

УДК 539.3

ИЗГИБ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Баблоян А.А, Бегларян А.Г.

Ա.Հ. Բաբլոյան, Ա.Գ. Բեգլարյան

Անիզոտրոպ շերտի ծռումը

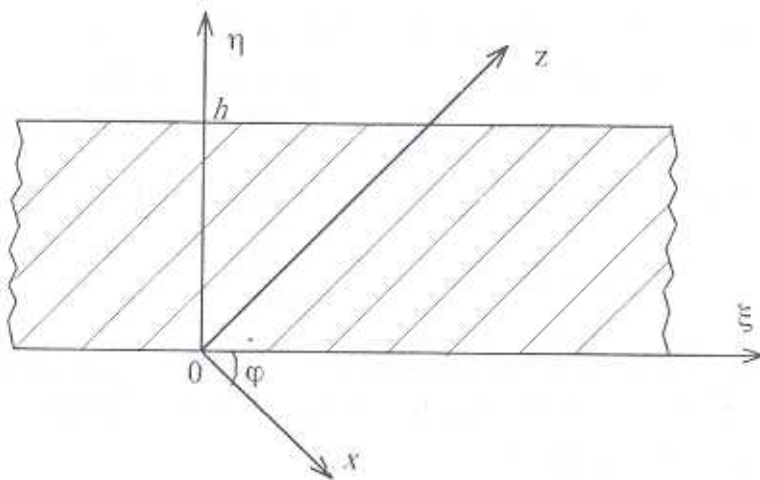
Ստաված է առաձգականության տեսության հավասարակշռության հավասարումների ընդհանուր լուծումը ուղղաձորեկ անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) շերտի համար: Որպես օրինակ, ուսումնասիրվում է անիզոտրոպ շերտի ծռումը նորմալ ուժերով անիզոտրոպիայի գլխավոր առանցքների տարբեր ուղղությունների դեպքում:

A.H. Babloyan, A.G. Beglaryan

Bending of Anisotropic Layer

Приводится общее решение уравнений равновесия теории упругости для прямолинейно-анизотропной (неортогтропной) полосы. В качестве конкретного примера изучается изгиб анизотропной полосы нормальными силами при различных направлениях главных осей анизотропии.

Общее решение уравнений равновесия теории упругости для ортогтропной полосы построено многими авторами [1-3]. Из этого решения путем использования формул поворота координатных осей для напряжений и перемещений можно получить общее решение уравнений равновесия для прямолинейно-анизотропной полосы (идея С.Г.Лехницкого [4]). Аналогичные задачи рассматривались в работах [5-7]. Эти же вопросы в рамках теории пластин и оболочек подробно изучены в работах [8-14].



Փիգ. 1

1. Вывод общего решения. Пусть прямолинейно-анизотропная полоса в координатной системе (ξ, η) занимает область $(-\infty < \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq h)$. Вводим ортогональную систему координат (x, z) , совпадающую с главными направлениями анизотропии (фиг.1). Через Φ обозначим угол между осями Ox и $O\xi$. Тогда переход от одной координатной системы к другой

осуществляется формулами

$$x = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \quad z = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \quad (1.1)$$

В системе (x, z) уравнения равновесия плоско-деформированного состояния анизотропного материала имеют вид [2]

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} &= 0 \\ (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + c_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

а закон Гука будет

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11} \varepsilon_x + c_{13} \varepsilon_z, \quad \sigma_y = c_{12} \varepsilon_x + c_{13} \varepsilon_z, \quad \sigma_z = c_{13} \varepsilon_x + c_{33} \varepsilon_z \\ \tau_{xz} &= c_{44} \varepsilon_{xz}, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Фундаментальную систему решений уравнений равновесия (1.2) ищем в виде

$$u_x = i\gamma_0(\alpha)Z_0, \quad u_z = -Z_0, \quad Z_0 = e^{\lambda_0(x+i\alpha z)} \quad (1.4)$$

Подставляя выражения (1.4) в (1.2), после ряда преобразований, для определения функции $\gamma_0(\alpha)$ получим два равносильных выражения:

$$\gamma_0(\alpha) = \frac{(c_{13} + c_{44}) \cdot \alpha}{c_{11} - \alpha^2 c_{44}} = - \frac{c_{44} - \alpha^2 c_{33}}{(c_{13} + c_{44}) \cdot \alpha} \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что α является корнем биквадратного уравнения

$$\Delta_0(\alpha) = (c_{11} - \alpha^2 c_{44})(c_{44} - \alpha^2 c_{33}) + (c_{13} + c_{44})^2 \alpha^2 = 0 \quad (1.6)$$

Из закона Гука (1.3), в силу (1.4), для напряжений получим выражения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= i\lambda_0 [c_{11} \gamma_0(\alpha) - c_{13} \alpha] Z_0, \quad \sigma_z = i\lambda_0 [c_{13} \gamma_0(\alpha) - c_{33} \alpha] Z_0 \\ \tau_{xz} &= -\lambda_0 c_{44} [\alpha \gamma_0(\alpha) + 1] Z_0, \quad \sigma_y = i\lambda_0 [c_{12} \gamma_0(\alpha) - c_{13} \alpha] Z_0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} E_0(\alpha) &\equiv \alpha^{-1} [c_{11} \gamma_0(\alpha) - c_{13} \alpha] = -\alpha [c_{13} \gamma_0(\alpha) - c_{33} \alpha] = \\ &= c_{44} [\alpha \gamma_0(\alpha) + 1] = c_{44} \frac{c_{13} + \alpha^2 c_{33}}{c_{13} + c_{44}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

если только α — корень уравнения (1.6).

В силу (1.8) формулы для напряжений (1.7) можно представить в виде

$$\sigma_x = i\lambda_0 \alpha E_0(\alpha) Z_0, \quad \sigma_z = -i\lambda_0 \alpha^{-1} E_0(\alpha) Z_0, \quad \tau_{xz} = -\lambda_0 E_0(\alpha) Z_0 \quad (1.7')$$

где λ_0 — произвольный параметр.

Имея напряжения (1.7) и перемещения (1.4) в координатной системе (x, z) , вычислим эти же величины в системе (ξ, η) . Пользуясь формулами поворота координатных осей для перемещений и напряжений из (1.4) и (1.7), получим

$$\begin{aligned} u_\xi &= [i\gamma_0(\alpha) \cos \varphi - \sin \varphi] Z_0, \quad u_\eta = -[i\gamma_0(\alpha) \sin \varphi + \cos \varphi] Z_0 \\ \sigma_\xi &= [i(\alpha \cos^2 \varphi - \alpha^{-1} \sin^2 \varphi) - \sin 2\varphi] E_0(\alpha) \lambda_0 Z_0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\eta} = [i(\alpha \sin^2 \varphi - \alpha^{-1} \cos^2 \varphi) + \sin 2\varphi] E_0(\alpha) \lambda_0 Z_0 \quad (1.9)$$

$$\tau_{\xi\eta} = -[i(\alpha + \alpha^{-1}) \sin \varphi \cos \varphi + \cos 2\varphi] E_0(\alpha) \lambda_0 Z_0$$

Пользуясь формулами (1.1), преобразуем теперь степень экспоненциальной функции Z_0 двумя способами

$$\lambda_0(x + iaz) = \lambda(\beta\eta + i\xi) = \mu(\delta\xi + i\eta) \quad (1.10)$$

$$\lambda = \lambda_0(\alpha \sin \varphi - i \cos \varphi), \quad \beta = \frac{i\alpha \cos \varphi - \sin \varphi}{\alpha \sin \varphi - i \cos \varphi} \quad (1.11)$$

$$\mu = \lambda_0(\alpha \cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \delta = \frac{\cos \varphi + i\alpha \sin \varphi}{\alpha \cos \varphi + i \sin \varphi} \quad (1.12)$$

Совокупность функций (1.9) при произвольных значениях параметра λ (или μ) с учетом формул (1.10)–(1.12) будет представлять полный набор частных решений уравнений равновесия (1.2) в координатах (ξ, η) , если только корни биквадратного уравнения (1.6) не равны между собою ($\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j, i, j = 1+4$). Случай равных корней получается из (1.9)–(1.12) путем предельного перехода, когда $\alpha_i \rightarrow \alpha_j$. Такой предельный переход целесообразно выполнить после окончательного решения конкретных краевых задач.

С целью компактного представления решения системы (1.2) введем обозначения для приведенных упругих постоянных:

$$c_p = \alpha_p^{-1} \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad s_p = \alpha_p^{-1} \sin \varphi - i \cos \varphi$$

$$d_p = [i\gamma_0(\alpha_p) \cos \varphi - \sin \varphi] E_0^{-1}(\alpha_p), \quad e_p = [i\gamma_0(\alpha_p) \sin \varphi + \cos \varphi] E_0^{-1}(\alpha_p)$$

$$\beta_p = \frac{i\alpha_p \cos \varphi - \sin \varphi}{\alpha_p \sin \varphi - i \cos \varphi} = \frac{s_p}{ic_p}, \quad \delta_p = \frac{\cos \varphi + i\alpha_p \sin \varphi}{\alpha_p \cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{c_p}{is_p} \quad (1.13)$$

$$l_p = \frac{1 - \alpha_p^2}{c_p \alpha_p^2} - c_p, \quad m_p = \frac{1 - \alpha_p^2}{s_p \alpha_p^2} - s_p, \quad (p = 1, 2, 3, 4)$$

При обозначениях (1.13) общее решение уравнений равновесия (1.2) в координатах (ξ, η) для полосы $(-\infty < \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq h)$ представляется в виде интеграла (ряда) Фурье

$$u_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^4 d_p A_p(\lambda) e^{\lambda(i\xi + \beta_p \eta)} d\lambda, \quad u_{\eta} = - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^4 e_p A_p(\lambda) e^{\lambda(i\xi + \beta_p \eta)} d\lambda$$

$$\sigma_{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^4 c_p A_p(\lambda) \lambda e^{\lambda(i\xi + \beta_p \eta)} d\lambda, \quad \sigma_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^4 l_p A_p(\lambda) \lambda e^{\lambda(i\xi + \beta_p \eta)} d\lambda \quad (1.14)$$

$$\tau_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^4 s_p A_p(\lambda) \lambda e^{\lambda(i\xi + \beta_p \eta)} d\lambda$$

где $A_p(\lambda)$ -произвольные функции. Решение (1.14) получается из (1.9), (1.11) и первого преобразования (1.10).

Второе решение уравнений равновесия (1.2), позволяющее решать краевые задачи для анизотропной полосы ($0 < \xi < h$, $-\infty \leq \eta \leq \infty$), можно получить из (1.9), (1.12) и второго преобразования (1.10).

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^4 d_p B_p(\mu) e^{\mu(\delta_p \xi + \eta)} d\mu, & u_{\eta} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^4 e_p B_p(\mu) e^{\mu(\delta_p \xi + \eta)} d\mu \\ \sigma_{\xi} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^4 s_p B_p(\mu) \mu e^{\mu(\delta_p \xi + \eta)} d\mu, & \sigma_{\eta} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^4 m_p B_p(\mu) \mu e^{\mu(\delta_p \xi + \eta)} d\mu \\ \tau_{\xi\eta} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^4 c_p B_p(\mu) \mu e^{\mu(\delta_p \xi + \eta)} d\mu \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $B_p(\mu)$ — произвольные функции.

Полученные общие решения (1.14) и (1.15) представлены в виде интегралов (или рядов) Фурье по координатам ξ и η соответственно.

2. Частные решения уравнений равновесия. Рассмотрим только те частные решения уравнений равновесия (1.2), когда перемещения зависят от координат линейным образом:

$$u_{\xi} = a_1 \xi + b_1 \eta + d_1, \quad u_{\eta} = a_2 \xi + b_2 \eta + d_2, \quad (a_3 = b_1 + a_2) \quad (2.1)$$

Отсюда, путем неоднократного использования формул поворота и закона Гука, для напряжений получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= a_1 [c_{11} \cos^4 \varphi + c_{33} \sin^4 \varphi + (0.5c_{13} + c_{44}) \sin^2 2\varphi] + \\ &+ 0.25b_2 [4c_{13} + c_{00} \sin^2 2\varphi] - 0.25a_3 [c_{11} - c_{33} + c_{00} \cos 2\varphi] \sin 2\varphi \\ \sigma_{\eta} &= 0.25a_1 [4c_{13} - c_{00} \sin^2 \varphi] + b_2 [c_{33} \cos^4 \varphi + c_{11} \sin^4 \varphi + \\ &+ (0.5c_{13} + c_{44}) \sin^2 2\varphi] - 0.25a_3 (c_{11} - c_{33} - c_{00} \cos 2\varphi) \sin 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} &= c_{44} [a_3 \cos 2\varphi + (a_1 - b_2) \sin 2\varphi] \cos 2\varphi + 0.25 \{ (c_{11} - 2c_{13} + c_{33}) \times \\ &\times [a_3 \sin 2\varphi + (b_2 - a_1) \cos 2\varphi] - (c_{11} - c_{33})(a_1 + b_2) \} \sin 2\varphi \\ c_{00} &= c_{11} - 2c_{13} + c_{33} - 4c_{44} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для сравнения здесь же приводим формулы напряжений, действующих на площадках с нормальми, совпадающими с главными направлениями анизотропии:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 (c_{11} \cos^2 \varphi + c_{33} \sin^2 \varphi) + b_2 (c_{11} \sin^2 \varphi + c_{33} \cos^2 \varphi) - 0.5a_3 (c_{11} - c_{33}) \sin 2\varphi \\ \sigma_z &= a_1 (c_{33} \sin^2 \varphi + c_{13} \cos^2 \varphi) + b_2 (c_{33} \cos^2 \varphi + c_{13} \sin^2 \varphi) + 0.5a_3 (c_{33} - c_{13}) \sin 2\varphi \\ \tau_{xz} &= c_{44} [a_3 \cos 2\varphi + (a_1 - b_2) \sin 2\varphi]; \quad (\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = \sigma_x + \sigma_z) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим, что все напряжения не зависят от параметров a_2 и b_1 в отдельности, а зависят только от суммы $a_3 = a_2 + b_1$.

На основе формул (2.1)-(2.3) рассмотрим некоторые случаи частных нагружений анизотропного прямоугольника.

Задача 1. Пусть граничные условия анизотропного прямоугольника имеют вид

$$\sigma_{\xi}(\pm l, \eta) = 1, \quad \sigma_{\eta}(\xi, \pm h) = 0, \quad \tau_{\xi\eta}|_{\Gamma} = 0 \quad (2.4)$$

Из приведенных условий для коэффициентов формул (2.1) получим

$$a_1 = \Delta_1/\Delta, \quad b_2 = \Delta_2/\Delta, \quad a_3 = \Delta_3/\Delta_0 \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= 4c_{44}(c_{11}c_{33} - c_{13}^2), \quad \Delta = 4(c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - c_0 \sin^2 2\varphi) \\ \Delta_1 &= 4(c_{11} \sin^2 \varphi + c_{33} \cos^2 \varphi) - c_{00} \sin^2 2\varphi + 2a_3[c_{44}(c_{11} - c_{33}) + c_0 \cos 2\varphi] \sin 2\varphi \\ \Delta_2 &= -4c_{13} - c_{00} \sin^2 2\varphi + 2a_3[c_{44}(c_{11} - c_{33}) - c_0 \cos 2\varphi] \sin 2\varphi \\ \Delta_3 &= 2c_{44}(c_{11} - c_{33}) \sin 2\varphi + c_0 \sin 4\varphi, \quad c_0 = c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - c_{44}(c_{11} + 2c_{13} + c_{33}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5)–(2.6) в формулы (2.1), получим значения перемещений с точностью до жесткого смещения и поворота. Так как

$$\varepsilon_{\xi\eta} = \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \xi} = b_1 + a_2 = a_3$$

то первоначальный прямоугольник после нагружения по закону (2.4) переходит в параллелограмм с углами $90^\circ \pm \operatorname{arctg} a_3$.

Наибольший сдвиг получается при угле $\varphi = \varphi_0$, где φ_0 , согласно (2.6), определяется формулой

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arccos} \left(\frac{-A_0 \pm \sqrt{A_0^2 + 32c_0^2}}{8c_0} \right), \quad A_0 = 2c_{44}(c_{11} - c_{33}), \quad 0 < |\varphi_0| < 90^\circ$$

Задача 2. Пусть граничные условия анизотропного прямоугольника имеют вид

$$\sigma_{\xi}(\pm l, \eta) = \sigma_{\eta}(\xi, \pm h) = 0, \quad \tau_{\xi\eta}|_{\Gamma} = 1 \quad (2.7)$$

Здесь постоянные a_1 , b_2 и a_3 определяются по формулам (2.5), где

$$\Delta_1 = a_3[2c_{44}(c_{11} - c_{33}) \sin 2\varphi + c_0 \sin 4\varphi], \quad \Delta_0 = c_{44}(c_{11}c_{33} - c_{13}^2), \quad \Delta = 4\Delta_3$$

$$\Delta_2 = a_3[2c_{44}(c_{11} - c_{33}) \sin 2\varphi - c_0 \sin 4\varphi], \quad \Delta_3 = c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - c_0 \sin^2 2\varphi$$

3. Первая основная задача теории упругости для анизотропной полосы. Как первое применение полученных общих формул (1.14) и (1.15), приведем решение задачи для анизотропной полосы $(-\infty < \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq h)$, когда на ее границах заданы компоненты напряжений (фиг. 1).

$$\sigma_{\eta}(\xi, h) = f_2(\xi), \quad \tau_{\xi\eta}(\xi, \eta) = g_2(\xi), \quad \sigma_{\eta}(\xi, 0) = f_1(\xi), \quad \tau_{\xi\eta}(\xi, 0) = g_1(\xi), \quad (|\xi| < \infty) \quad (3.1)$$

Будем считать, что граничные функции удовлетворяют условиям равновесия статики, а на бесконечности стремятся к нулю.

Решение задачи ищем в виде (1.14). Удовлетворяя граничным условиям, для определения неизвестных функций $A_p(\lambda)$ получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{p=1}^4 c_p z_p A_p = \tilde{f}_2, \quad \sum_{p=1}^4 s_p z_p A_p = \tilde{g}_2, \quad \sum_{p=1}^4 c_p A_p = \tilde{f}_1, \quad \sum_{p=1}^4 s_p A_p = \tilde{g}_1 \quad (3.2)$$

где

$$\tilde{f}_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \quad \tilde{g}_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} g_k(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \quad z_p = e^{\lambda A_p}$$

$$(k = 1, 2, p = 1, 2, 3, 4) \quad (3.3)$$

Решение системы (3.2) представим в виде

$$\Delta(\lambda)A_p(\lambda) = i\alpha_p [\tilde{f}_2(\lambda)x_{p1} + \tilde{g}_2(\lambda)x_{p2} + \tilde{f}_1(\lambda)x_{p3} + \tilde{g}_1(\lambda)x_{p4}] \quad (3.4)$$

где α_p — корни характеристического уравнения (1.6), а $\Delta(\lambda)$ — основной детерминант системы (3.2)

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)(z_1z_2 + z_3z_4) - \\ & - (\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)(z_1z_3 + z_2z_4) + (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)(z_2z_3 + z_1z_4) \end{aligned} \quad (3.5)$$

функции $x_{pk}(\lambda)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} x_{11} &= (\alpha_2 - \alpha_4)\alpha_3s_3z_3 + (\alpha_4 - \alpha_3)\alpha_2s_2z_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_4s_4z_4 \\ x_{21} &= (\alpha_3 - \alpha_4)\alpha_1s_1z_1 + (\alpha_4 - \alpha_1)\alpha_3s_3z_3 + (\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_4s_4z_4 \\ x_{31} &= (\alpha_4 - \alpha_2)\alpha_1s_1z_1 + (\alpha_1 - \alpha_4)\alpha_2s_2z_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_4s_4z_4 \\ x_{41} &= (\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_1s_1z_1 + (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_2s_2z_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_3s_3z_3 \\ x_{12} &= (\alpha_4 - \alpha_2)\alpha_3c_3z_3 + (\alpha_3 - \alpha_4)\alpha_2c_2z_2 + (\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_4c_4z_4 \\ x_{22} &= (\alpha_4 - \alpha_3)\alpha_1c_1z_1 + (\alpha_1 - \alpha_4)\alpha_3c_3z_3 + (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_4c_4z_4 \\ x_{32} &= (\alpha_2 - \alpha_4)\alpha_1c_1z_1 + (\alpha_4 - \alpha_1)\alpha_2c_2z_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_4c_4z_4 \\ x_{42} &= (\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_1c_1z_1 + (\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_2c_2z_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_3c_3z_3 \\ x_{13} &= (\alpha_2 - \alpha_4)\alpha_3s_3z_2z_4 + (\alpha_4 - \alpha_3)\alpha_2s_2z_3z_4 + (\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_4s_4z_2z_3 \\ x_{23} &= (\alpha_3 - \alpha_4)\alpha_1s_1z_3z_4 + (\alpha_4 - \alpha_1)\alpha_3s_3z_1z_4 + (\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_4s_4z_1z_3 \\ x_{33} &= (\alpha_4 - \alpha_2)\alpha_1s_1z_2z_4 + (\alpha_1 - \alpha_4)\alpha_2s_2z_1z_4 + (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_4s_4z_1z_2 \\ x_{43} &= (\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_1s_1z_2z_3 + (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_2s_2z_1z_3 + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_3s_3z_1z_2 \\ x_{14} &= (\alpha_3 - \alpha_4)\alpha_2c_2z_3z_4 + (\alpha_4 - \alpha_2)\alpha_3c_3z_2z_4 + (\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_4c_4z_2z_3 \\ x_{24} &= (\alpha_4 - \alpha_3)\alpha_1c_1z_3z_4 + (\alpha_1 - \alpha_4)\alpha_3c_3z_1z_4 + (\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_4c_4z_1z_3 \\ x_{34} &= (\alpha_2 - \alpha_4)\alpha_1c_1z_2z_4 + (\alpha_4 - \alpha_1)\alpha_2c_2z_1z_4 + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_4c_4z_1z_2 \\ x_{44} &= (\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_1c_1z_2z_3 + (\alpha_1 - \alpha_3)\alpha_2c_2z_1z_3 + (\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_3c_3z_1z_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Преобразуем к более простому виду основной детерминант $\Delta(\lambda)$ системы (3.2). Рассмотрим два случая:

а) корни уравнения (1.6) действительны: $\alpha_1 = -\alpha_4$, $\alpha_2 = -\alpha_3$. Тогда числа β_p принимают значения $\beta_1 = -\bar{\beta}_3 = e_1 + id_1$, $\beta_2 = -\bar{\beta}_5 = e_2 + id_2$.

При этом функция $\Delta(\lambda)$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & 2\Delta_1(\lambda, \varphi)e^{i(d_1+d_2)\lambda h}; \quad \Delta_1(\lambda, \varphi) = \{4\alpha_1\alpha_2 \cos[(d_1 - d_2)\lambda h] - \\ & - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \operatorname{ch}[(e_1 - e_2)\lambda h] + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \operatorname{ch}[(e_1 + e_2)\lambda h]\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

б) корни уравнения (6) комплексны: $\alpha_1 = -\alpha_4 = -(a + bi)$, $\alpha_2 = -\alpha_3 = -(a - bi)$. Числа β_p при этом будут $\beta_1 = -\bar{\beta}_3 = e_1 + id_1$, $\beta_2 = -\bar{\beta}_4 = e_2 + id_2$. Для функции $\Delta(\lambda)$ получается выражение

$$\Delta(\lambda) = -8\Delta_2(\lambda, \varphi)e^{i(d_1+d_2)\lambda h} \quad (3.8)$$

$$\Delta_2(\lambda, \varphi) = \{a^2 \cos[(d_1 - d_2)\lambda h] + b^2 \operatorname{ch}[(e_1 + e_2)\lambda h] - (a^2 + b^2) \operatorname{ch}[(e_1 - e_2)\lambda h]\}$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что корни функции $\Delta(\lambda)$ расположены симметрично относительно координатных осей комплексной плоскости λ , причем $\lambda = 0$ всегда является четырехкратным корнем $\Delta(\lambda)$. При этом, интегралы (1.14) будут сходящимися только при выполнении условий равновесия статики и "закрепления" произвольной точки (точка отсчета) полосы.

4. Численный пример. В качестве конкретного примера рассматривается задача об изгибе анизотропной полосы под действием нормальных сил (плоское деформированное состояние).

$$f_1(\xi) = \begin{cases} P_1, & (\xi \in (a, b)) \\ 0, & (\xi \notin (a, b)) \end{cases}, \quad f_1(\xi) = \begin{cases} P_2, & (|\xi| < l) \\ 0, & (|\xi| > l) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$g_1(\xi) = g_2(\xi) = 0, \quad P_1(b-a) = P_2l = P_0$$

Преобразование Фурье (3.3) этой нагрузки будет

$$\tilde{f}_1(\lambda) = \frac{P_1}{\pi\lambda^2} (\sin \lambda b - \sin \lambda a), \quad \tilde{f}_2(\lambda) = \frac{P_2}{\pi\lambda^2} \sin \lambda l \quad (4.2)$$

Пусть материал полосы-пьезокерамика ЦТБС-3, для которого

$$c_{11} = 15.51\chi, \quad c_{13} = 8\chi, \quad c_{33} = 13.6\chi, \quad c_{44} = 2.9\chi, \quad \chi = 10^5 \text{ кгс/см}^2 \quad (4.3)$$

Значения корней уравнения (1.6) и числа β_p для этого материала приведены в табл. 1

$(\alpha_p \text{ и } \beta_p)$ для материала (4.3)

Таблица 1

φ	p	1	2	3	4
	α_p	-2.2494	-0.4748	0.4748	2.2494
0	β_p	2.2494	0.4748	-0.4748	-2.2494
$\pi/8$	β_p	1.4107 + 0.9002i	0.5355 - 0.3089i	-0.5355 - 0.3089i	-1.4107 + 0.9002i
$\pi/4$	β_p	0.7424 + 0.6700i	0.7749 - 0.6321i	-0.7749 - 0.6321i	-0.7424 + 0.6700i
$3\pi/8$	β_p	0.5038 + 0.3214i	1.4012 - 0.8083i	-1.4012 - 0.8083i	-0.5038 + 0.3214i
$\pi/2$	β_p	0.4446	2.1063	-2.1063	0.4446

Трансцендентная функция $\Delta(\lambda)$, согласно (3.7), записывается в виде

$$\Delta(\lambda) = 2\Delta_1(\lambda, \varphi) \cdot e^{i\alpha_p \lambda h} \quad (4.4)$$

$$\Delta_1(\lambda, \varphi) = 4.27166 \cdot \cos(a_1 \lambda h) - 7.42097 \cdot \operatorname{ch}(a_2 \lambda h) + 3.14931 \cdot \operatorname{ch}(a_3 \lambda h)$$

Значения параметров a_k ($k = 0 \div 3$), в зависимости от угла φ , приведены в табл. 2.

$\varphi \backslash a_k$	a_0	a_1	a_2	a_3
0	0	0	1.77463	2.72415
$\pi/8$	0.59131	1.20907	0.87515	1.94619
$\pi/4$	0.03791	1.30208	0.032462	1.51727
$3\pi/8$	0.48692	1.12971	0.897396	1.90491
$\pi/2$	0	0	1.66177	2.55090

Для материала (4.3) вычислены корни трансцендентного уравнения (4.4) при различных направлениях главных осей анизотропии. Значения первых шести корней $w_k = \lambda_k h$ функции $\Delta_1(\lambda, \varphi)$ приведены в табл. 3.

Корни $w_k = \lambda_k h$ функции $\Delta(\lambda)$

Таблица 3

$\varphi \backslash k$	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
1	2.94978i	2.24493+3.50168 i	3.20308+3.48366 i	2.23785+3.67903 i	3.15012 i
2	4.06055i	3.74816+5.74557 i	5.23130+5.86284 i	3.75978+6.02264 i	4.33632 i
3	7.00033i	5.17409+8.08192 i	7.27873+8.24750 i	5.17800+8.46845 i	7.47575 i
4	7.82883 i	6.62572+10.4128 i	9.32528+10.6323 i	6.63122+10.9118 i	8.36052 i
5	9.96480 i	8.07230+12.7414 i	11.3719+13.0171 i	8.07773+13.3505 i	10.6415 i
6	11.0676 i	9.51944+15.0710 i	13.4184+15.4019 i	9.52478+15.7910 i	11.8192 i

Дальнейшие вычисления проводились для следующих значений параметров (4.1) и (4.2):

$$l = 0.5 \text{ ед.}, h = 1 \text{ ед.}, a = 5 \text{ ед.}, b = 6 \text{ ед.}, P_1 = 1 \text{ ед.}, P_2 = 2 \text{ ед.}$$

$$\sigma_\xi(\xi, \eta)$$

Таблица 4

$\varphi \backslash \xi \backslash \eta$	0	0.5	1	2	3	4	5	6	
0	0	32.32	30.51	27.12	21.01	15.00	9.00	2.74	-0.26
	0.5	0.095	0.015	-0.044	-0.004	-0.001	-0.007	-0.007	-0.007
	1	-32.61	-30.52	-26.99	-21.01	-15.01	-9.00	-2.75	0.25
$\pi/8$	0	31.57	30.66	28.14	22.19	16.18	10.18	3.55	0.163
	0.5	0.1403	-0.2490	-0.5963	-0.5928	-0.5911	-0.5985	-0.4201	-0.1609
	1	-31.93	-29.27	-25.76	-19.83	-13.82	-7.812	-2.078	0.327
$\pi/4$	0	31.297	30.106	27.222	21.069	15.073	9.0067	3.108	-0.0337
	0.5	0.1812	-0.0403	-0.1365	-0.0349	-0.0379	-0.0373	-0.0391	0.0005
	1	-31.767	-29.860	-26.88	-20.936	-14.927	-8.9269	-2.9098	0.0147
$3\pi/8$	0	31.62	29.67	26.14	20.02	14.02	8.034	2.215	-0.282
	0.5	0.1227	0.1987	0.3602	0.4894	0.4871	0.4834	0.3398	0.1551
	1	-31.94	-30.60	-27.74	-21.98	-15.98	-9.983	-3.653	-0.2213
$\pi/2$	0	32.24	30.45	27.09	21.01	15.00	9.00	2.78	-0.225
	0.5	0.0781	0.0106	-0.0367	-0.0022	-0.0003	-0.0051	0.0053	0.0053
	1	-32.46	-30.45	-26.97	21.01	-15.01	-9.00	-2.78	0.224

$$\tau_{\xi\eta}(\xi, \eta), (\tau_{\xi\eta}(\xi, 0) = \tau_{\xi\eta}(\xi, 1) = 0)$$

Таблица 5

φ	$\eta \backslash \xi$								
		0	0.5	1	2	3	4	5	6
θ	0.25	0	0.9820	1.1486	1.1267	1.1249	1.1218	1.1650	-0.0400
	0.5	0	1.2934	1.4876	1.500	1.500	1.500	1.396	0.1033
	0.75	0	1.2050	1.1101	1.1234	1.1251	1.1287	1.0535	0.0715
$\pi/8$	0.25	-0.1056	0.8351	1.0981	1.1267	1.1250	1.1213	1.2330	-0.0011
	0.5	-0.0204	1.3176	1.5274	1.4995	1.4999	1.5018	1.4088	0.0931
	0.75	0.1139	1.3409	1.1411	1.1237	1.1251	1.1276	0.9801	0.0372
$\pi/4$	0.25	-0.0203	0.9030	1.1802	1.1230	1.1252	1.1208	1.1936	-0.0613
	0.5	-0.0007	1.3247	1.5201	1.5001	1.5000	1.4993	1.4123	0.0881
	0.75	0.0215	1.2622	1.0575	1.1270	1.1248	1.1296	1.0140	0.1035
$3\pi/8$	0.25	0.0724	1.038	1.2130	1.1240	1.1251	1.1184	1.1340	-0.0961
	0.5	0.0181	1.3197	1.5017	1.5012	1.5000	1.5029	1.4098	0.0887
	0.75	-0.0785	1.1430	1.0369	1.1252	1.1248	1.1302	1.0815	0.1314
$\pi/2$	0.25	0	0.9924	1.1465	1.1262	1.1249	1.1225	1.163	-0.0363
	0.5	0	1.3061	1.4898	1.499	1.5000	1.4994	1.4031	0.0969
	0.75	0	1.1975	1.1104	1.1240	1.1251	1.1279	1.0587	0.0663

В различных точках полосы при различных ориентациях главных осей анизотропии вычислены значения нормального $\sigma_{\xi}(\xi, \eta)$ и касательного $\tau_{\xi\eta}(\xi, \eta)$ напряжений. Результаты вычислений приведены в табл. 4, 5 соответственно.

В табл. 6 приведены значения относительного прогиба $[v(\xi, \eta) - v(6.0)]$ в различных граничных точках полосы, когда $(-5 \leq \xi \leq 5, \eta = 0 \text{ и } \eta = 1)$.

$$10^5 [v(6.0) - v(\xi, \eta)]$$

Таблица 6

φ	$\eta \backslash \xi$							
		0	0.5	1	2	3	4	5
0	0	18.113	13.245	9.368	3.516	0.989	0.132	0.162
	1	18.182	13.278	9.369	3.517	0.990	0.132	0.169
$\pi/8$	0	27.379	20.426	14.777	6.719	2.231	0.293	0.043
	1	27.471	20.497	14.808	6.748	2.260	0.321	0.066
$\pi/4$	0	37.113	27.960	20.372	9.583	3.484	0.733	0.011
	1	37.226	27.927	20.399	9.610	3.510	0.760	0.028
$3\pi/8$	0	29.450	21.984	15.877	7.249	2.439	0.358	0.045
	1	29.536	22.008	15.946	7.315	2.505	0.424	0.067
$\pi/2$	0	20.954	15.381	10.930	4.656	1.265	0.162	0.048
	1	21.068	15.468	10.985	4.701	1.297	0.171	0.068

Полученные здесь результаты могут быть полезными при расчете деталей машин и строительных конструкций, а также при определении параметров будущего землетрясения методами современных сверхточных геодезических измерений [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезокерамических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5, электроупругость. Киев: Наукова думка. 1989. 230с.
3. Бегларян А.Г. Разработка и совершенствование методов и приборов для автоматизации геодезических деформационных измерений инженерных сооружений и разломов земной коры. /Дисс. на соиск. уч. ст. докт. тех. наук. Ереван. 1997. 104с.
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропных тел. М.: Наука. 1977. 415с.
5. Ray M.C., Bhattacharya R., Samanta B. Exact-solutions for static analysis of intelligent structures. // AIAA J, 1993, V.3. №9. p.1684-1691
6. Brooks S.P., Heyliger P.R. Static behavior of piezoelectric laminates with distributed and patch electrodes. // J. Intelligent Mat. Syst. Struct. V.5. №5. 1994. p.635-646
7. Баблоян А.А., Мелкумян С.А. Смешанная задача электроупругости для пьезокерамического клина с электродами. // Докл. НАН Арм. 1999. Т.99, №1, С.45-51
8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1957. 360с.
9. Амбарцумян С.А., Гнуни В.Ц. О вынужденных колебаниях и динамической устойчивости трехслойных ортотропных пластинок. // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. 1961. №3.
10. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 415с.
11. Белубекян Э.В., Гнуни В.Ц. Оптимальные задачи колебаний анизотропных слоистых цилиндрических оболочек. // Механика полимеров, 1976. №5. С. 871-874.
12. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван. Из-во ЕГУ. 1976. 534с.
13. Агаловян М.А. Краевые задачи на собственные значения для анизотропных тонкостенных тел. / Дисс. на соиск. уч. ст. канд. ф-м. наук. Ереван. 1998. 109с.
14. Бархударян А.М., Бегларян А.Г., Амбарцумян П.В. Гидродинамический нивелир. А.С. 1075075 (СССР)

Ереванский госуниверситет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
2.10.2003