ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №4, 2003 Механика

УДК 539.3

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЖЕСТКОСТИ, УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Гнуни В.Ц.

Վ.Ց.Գնունի
Երկակի, հաստատուն փոքր կորության թաղանթների կոշտության, կայունության և տատանումների բնութագրիչների վրա լայնական սահքերի ազդեցության վերլուծությունը

Աշխատանքում երկակի հաստատուն փոքր կորության թաղանթների կոշտության, տատանումների և կայունության խնդիրների օրինակների վրա կատարվում է լայնական սահքերի հաշվառման ազդեցության վերլուծությունը թաղանթի հաշվարկային բնութագրիչների վրա: Տրանսվերսալ իզոտրոպ նյութից պատրաստված, հոդակապորեն ամրացված թաղանթի համար գտնված են թաղանթի կորության բնութագրիչի սահմանները, որոնցից հետո լայնական սահքերի ազդեցությունը կարելի է անտեսել 5%-ի ճշտությամբ:

V. Ts. Gnuni
Analysis of Influence of Transverse Shear on Rigidness, Stability and Vibration of Shallow Shells of Double Constant Curve

В работе на примерах задач жесткости, колебаний и устойчивости весьма пологих оболочек двоякой постоянной кривизны делается анализ влияния учета поперечных сдвигов на расчетные характеристики. Для радиально опертой по четырем краям оболочки, изготовленной из трансверсально-изотропного материала, найдены границы параметра кривизны оболочки, после которых влиянием учета поперечных сдвигов можно пренебречь с точностью до 5%.

1. Пусть оболочка двоякой постоянной кривизны k_1, k_2 с размерами a, b, h и техническими постоянными материала E, ν, G' загружена давлением

$$q(x,y) = q_1 \sin \lambda_1 x \sin \mu_1 y \qquad \left(\lambda_1 = \frac{\pi}{a},\ \mu_1 = \frac{\pi}{b}\right) \tag{1.1}$$

При (1.1) для наибольшего по координатам x, y прогиба оболочки (прогиб в точке $x = 0{,}5a, y = 0{,}5b$) получается формула [1]

$$w_{11} = q_1 \left[\frac{D\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)^2}{1 + k_{11}} + Eh \frac{\left(k_2\lambda_1^2 + k_1\mu_1^2\right)^2}{\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)^2} \right]^{-1} \tag{1.2}$$

где $D = Eh^3/12\left(1-\nu^2\right), \quad k_{11} = Eh^2\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)/10\left(1-\nu^2\right)G'$

Здесь k_{11} характеризует влияние поперечных сдвигов и приводит к увеличению максимального прогиба оболочки. В случае пластинки [2]

$$w_1 = \frac{q_1}{D\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)^2}\left(1 + k_{11}\right) = w_1^0\left(1 + k_{11}\right)$$

где w_1^0 — наибольший прогиб пластинки по классической теории.

При $k_{11} \le 0.05$ влиянием поперечных сдвигов можно пренебречь уже для пластинок $(k_1 = k_2 = 0)$. В этом случае для относительных толщин

$$\frac{h^*}{a} \le 0{,}225\sqrt{\frac{(1-\nu^2)G'}{(1+\chi^2)E}} \quad (\chi = a/b) \tag{1.3}$$

влияние поперечных сдвигов на максимальный прогиб пластинки не превышает 5% .

В случае квадратной изотропной пластинки $(a = b)$ и при $\nu = 0{,}3$ получается $h^*/a \le 0{,}0941$.

В случае оболочек вклад второго члена в знаменателе (1.2) приводит к уменьшению максимального прогиба w_1 и влиянием поперечных сдвигов можно пренебречь при относительных толшинах больше, чем в (1.3). Требование, чтобы поправка от учета влияния поперечных сдвигов была меньше 5%, приводит к условию

$$\frac{w_1}{w_1^0} = \frac{A+B}{\dfrac{A}{1+k_{11}} + B} \le 1{,}05 \tag{1.4}$$

где w_1^0 — наибольший прогиб оболочки по классической теории

$$A = D\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)^2, \quad B = Eh\frac{\left(k_2\lambda_1^2 + k_1\mu_1^2\right)^2}{\left(\lambda_1^2 + \mu_1^2\right)^2} \tag{1.5}$$

Из (1.4) следует

$$B \ge \frac{20(k_{11} - 0{,}05)}{k_{11} + 1}A \tag{1.6}$$

Здесь следует отметить, что при $k_{11} \le 0{,}05$ влиянием поперечных сдвигов с точностью до 5% можно пренебречь уже для пластинки.

Из условия (1.6), с учетом обозначений (1.5), для параметра кривизны получается

$$\left(k_2 + k_1\chi^2\right)a \ge 12{,}7\left(1+\chi^2\right)^2\frac{h}{a}\sqrt{\frac{k_{11} - 0{,}05}{(1-\nu^2)(1+k_{11})}} \tag{1.7}$$

В случае квадратной в плане $(a = b)$ сферической оболочки $(k_1 = k_2 = 1/R)$, при $\nu = 0{,}3$ из (1.7) получается

$$\frac{a^2}{hR} \ge 26{,}7\sqrt{\frac{k_{11} - 0{,}05}{k_{11} + 1}} \tag{1.8}$$

В табл. 1 в зависимости от k_{11} приведены значения параметра кривизны оболочки a^2/Rh, при котором поправка от учета влияния поперечных сдвигов не превышает 5%.

Последняя строка табл.1 показывает увеличение наибольшего прогиба пластинки при учете влияния поперечных сдвигов по сравнению с классической теорией. Между тем, для оболочек при данных k_{11} влияние учета поперечных сдвигов пренебрежимо с точностью до 5% .

Таблица 1

k_{11}	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
a^2/hR	10.9	14.6	16.9	18.4	19.5	20.3	21.0	21.5
w_1/w_1^0 $R=0$	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00

Определим теперь параметр кривизны оболочки, для которой влиянием первого слагаемого в знаменателе формулы (1.2) можно пренебречь по сравнению со вторым, т.е. пренебрегается влияние моментного состояния на наибольший прогиб оболочки

$$B \geq \frac{20A}{1+k_{11}} \tag{1.9}$$

Из (1.9) для параметра кривизны оболочки получается

$$\left(k_2 + k_1\chi^2\right)a \geq 12{,}7\frac{\left(1+\chi^2\right)^2}{\sqrt{\left(1+k_{11}\right)\left(1-\nu^2\right)}} \tag{1.10}$$

Для сферической оболочки $(k_1 = k_2 = 1/R)$ при $a = b$ и $\nu = 0{,}3$ получается оценка

$$\frac{a^2}{Rh} \geq \frac{26{,}7}{\sqrt{1+k_{11}}} \tag{1.11}$$

При (1.10) оболочку в смысле наибольшего прогиба можно считать безмоментной $w_1 = q_1/B = q_1\left(\lambda_1^2+\mu_1^2\right)^2/Eh\left(k_2\lambda_1^2 + k\mu_1^2\right)^2$, откуда для вышеприведенной сферической оболочки получается $w_1 = q_1R^2/Eh$.

2. Рассмотрим теперь вопрос влияния поперечных сдвигов на частоты свободных колебаний оболочки.

Для частот собственных колебаний оболочки с учетом влияния поперечных сдвигов имеется формула [1]

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h}\left[\frac{D\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}{1+k_{mn}} + Eh\frac{\left(k_1\mu_n^2 + k_2\mu_m^2\right)^2}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\right] \tag{2.1}$$

где $\lambda_m = m\pi/a, \mu_n = n\pi/b$, $m, n -$числа полуволн по направлениям координатных осей $0x, 0y$, $k_{mn} = Eh^2\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)/10\left(1-\nu^2\right)G'$.

Очевидно, что первая (наименьшая) частота собственных колебаний пластинки достигается при $m = n = 1$ и равна

$$\omega_{11} = \omega_{11}^0/\sqrt{1+k_{11}} \quad , \qquad \omega_{11}^0 = \sqrt{\frac{D}{\rho h}}\frac{\pi^2}{a^2}\left(1+\chi^2\right) \tag{2.2}$$

где $\omega_{11}^0 -$первая частота собственных колебаний пластинки, найденной по классической теории.

Учет влияния поперечных сдвигов приводит к уменьшению частот собственных колебаний.

Из (2.2) получается, что при

$$\frac{\omega_{11}^0}{\omega_{11}} = \sqrt{1 + k_{11}} \le 1{,}05 \Rightarrow k_{11} \le 0.1025 \tag{2.3}$$

влиянием поперечных сдвигов на первую частоту собственных колебаний пластинки можно пренебречь.

В случае квадратной $(\chi = 1)$, изотропной пластинки, при $\nu = 0.3$ получается $h^*/a \le 0{,}135$.

В случае оболочек требование 5% точности классической теории приводит к условию

$$\frac{\omega_{mn}^0}{\omega_{mn}} = \sqrt{\frac{A_{mn} + B_{mn}}{\dfrac{A_{mn}}{1 + k_{mn}} + B_{mn}}} \le 1{,}05 \Rightarrow B_{mn} \ge 9{,}76 \frac{k_{mn} - 0{,}1025}{k_{mn} + 1} A_{mn} \tag{2.4}$$

где

$$A_{mn} = D\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2 \quad , \qquad B_{mn} = Eh \frac{\left(k_2\lambda_m^2 + k_1\mu_n^2\right)^2}{\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2} \tag{2.5}$$

Для сферической оболочки $\left(k_1 = k_2 = 1/R\right)$ найдем форму собственных колебаний, при которой достигается первая частота собственных колебаний. Для частот собственных колебаний сферической оболочки

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h}\left[\frac{D\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2}{1 + k_{mn}} + \frac{Eh}{R^2}\right] \tag{2.6}$$

Нетрудно показать, что ω_{mn} – монотонно возрастающая функция от λ_m и μ_n, и следовательно, $\min \omega_{mn} = \omega_{11}$. В этом случае из второй формулы (2.4) для параметра кривизны оболочки получается

$$\frac{a^2}{Rh} \ge 18{,}7\sqrt{\frac{k_{11} - 0.1025}{k_{11} + 1}} \tag{2.7}$$

В табл. 2 в зависимости от k_{11} приведены значения параметра кривизны сферической оболочки a^2/Rh, при котором поправка от учета влияния поперечных сдвигов не превышает 5%

Таблица 2.

k_{11}	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
a^2/Rh	14,0	14.9	15.5	15.9	16.2	16.5	16.7	16.9
$\omega_{11}/\omega_{11}^0$ $R = 0$	0.632	0.577	0.534	0.500	0.471	0.447	0.426	0.408

Как видно из табл.2, учет влияния поперечных сдвигов на первую частоту оказывает более слабое влияние, чем на наибольший прогиб. При изменении k_{11} в достаточно широком диапазоне при значениях параметра кривизны, соответствующих теории весьма пологих оболочек, первая частота собственных колебаний оболочки практически (с точностью до 5%) не меняется при учете влияния поперечных сдвигов. Между тем, для

$k_{11} \in [1,5; 5]$ первая частота собственных колебаний пластинки уменьшается от 1.58 до 2.45 раз.

Отметим, что для квадратной в плане сферической оболочки при

$$\frac{a^2}{Rh} \geq \frac{17,7}{\sqrt{(1+k_{11})(1-\nu^2)}} \tag{2.8}$$

влиянием моментного состояния на первую частоту можно пренебречь и для первой частоты принять

$$\omega_{11} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{2.9}$$

3. Рассмотрим теперь вопрос учета влияния поперечных сдвигов на критическую нагрузку на примере весьма пологой прямоугольной в плане axb сферической оболочки. Пусть оболочка загружена постоянным давлением q, тогда для собственных значений задачи устойчивости получается формула

$$q^{*}_{mn} = \frac{2D}{R}\left[\frac{\lambda_m^2 + \mu_n^2}{1 + k(\lambda_m^2 + \mu_n^2)} + \frac{\alpha}{\lambda_m^2 + \mu_n^2}\right] \tag{3.1}$$

где

$$\alpha = Eh/R^2 D = 12(1-\nu^2)/h^2 R^2 \ , \quad k = Eh^2/10(1-\nu^2)G' \tag{3.2}$$

Нетрудно показать, что наименьшее значение q^{*}_{mn} достигается при

$$\lambda_m^2 + \mu_n^2 = \sqrt{\alpha}/(1 - k\sqrt{\alpha}) \tag{3.3}$$

и критическое значение давления –

$$q_{\text{кр}} = \frac{4D}{R}\sqrt{\alpha}\left(1 - \frac{1}{2}k\sqrt{\alpha}\right)$$

или с учетом обозначений (3.2)

$$q_{\text{кр}} = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}R^2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}\,E}{10\sqrt{1-\nu^2}\,G'}\frac{h}{R}\right) \tag{3.4}$$

В случае оболочки из изотропного материала при $\nu = 0.3$

$$q_{\text{кр}} = 1{,}21E\frac{h^2}{R^2}\left(1 - 0{,}472\frac{h}{R}\right) \tag{3.5}$$

Из формулы (3.4) видно, что в отличие от задач жесткости, собственных колебаний, в задаче устойчивости сферической оболочки при внешнем давлении, поправка от учета влияния поперечных сдвигов имеет порядок h/R, а не h^2/a^2.

В случае весьма пологой сферической оболочки из изотропного материала поправка от учета поперечных сдвигов менее 2.5% , т.к. для пологой оболочки $h/R \leq 1/20$.

В случае оболочки из трансверсально-изотропного материала только при $E/G' > 110$ учет влияния поперечных сдвигов может повлиять на значение критической нагрузки.

4. На примере одномерной задачи изгиба длинной пластинки

$(b >> a)$ оценивается влияние учета поперечных сдвигов на напряженное состояние.

Пусть пластинка по длинным сторонам $(x = 0,\ y = a)$ шарнирно оперта и загружена давлением $q = q_1 \sin\lambda_1 x$, тогда для определения ненулевых напряжений из [1] можно получить формулы

$$\sigma_{11} = \frac{12a^2 z}{\pi^2 h^3}\left[1 + k_1 - 5k_1\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{3h^2}\right)\right] q_1 \sin\lambda_1 x, \quad \left(k_1 = \frac{\pi^2 E h^2}{10(1-\nu^2)a^2 G'}\right)$$

$$\sigma_{13} = \frac{6a}{\pi h}\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) q_1 \cos\lambda_1 x \qquad (4.1)$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{12z}{h}\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{3h^2}\right)\right] q_1 \sin\lambda_1 x\ .$$

Следует отметить, что значения σ_{13}, σ_{33} не отличаются от соответствующих значений классической теории, а значение σ_{11} не удовлетворяет уравнению равновесия в напряжениях

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z} = 0 \qquad (4.2)$$

причем наибольшая ошибка $(x = 0, y = a, z = \pm h/2)$ по абсолютному значению равна

$$\frac{ak_1}{\pi h} = \frac{\pi E h}{10(1-\nu^2)aG'} \qquad (4.3)$$

что на порядок больше поправки от учета влияния поперечных сдвигов.

Отметим также, что поправка от учета влияния поперечных сдвигов на наибольшее значение нормального напряжения $\sigma_{11}(0{,}5a : 0{,}5h)$

$$\max_{x,\,z} \sigma_{11} = \frac{6a^2}{\pi^2 h^2}\left(1 + \frac{k_1}{6}\right) \qquad (4.4)$$

в шесть раз меньше, чем на наибольший прогиб и для изотропной пластинки влиянием поперечных сдвигов можно пренебречь уже при $h/a \geq 0{,}326$.

С целью обеспечения удовлетворения уравнения (4.2) следует σ_{13} определить не по формуле (4.1)

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right)\varphi(x)$$

что принято на стадии гипотез, а из (4.2) при значении σ_{11} по первой формуле (4.1), откуда

$$\sigma_{13} = \frac{6a}{\pi h}\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) - \frac{1}{96}k_1\left(1 - 24\frac{z^2}{h^2} + 80\frac{z^4}{h^4}\right)\right] q_1 \cos\lambda_1 x \qquad (4.5)$$

Наибольшие значения $\sigma_{13}(0,0) = \sigma_{13}(a,0)$, найденные по формулам (4.1), (4.5), суть

$$\sigma_{13} = \frac{3a}{2\pi h}, \quad \sigma_{13} = \frac{3a}{2\pi h}\left(1-\frac{k_1}{24}\right), \text{ если } k_1 \le 4 \tag{4.6}$$

При $k_1 = \pi^2 Eh^2/10(1-\nu^2)G'a^2 > 4$ наибольшее значение σ_{13} достигается при

$$\frac{z}{h} = \pm\sqrt{0{,}15k_1 - 0{,}6} \tag{4.7}$$

Условие (4.7) для изотропной пластинки при $\nu = 0{,}3$ дает $h/a > 1{,}19$, что бессмысленно. Однако, для пластинки из трансверсально-изотропного материала при $\nu = 0{,}3,\ k_1 > 4$, $h\sqrt{E}/a\sqrt{a} > 1{,}92$ и относительных толщинах $h/a = 1/3,\ 1/4,\ 1/5$, для E/G' соответственно получается $E/G' > 33{,}2 : 59{,}0 : 92{,}2$.

В случае $k_1 > 4$ уменьшение наибольшего значения σ_{13}, найденного по формуле (4.5), становится существенным по сравнению со значением по второй формуле (4.1).

В заключение следует отметить, что вышеизложенное не относится к задачам распространения упругих волн, где учет влияния поперечных сдвигов необходим.

ЛИТЕРАТУРА

1.Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 440 с.
2.Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластинок. М.: Физматгиз. 1967. 360 с.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
19.08.2003