (2.2) в пределе получается уравнение (1.9).

Если же $k\,h \to 0$, то имеем $\operatorname{cth}\left(k\,h\sqrt{1-\theta_1\,h}\right) \sim \left(k\,h\sqrt{1-\theta_1\eta}\right)^{-1}$ и более существенно проявляется влияние экрана .

Таблица 1

χ_1	χ_2	θ_1	η	Re α	$k\,y_1$
0	0,1	10^{-10}	$1\text{-}9\cdot10^{-23}$	$9{,}0453\cdot10^{-6}$	0
0,01	0,1	10^{-4}	$1+909\cdot10^{-5}$	$0{,}9091\cdot10^{-3}$	109,251
0,01	0,1	10^{-10}	$1+909\cdot10^{-5}$	$0{,}9091\cdot10^{-3}$	109,251
0,02	0,1	10^{-4}	$1+1818\cdot10^{-5}$	$0{,}9091\cdot10^{-3}$	77,2338
0,02	0,1	10^{-10}	$1+1818\cdot10^{-5}$	$1{,}2856\cdot10^{-3}$	77,2338
0,05	0,1	10^{-4}	$1+4545\cdot10^{-5}$	$1{,}2856\cdot10^{-3}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-10}	$1+4545\cdot10^{-5}$	$1{,}2856\cdot10^{-3}$	48,8469
0,08	0,1	10^{-4}	$1+7272\cdot10^{-5}$	$2{,}5713\cdot10^{-3}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-10}	$1+7272\cdot10^{-5}$	$2{,}5713\cdot10^{-3}$	38,6169
0,1	0,1	10^{-4}	$1+909\cdot10^{-4}$	$2{,}8748\cdot10^{-3}$	34,54
0,1	0,1	10^{-10}	$1+909\cdot10^{-4}$	$2{,}8748\cdot10^{-3}$	34,54

Таблица 2 .

χ_1	χ_2	θ_1	kh	η	Re α	ky_1
0	0,1	10^{-8}	10^{-1}	$1\text{-}9{,}091\cdot10^{-17}$	$9{,}09545\cdot10^{-9}$	_
0	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1\text{-}9{,}091\cdot10^{-15}$	$9{,}09545\cdot10^{-8}$	_
0	0,1	10^{-8}	10^{-3}	$1\text{-}9{,}091\cdot10^{-13}$	$9{,}09545\cdot10^{-7}$	_
0	0,1	10^{-8}	10^{-4}	$1\text{-}9{,}091\cdot10^{-11}$	$9{,}09545\cdot10^{-6}$	_
0	0,1	10^{-10}	10^{-1}	$1\text{-}9{,}091\cdot10^{-21}$	$9{,}09545\cdot10^{-11}$	_
0	0,1	10^{-10}	10^{-2}	$1\text{-}9{,}091\cdot10^{-19}$	$9{,}09095\cdot10^{-10}$	_
0	0,1	10^{-10}	10^{-3}	$1\text{-}9{,}091\cdot10^{-17}$	$9{,}09068\cdot10^{-9}$	_
0	0,1	10^{-10}	10^{-4}	$1\text{-}9{,}091\cdot10^{-15}$	$9{,}09091\cdot10^{-8}$	_
0,01	0,1	10^{-8}	10^{-4}	$1+9{,}09\cdot10^{-3}$	$9{,}0909\cdot10^{-4}$	109,225
0,01	0,1	10^{-10}	10^{-4}	$1+9{,}09\cdot10^{-3}$	$9{,}0909\cdot10^{-4}$	109,225
0,02	0,1	10^{-10}	10^{-4}	$1+1{,}818\cdot10^{-2}$	$1{,}2856\cdot10^{-3}$	77,2338
0,05	0,1	10^{-8}	10^{-1}	$1+4{,}545\cdot10^{-2}$	$2{,}0328\cdot10^{-3}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-8}	10^{-2}	$1+4{,}545\cdot10^{-2}$	$2{,}0328\cdot10^{-3}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-10}	10^{-3}	$1+4{,}545\cdot10^{-2}$	$2{,}0328\cdot10^{-3}$	48,8469
0,05	0,1	10^{-10}	10^{-4}	$1+4{,}545\cdot10^{-2}$	$2{,}0328\cdot10^{-3}$	48,8469
0,08	0,1	10^{-8}	10^{-3}	$1+7{,}2727\cdot10^{-2}$	$4{,}9793\cdot10^{-4}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-8}	10^{-4}	$1+7{,}2727\cdot10^{-2}$	$4{,}9793\cdot10^{-4}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-10}	10^{-3}	$1+7{,}2727\cdot10^{-2}$	$4{,}9793\cdot10^{-4}$	38,6169
0,08	0,1	10^{-10}	10^{-4}	$1+7{,}2727\cdot10^{-2}$	$4{,}9793\cdot10^{-4}$	38,6169
0,1	0,1	10^{-8}	10^{-3}	$1+9{,}0909\cdot10^{-2}$	$2{,}8748\cdot10^{-4}$	34,54
0,1	0,1	10^{-8}	10^{-4}	$1+9{,}0909\cdot10^{-2}$	$2{,}8748\cdot10^{-4}$	34,54
0,1	0,1	10^{-10}	10^{-3}	$1+9{,}0909\cdot10^{-2}$	$2{,}8748\cdot10^{-4}$	34,54
0,1	0,1	10^{-10}	10^{-4}	$1+9{,}0909\cdot10^{-2}$	$2{,}8748\cdot10^{-4}$	34,54

Пояснения к таблицам :

1. Амплитуда поверхностной волны w равна $|A|\exp\left(-ky\operatorname{Re}\alpha\right)$, поэтому величина $\exp\left(-2\pi\operatorname{Re}\alpha\right)$ показывает, во сколько раз уменьшается величина амплитуды при уменьшении y на величину, равную длине волны $2\pi/k$.

2. Волна $w = E\exp\left[i\left(ky\dfrac{\sqrt{\chi_1\chi_2}}{1+\chi_2}\right)\right]$, где $E \neq 0$, является волной типа шепчущей волны Галилея. Вдоль оси y она имеет нули, определяемые уравнением

$$\operatorname{Re} E\cos(ky\operatorname{Im}\alpha) - \operatorname{Im} E\sin(ky\operatorname{Im}\alpha) = 0$$

В частном случае, когда $\operatorname{Re} E = 0$ и $\operatorname{Im} E \neq 0$, первый нетривиальный нуль y_1 приводится в таблицах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян А. В., Казарян К. Б. Отражение и преломление магнитоупругой сдвиговой волны от упругого слоя. – В сб.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Из-во АН Арм. ССР. Ереван. 1984. С.111-115.
2. Геворкян А. В. Магнитоупругие волны Лява в случае диэлектрического слоя и идеально проводящего полупространства. – В сб.: "Исследования по механике твёрдого деформируемого тела". Из-во АН Арм. ССР. Ереван. 1981. С.81-86.
3. Kaliski S., Rogula D. Rayleigh waves in a magnetic field in the case of perfect conductor. // Proc. of Vibr. Probl.. 1960. № 5. pp. 63 – 80.
4. Белубекян М. В. Щелевые магнитоупругие сдвиговые волны. – В сб.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред", Из-во АН Арм. ССР. Ереван. 1984. С.70-74.
5. Chakraborty S., Chattopadhyay M. On Love-type magnetoelastic surface waves. // Journal of Applied Mechanics (Trans. of the ASME), 1998, v. 65, № 2, pp. 535 539.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.02.2004