

УДК 539.3

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ И СОЛИТОНЫ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ВОЛН РАСШИРЕНИЯ И КРУЧЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ КРУГОВОМ СТЕРЖНЕ

Минасян М.М.

Մ.Մ.Մինասյան

Ոչ գծային առաձգական կտր ծողում ընդարձակման և ոլորման փոխազդող ալիքների պարամետրական ուժեղացումը և սոլիտոնները

Աշխատանքում ուսումնասիրված է Մորնագանի մոդելով ոչ գծային առաձգական ծողում ընդարձակման և ոլորման ալիքների պարամետրական փոխազդեցությունները: Ուսումնասիրման հիմքում ընկած է ալիքային փաթեթների սինքրոն եռախառնայական ռեզոնանսային փոխազդեցությունը: Արտաձգված է այդ փոխազդեցությունը նկարագրող կարճեցված հավասարումների համակարգը: Զննարկվել է ցածր հաճախության ոլորման ալիքների պարամետրական ուժեղացումը և անկայունության վարքը բարձր հաճախության մոնոքրոնատիկ ընդարձակման ալիքի դաշտում: Կատարվել է ալիքային համակարգի միատիպոսն լուծումներ: Բացահայտվել է կրթող կարգի առաձգական մոդուլների նշանի ազդեցությունը սոլիտոնների ինտենսիվության և արագության վրա:

M.M.Minasyan

Parametric Amplification and Solitons in the System of Longitudinal and Torsional Waves in the Nonlinear Elastic Circular Bar

В работе рассматривается трехчастотное взаимодействие волн расширения и кручения в нелинейно-упругом стержне кругового сечения. Принята нелинейная модель Мурнагана. Перемещения в волне расширения даны по Миндлину-Герману. Выведены укороченные нелинейные уравнения на базе нелинейной оптики и фазового синхронизма взаимодействующих волн. Рассмотрено параметрическое усиление низкочастотных волн кручения в поле накачки высокочастотной волны расширения. Выяснен характер неустойчивости усиливаемых волн. Рассмотрено солитонное решение. Выявлена определяющая роль знаков модулей третьего порядка на интенсивности и скорости солитонов. Для стекла-пирекса и никелевой стали проведен численный расчет.

Укороченные уравнения, описывающие нелинейное трехчастотное взаимодействие волн, неоднократно выводились в физике плазмы, в нелинейной оптике и радиофизике, в нелинейной акустике и гидродинамике [1-3].

В данной работе рассматривается пространственно-временная эволюция волн расширения и кручения в нелинейном упругом стержне, выводятся укороченные уравнения связанных волн в квазиоптическом приближении, исследуется параметрическое усиление двух связанных волн в поле третьей волны накачки и находятся односолитонные решения в системе трех связанных волн.

1. В цилиндрической системе координат r, θ, z перемещения точек кругового стержня, как и в [4], представим в виде

$$u_z = u(z, t), u_r = rw(z, t)/a, u_\theta = r\theta(z, t) \quad (1.1)$$

где z — осевая координата, a — радиус цилиндра. Первые два соотношения соответствуют теории Миндлина-Германа [5].

Будем считать, что стержень изготовлен из нелинейно-упругого тела Мурнагана, внутреннюю энергию которого представим в виде [6]

$$U = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + \frac{A}{3} I_3 + B I_1 I_2 + \frac{C}{3} I_1^3 \quad (1.2)$$

$$I_1 = \varepsilon_{kk}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad I_3 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}, \quad \varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$$

A, B, C — упругие модули третьего порядка, I_i — инварианты тензора малых деформаций (запятые в индексе далее означают дифференцирование по координатам и времени).

С учетом (1.2) для внутренней энергии получим выражение

$$U = \frac{\lambda + 2\mu}{2} u_{,z}^2 + \frac{8\lambda}{a} u_{,z} w + \frac{2(\lambda + \mu)}{a^2} w^2 + \frac{\mu r^2}{2a^2} w_{,z}^2 + \frac{\mu r^2}{2} \theta_{,z}^2 + \left[\frac{Ar^2}{4} \left(u_{,z} + \frac{w}{a} \right) + \frac{Br^2}{2} \left(u_{,z} + \frac{2w}{a} \right) \right] \theta_{,z}^2 + \dots \quad (1.3)$$

в котором не выписаны те нелинейные кубические члены, которые не входят в окончательные уравнения. Функция Лагранжа, осредненная по поперечному сечению стержня, получается в виде

$$L = \frac{\rho}{2} \left(u_{,t}^2 + \frac{1}{2} w_{,t}^2 + \frac{1}{2} \theta_{,t}^2 \right) - \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2} u_{,z}^2 + \frac{\mu}{4} w_{,z}^2 + \frac{\mu}{4} a^2 \theta_{,z}^2 + \frac{2\lambda}{a} w u_{,z} + \frac{2(\lambda + \mu)}{a^2} w^2 \right] - \left[\frac{A + 2B}{8} a^2 u_{,z} + \frac{A + 4B}{8} a w \right] \theta_{,z}^2 \quad (1.4)$$

Отметим, что заменой $A + 2B$ и $A + 4B$ на $2(\lambda + 2\mu)$ и $2(\lambda + \mu)$ (1.4) переходит в функцию Лагранжа для линейного тела при конечных деформациях [4].

Из принципа Гамильтона получим систему нелинейных уравнений

$$\rho u_{,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{,zz} - \frac{2\lambda}{a} w_{,z} = \frac{a^2(A + 2B)}{8} (\theta_{,z}^2)_{,z} \quad (1.5)$$

$$\rho w_{,tt} - \mu w_{,zz} + \frac{4\lambda}{a} u_{,z} + \frac{8(\lambda + \mu)}{a^2} w = -\frac{A + 4B}{7} a \theta_{,z}^2 \quad (1.6)$$

$$\rho \theta_{,tt} - \mu \theta_{,zz} = \frac{A + 2B}{2} (u_{,z} \theta_{,z})_{,z} + \frac{A + 4B}{2a} (w \theta_{,z})_{,z} \quad (1.7)$$

Как видно из системы (1.5)-(1.7), в линейном приближении волны расширения, представленные осевыми и радиальными перемещениями u, w , из-за различия в поляризованности не взаимодействуют с волнами кручения θ . Однако с учетом нелинейности эти волны уже взаимосвязаны.

Дисперсионное уравнение линейных волн расширения получается в виде

$$X(\omega, k)Y(\omega, k) - 8\lambda^2 k^2 / a^2 = 0 \quad (1.8)$$

$$X(\omega, k) = \rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2 \quad Y(\omega, k) = \rho\omega^2 - \mu k^2 - 8(\lambda + \mu)/a^2 \quad (1.9)$$

Уравнение (1.8) определяет две ветви из бесконечного числа ветвей из точного решения Похгамера-Кри [5]. Для первой ветви имеем

$$\omega^2 = \frac{c_0^2 k^2}{4m} \left[3 - 4\nu + \frac{8}{a^2 k^2} - \sqrt{\left(\frac{8}{a^2 k^2} - 1 \right)^2 + \frac{128\nu^2}{a^2 k^2}} \right] \quad (1.10)$$

где $m = (1 + \nu)(1 - 2\nu)$, ν — коэффициент Пуассона, $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ — "стержневая" скорость. Эта ветвь достаточно близка к точной во всем диапазоне изменения длины волны. В теории Миндлина-Германа для лучшего совпадения первых ветвей во второе линейное уравнение вводятся поправочные коэффициенты, мало отличающиеся от единицы. Для качественной картины нелинейных взаимодействий основной волны расширения с волнами кручения эти поправки несущественны.

Решение системы (1.5)-(1.7) в квазиоптическом приближении представим в виде

$$\begin{aligned} u(z, t) &= U(z, t) \exp i(\omega t - kz) + k.c. \\ w(z, t) &= W(z, t) \exp i(\omega t - kz) + k.c. \\ \theta(z, t) &= \Theta(z, t) \exp i(\omega t - kz) + k.c. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Считая комплексные амплитуды квазимонохроматических волн U, W, Θ медленно меняющимися функциями в пространстве и во времени, из первых двух уравнений системы (1.5)-(1.7) с учетом (1.9) получим

$$\begin{aligned} 2\rho\omega i \frac{\partial U}{\partial t} + 2ki(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{2\lambda}{a} \frac{\partial W}{\partial z} - X(\omega, k)U + \frac{2i\lambda k}{a} W &= \\ = \left[\frac{a^2(A + 2B)}{8} \theta_{,z}^2 \right]_{,z} \exp(-i\Delta\varphi) \\ 2\rho\omega i \frac{\partial W}{\partial t} + 2ik\mu \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{4\lambda}{a} \frac{\partial U}{\partial z} - Y(\omega, k)W - \frac{4\lambda ik}{a} U &= \\ = - \left[\frac{A + 4B}{4} a \theta_{,z}^2 \right]_{,z} \exp(-i\Delta\varphi) \\ \Delta\varphi &= i(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Чтобы выделить первую ветвь волн расширения, удобно перейти к нормальным волнам [2]. Для этого вводим функцию A_1 так, чтобы

$$U = \frac{Y}{X + Y} A_1, \quad W = \frac{-4\lambda ik}{a(X + Y)} A_1, \quad \left(A_1 = U + \frac{iaX}{4\lambda k} W \right) \quad (1.13)$$

Из системы (1.12) для A_1 получим уравнение

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{a^2}{2\rho\omega i} \left[\frac{A+2B}{8} (\theta_{:,z}^2)_{:,z} - \frac{iX}{4\lambda k} \frac{A+4B}{4} \theta_{:,z}^2 \right] \exp(-i\Delta\varphi) \quad (1.14)$$

$$v_1 = \frac{\mu kX + (\lambda + 2\mu)kY + 8\lambda^2 k/a^2}{\rho\omega(X+Y)}$$

где $v_1 = d\omega/dk$ — групповая скорость волны расширения.

Приняв условие фазового синхронизма для резонансной тройки расширение-кручение-кручение

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad k_1 = k_2 + k_3 \quad (1.15)$$

из уравнений (1.14) и (1.7) с учетом (1.8), (1.9) получим систему для трех связанных волн

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} &= \gamma_1 A_2 A_3, \quad \frac{\partial A_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} = \gamma_2 A_1 A_3^* \\ \frac{\partial A_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial A_3}{\partial z} &= \gamma_3 A_1 A_2^* \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{k_1 k_2 k_3}{8\rho\omega_1} n, \quad \gamma_2 = -\frac{k_1 k_2 k_3 Y}{4\rho\omega_2(X+Y)} n, \quad \gamma_3 = -\frac{k_1 k_2 k_3 Y}{4\rho\omega_3(X+Y)} n, \\ n &= A + 2B + \frac{A+4B}{2\lambda k_1} X, \quad v_2 = c_1, \quad v_3 = -c_1, \quad c_1^2 = \mu/\rho \end{aligned} \quad (1.17)$$

(Звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины).

Система уравнений (1.15) и описывает пространственно-временную эволюцию нелинейно-связанных волн расширения и кручения. Свойства взаимодействий всецело определяются величинами и знаками групповых скоростей v_j и коэффициентов нелинейных связей γ_j [1]. В нашем случае γ_2 и γ_3 имеют одинаковый знак — противоположный знаку γ_1 . k_2 и k_3 имеют противоположные знаки и один из них того же знака, что и k_1 . В таком же отношении находятся знаки групповых скоростей. В силу симметрии и для определенности будем считать v_1 и k_1 положительными. Итак, речь пойдет о взаимодействии высокочастотной попутной (вдоль оси x) волны расширения с попутной и встречной низкочастотными волнами кручения.

Поскольку фазовая скорость волны расширения меньше объемной скорости упругой волны $\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, то согласно (1.9) $X < 0, Y < 0$ и $Y/(X+Y) > 0$.

С учетом (1.10) имеем

$$\frac{Y}{X+Y} = \frac{1}{2} + \frac{8 - a^2 k_1^2}{2\sqrt{(8 - a^2 k_1^2)^2 + 128a^2 k_1^2 v_1^2}} \quad (1.18)$$

$$\frac{X}{2\lambda k_1^2} = \frac{8 - a^2 k_1^2 - \sqrt{(8 - a^2 k_1^2)^2 + 128 a^2 k_1^2 v^2}}{8 a^2 k_1^2 v} \quad (1.19)$$

при этом (1.18) монотонно убывает от 1 до 0, а (1.19) — от $-v$ до $-1/4v$ при изменении ak_1 от 0 до ∞ . Таким образом, после выбора знаков v_1 и k_1 знаки коэффициентов нелинейной связи γ_j определяются знаком n , т.е. модулями третьего порядка A, B .

В табл. 1 приведены заимствованные из [6] материальные данные для некоторых материалов (приведены средние значения).

Таблица 1

Материал	ρ , г/см ³	ν	$c_l \times 10^{-5}$ см/с	$c_t \times 10^{-5}$ см/с	$c_0 \times 10^{-5}$ см/с	$A \times 10^{-1}$ дин/см ²	$B \times 10^{-1}$ дин/см ²
Полистирол	1.46	0.37	2.35	1.12	2.05	-1.00	-0.83
Железо армко	7.7	0.29	5.89	3.21	5.10	110	-158
Стекло пирекс	2.32	0.24	5.64	3.28	5.17	42	-11.8
Никелевая сталь	8.4	0.31	5.81	3.04	4.92	-73	-22.5

Как видно из табл. 1, упругие модули третьего порядка для приведенных материалов резко отличаются и по знакам, и по величинам так, что величина n , определяющая знаки γ_j , может быть и положительной и отрицательной в зависимости от материала и длины волны расширения.

2. Рассмотрим параметрическое усиление волн кручения в заданном поле монохроматической волны при фазовом синхронизме [1]. Считая амплитуду волны накачки вещественной $A_1 = A_0 = \text{const}$, для амплитуд огибающих волн кручения получим систему уравнений

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} + c_t \frac{\partial A_2}{\partial z} = \gamma_2 A_0 A_3^*, \quad \frac{\partial A_3}{\partial t} - c_t \frac{\partial A_3}{\partial z} = \gamma_3 A_0 A_2^* \quad (2.1)$$

Исключив из системы A_3 , для A_2 получим уравнение

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} = \gamma_2 \gamma_3 A_0^2 A_2 \quad (2.2)$$

Такое же уравнение получается и для A_3 .

Представив решение (2.2) через его спектральные компоненты $\exp i(\Omega t - qz)$, где Ω — частотная расстройка и q — поправка к волновому числу, получим

$$\Omega^2 - c_t^2 q^2 + \Gamma_0^2 = 0, \quad (\Gamma_0^2 = \gamma_2 \gamma_3 A_0^2 > 0) \quad (2.3)$$

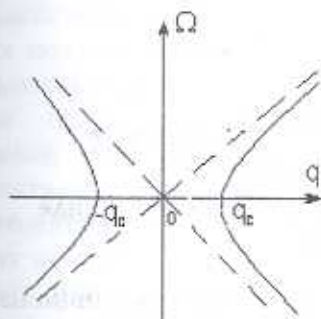
На фиг. 1 представлен график зависимости $\Omega(q)$. Как видно, вещественным q из интервала $(-q_c; q_c)$, где $q_c = \Gamma_0 / c_t$,

соответствуют мнимые Ω . Это означает, что в данной полосе поправок к волновому числу k_2 из окрестности фазового синхронизма попутная волна кручения неустойчива. Для выяснения характера неустойчивости (абсолютной или конвективной), применим известные критерии (Старрока) [7].

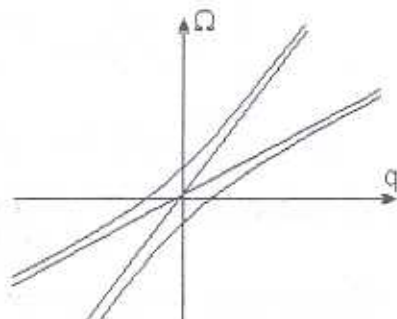
Функция $q(\Omega)$ в комплексной плоскости Ω имеет точку ветвления $-i\Gamma_0$ в нижней полуплоскости. Поскольку в этой точке "встречаются" волны противоположных направлений, то неустойчивость имеет абсолютный характер.

Мы рассмотрели случай, когда волна накачки не истощается. Если же волна накачки представляет мощный волновой пакет, то уравнение (2.2) описывает лишь начальную стадию усиления волн кручения. Поскольку в системе отсутствуют потери, то согласно закону сохранения энергии (а также закону Мэнли-Роу [1,2]) высокочастотная волна накачки, передавая свою энергию низкочастотным волнам, ослабевает, т.е. имеем распадную неустойчивость волны расширения. Для описания полной картины следует решить систему (1.16), т.к. все три волны взаимосвязаны. Хотя построение точного решения этой задачи в общей постановке затруднительно, однако найдено много решений частного характера, а также разработаны различные приближенные и асимптотические методы [1,2,7].

В случаях пространственной или временной однородности, т.е. при $\partial/\partial t = 0$ или $\partial/\partial z = 0$ система допускает точное решение в эллиптических функциях. В работе [3] это решение использовано в задаче о взаимодействии изгибных и продольных волн в тонкой упругой пластинке, а в работе [4] — в задаче о взаимодействии волн расширения и кручения в упругой круговой пластинке. В обеих работах рассмотрена геометрическая нелинейность и пространственная однородность волн.



Фиг. 1



Фиг. 2

В случае, когда волной накачки является одна из волн кручения, то имеем взаимодействие волн суммарной и разностной частот. В этих случаях $\gamma_1\gamma_2 < 0, \gamma_1\gamma_3 < 0$ и система волн стабильна:

промодулированная волна накачки не истощается, а сигнальная и холостая волновые пакеты не усиливаются. В результате взаимодействия двух последних волн происходит их пространственно-временное биение. На фиг. 2 представлен график зависимости $q(\Omega)$, когда волной накачки является встречная волна кручения. Здесь вещественным q соответствуют вещественные Ω и, наоборот. Такую устойчивость принято называть снятием вырождения. Если накачка на попутной волне кручения, то система опять стабильна. График зависимости $q(\Omega)$ имеет вид фиг. 1, однако с перестановкой осей координат. То, что в этом случае вещественным Ω в некоторой полосе будут соответствовать мнимые q , то такую устойчивость принято называть непропусканьем: сигнальная и холостая волны затухают.

Таким образом, в системе одной высокочастотной волны расширения и двух волн кручения в круговом нелинейно-упругом стержне параметрически могут усиливаться только волны кручения при распадной неустойчивости высокочастотной волны расширения.

3. Как известно в нелинейной оптике и плазме, при трехчастотном взаимодействии волн и при расстройке групповых скоростей волн в среде с квадратичной нелинейностью могут распространяться стационарные волны (солитоны). В таких системах обмен энергиями между солитонами волнами не происходит, или как говорят, взаимодействие волн носит реактивный характер [1].

Рассмотрим односолитонные решения системы (1.16). Если начальная фазовая модуляция волновых пакетов отсутствует, то амплитуды волн можно считать вещественными. Прежде введем безразмерные величины

$$t = a\tau/c_r, \quad z = a\xi, \quad A_i = \Lambda_i B_i, \quad v_i = c_i b_i, \quad \zeta = c_1/c_r, \quad (\Lambda_1 = 2\pi/k_1) \quad (3.1)$$

и представим систему в виде

$$\frac{\partial B_j}{\partial \tau} + b_j \frac{\partial B_j}{\partial \xi} = \beta_j \frac{B_1 B_2 B_3}{B_j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

$$\beta_1 = -\frac{\pi n}{16 \mu} (\zeta - \zeta^{-1}) a k_1, \quad \beta_{2,3} = \frac{\pi n}{4 \mu} \frac{Y}{X + Y} (\zeta \mp 1) a k_1$$

Стационарное решение системы (3.2) представим в виде

$$B_j = B_j(\xi - D\tau)$$

где D — безразмерная (относительно к c_r) скорость стационарных волн.

Односолитонное решение (стационарные волны с исчезающей амплитудой при $\xi \rightarrow \pm\infty$) существует только на двух частотах ("светлые солитоны"), а на третьей частоте распространяется так

называемый "темный" солитон типа ударной волны. "Темный" солитон представляется функцией

$$B_T = B_{0T} \operatorname{th}(\xi - D\tau/\xi_c) \quad (3.3)$$

а "светлые" солитоны — функцией

$$B_c = B_{0c} \operatorname{sech}(\xi - D\tau/\xi_c) \quad (B_c = B_{0c}/\operatorname{ch}(\xi - D\tau/\xi_c)) \quad (3.4)$$

где ξ_c — характерная ширина солитонов. Из системы (3.1) получим

$$(b_T - D)B_{0T}^2 = \beta_T B_{01} B_{02} B_{03} \xi_c, \quad (D - b_j)B_{0j}^2 = \beta_j B_{01} B_{02} \xi_{cb_{03}} \quad (j \neq T) \quad (3.5)$$

Система (3.5) содержит пять неопределенных величин — $B_{01}, B_{02}, B_{03}, D, \xi_c$.

Поскольку "темный" солитон не может образоваться из локального волнового пакета, то его амплитуду следует считать заданной и тогда амплитуды и скорость "светлых" солитонов можно выразить через параметры B_{0T} и ξ_c .

Пусть "темный" солитон представляет волну расширения. Тогда из системы

$$\begin{aligned} (b_1 - D)B_{01} &= \beta_1 B_{02} B_{03} \xi_c, & (D - 1)B_{02} &= \beta_2 B_{01} B_{03} \xi_c \\ (D + 1)B_{03} &= \beta_3 B_{01} B_{02} \xi_c \end{aligned} \quad (3.6)$$

для скорости солитонов получим

$$D = \pm \sqrt{1 + \beta_2 \beta_3 B_{01}^2 \xi_c^2} \quad (3.7)$$

при этом, если $\beta_1 < 0$, ($\beta_{2,3} > 0$), то $D > b_1$, а если $\beta_1 > 0$, ($\beta_{2,3} < 0$), то $D < -1$.

Для амплитуд получим

$$B_{02}^2 = B_{01}^2 \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{b_1 - D}{D - 1}, \quad B_{03}^2 = B_{01}^2 \frac{\beta_3}{\beta_1} \frac{b_1 - D}{D + 1} \quad (3.8)$$

4. Итак, нелинейная упругость помимо искажения профиля волн приводит еще к тому, что эти волны взаимодействуют. Кроме теоретического интереса результаты исследований по такому взаимодействию могут быть использованы для определений упругих модулей третьего порядка. Они могут также использоваться для создания различных параметрических устройств.

Для измерения модулей третьего порядка необходимо проведение по крайней мере трех независимых экспериментов. Сложность проблемы заключается в том, что, как правило, из экспериментов нельзя получить каждый из модулей отдельно [6]. Поэтому особенно значимы те теоретические результаты, которые содержат два, а в лучшем случае один из трех модулей. В частности, в полученных в данной работе результатах не входит модуль C .

Акустические исследования нелинейных свойств требуют большой интенсивности волн накачки: при малых интенсивностях влияние затухания велико. Современная техника позволяет получить высокие интенсивности уже в области ближнего

ультразвука ($\sim 10^5$ гц), а в последние годы интенсивно осваивается область гиперзвука ($\sim 10^9$ гц).

Приведем некоторые вычисления.

Наиболее простые соотношения получаются при $ak_1 = \sqrt{8}$. При этом получим

$$c_1 = \sqrt{2}c_z, \quad v_1 = 3\sqrt{2}c_z/4, \quad Y/X + Y = 1/2, \quad n = A/2 \quad (4.1)$$

Интересно, что в данном случае из трех модулей третьего порядка остался только один — А. Безразмерные коэффициенты нелинейной связи получаются в виде

$$\beta_1 = -\frac{\pi n}{8 \mu}, \quad \beta_{2,3} = \frac{\pi n}{4 \mu} (2 \mp \sqrt{2}) \quad (4.2)$$

а из соотношений (3.7) и (3.8) получим

$$\left(\frac{B_{02}}{B_{01}}\right)^2 = 2(2 - \sqrt{2}) \frac{D - 3\sqrt{3}/4}{D - 1}, \quad \left(\frac{B_{03}}{B_{01}}\right)^2 = 2(2 + \sqrt{2}) \frac{D - 3\sqrt{3}/4}{D + 1}$$

$$D = \pm \sqrt{1 + \beta_2 \beta_3 \zeta_s B_{01}} \quad (4.3)$$

Табл. 2 представляет значения частот (в Гц-ах) и коэффициентов β_i для двух материалов с разными знаками модуля А. Для радиуса стержня принято значение $a = 0.2 \times 10^{-2}$ м. Для длины волны расширения получается значение $\Lambda_1 = 4.4 \times 10^{-3}$ м.

Таблица 2

материал	ω_1	ω_2	ω_3	β_1	β_2	β_3
Стекло пирекс	2.8×10^6	2.7×10^6	0.1×10^6	- 0.82	0.97	5.63
Никелевая сталь	2.6×10^6	2.5×10^6	0.1×10^6	0.46	- 0.54	- 3.15

Табл. 3 представляет значения скоростей солитонов и отношений B_{02}/B_{01} и B_{03}/B_{01} для тех же материалов и вычисленных по формулам (4.3).

Таблица 3

материал	$\zeta_s B_{01}$	D	B_{02}/B_{01}	B_{03}/B_{01}
Стекло пирекс	0.20	-1.1	1.10	12.15
	0.28	-1.2	1.10	8.78
никелевая сталь	0.35	1.1	0.67	1.36
	0.51	1.2	0.91	0.66

Из табл. 3 видно существенное значение знака модуля А. Для стекла он положителен. В результате интенсивности солитонов крутильных волн больше интенсивности "темного" солитона волны расширения. Для стали же — наоборот. В обоих случаях направле-

ние распространения солитонов совпадает с направлением более интенсивной солитонной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988. 230с.
2. Вильгельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергиздат, 1981. 222с.
3. Kovrigine D.A., Potapov A.I. On nonlinear oscillations of a thin bar. // Arch. Appl. Mech. 1996. 66. pp.168-176.
4. Минасян М.М. Нелинейное взаимодействие волн расширения и кручения в упругом круговом стержне. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №1, С. 62-68.
5. Эйбрамсон Х.Н., Пласс Х. Дж., Риппергер Э.А. Распространение волн напряжения в стержнях и балках. // Проблемы механики (сб/ст), вып. 3, М.: ИЛ. 1961. С.24-90.
6. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука. 1966. 520с.
7. Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука. 1981. 175с.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
24.09.2003