ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №4, 2003 Механика

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Агаловян Л. А., Оганесян Р. Ж.

Լ. Ա. Աղալովյան, Ռ. Ժ. Հովհաննիսյան

Օրթոտրոպ սալերի սեփական տատանումները, երբ դիմային մակերևույթների վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է օրթոտրոպ սալի սեփական տատանումների վերաբերյալ առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը, երբ սալի դիմային մակերևույթներից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուսն ազատ է: Որոշված են լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկաները, սեփական տատանումների հաճախությունները և տատանման ձևերը: Ապացուցված է, որ օրթոտրոպ սալում կարող են առաջանալ երեք տիպի սեփական տատանումներ՝ երկուսը սահքային և մեկը երկայնական:

L. A. Aghalovyan, R. Zh. Hovhannisyan

Free vibrations of orthotropic plates under mixed-boundary conditions on face surfaces

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача теории упругости о собственных колебаниях ортотропных пластин, когда одна из лицевых поверхностей жестко закреплена, а другая свободна. Найдены асимптотики для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Установлены виды собственных колебаний. Доказано, что в ортотропной пластине могут возникнуть собственные колебания трех видов: два сдвиговых и одно продольное. Определены значения частот и формы собственных колебаний.

1. Для определения и анализа напряженно-деформированных состояний тонких тел (балки, стержни, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Статические краевые задачи изотропных и анизотропных тонких тел асимптотическим методом рассмотрены в [1,2]. Метод оказался особенно эффективным для решения неклассических с точки зрения теории пластин и оболочек краевых задач. Была найдена принципиально новая асимптотика для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, которая позволила найти решения новых классов статических и динамических краевых задач [2-7]. Некоторые классы задач о собственных и вынужденных колебаниях полос-балок и пластин рассмотрены в [8-14]. Обзор работ по использованию асимптотического метода для определения напряженно-деформированных состояний тонких тел при статических и динамических воздействиях содержится в [15].

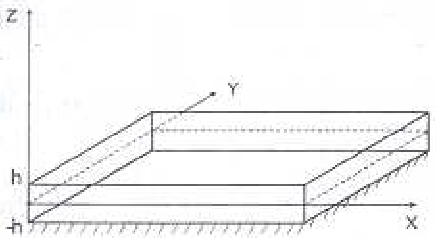
В работе рассматривается задача о собственных колебаниях ортотропной пластинки $D=\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_0,\ |z|\le h,\ h<<l\}$, где D_0 – срединная поверхность пластинки, а l – ее характерный тангенциальный размер. Предполагается, что нижняя грань пластинки жестко закреплена, а верхняя свободна (фиг.1).

Имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_{zz}=0 \quad \text{при } z = h \tag{1.1}$$

$$u = v = w = 0 \qquad \text{при} \quad z = -h \tag{1.2}$$

Условия на боковой поверхности конкретизировать не будем, поскольку, как показано в [11], они для этого класса задач непосредственно не влияют на значения частот собственных колебаний. Ими обусловлены собственные колебания в зоне пограничного слоя.



Фиг.1

Требуется определить частоты собственных колебаний пластинки и собственные функции, соответсвующие граничным условиям (1.1),(1.2). Для этого необходимо найти ненулевые решения системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости для ортотропного тела:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (x, y, z; u, v, w)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\sigma_{xy}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = a_{55}\sigma_{xz}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44}\sigma_{yz}$$

при граничных условиях (1.1),(1.2).

Решение системы уравнений (1.3) будем искать в виде [7, 8]:

$$\sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) = \sigma_{jk}(x, y, z)\exp(i\omega t)$$

$$(u, v, w) = (u_x, u_y, u_z)\exp(i\omega t) \qquad \alpha, \beta = x, y, z; \qquad j, k = 1,2,3 \tag{1.4}$$

где ω – искомая частота собственных колебаний.

Подставив (1.4) в уравнения (1.3), получим:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_x = 0 \qquad (x, y; 1,2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} \qquad (x, y; 1,2)$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_z = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = a_{66}\sigma_{12}, \qquad \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = a_{55}\sigma_{13}, \qquad \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = a_{44}\sigma_{23}$$

Перейдем к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\xi = x/l, \qquad \eta = y/l, \qquad \zeta = z/h$$
$$U = u_x/l, \quad V = u_y/l, \quad W = u_z/l \tag{1.6}$$

В результате получим следующую сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\zeta} + \omega_*^2\varepsilon^{-2}U = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial\xi} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33}$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\zeta} + \omega_*^2\varepsilon^{-2}V = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial\eta} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33} \tag{1.7}$$
$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\zeta} + \omega_*^2\varepsilon^{-2}W = 0 \qquad \varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\zeta} = a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33}$$
$$\frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{\partial V}{\partial\xi} = a_{66}\sigma_{12} \qquad \frac{\partial W}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta} = a_{55}\sigma_{13}$$
$$\frac{\partial W}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta} = a_{44}\sigma_{23} \qquad \omega_*^2 = \rho h^2\omega^2$$

Эту сингулярно возмущенную систему будем решать асимптотическим методом. Решение системы будем искать в виде [3]:

$$\sigma_{jk} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(s)}$$
$$(U,V,W) = \varepsilon^s(U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}) \tag{1.8}$$
$$\omega_*^2 = \varepsilon^s\omega_{*s}^2, \qquad s = \overline{0,N}$$

где обозначение $s = \overline{0,N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах $[0,\ N]$.

Подставив (1.8) в (1.7), применив правило Коши умножения рядов, для определения коэффициентов разложения (1.8) получим систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{13}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2U^{(s-k)} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{23}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2V^{(s-k)} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{33}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2W^{(s-k)} = 0, \qquad k = \overline{0,s}$$
$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} = a_{11}\sigma_{11}^{(s)} + a_{12}\sigma_{22}^{(s)} + a_{13}\sigma_{33}^{(s)}$$
$$\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} = a_{12}\sigma_{11}^{(s)} + a_{22}\sigma_{22}^{(s)} + a_{23}\sigma_{33}^{(s)} \tag{1.9}$$
$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{13}\sigma_{11}^{(s)} + a_{23}\sigma_{22}^{(s)} + a_{33}\sigma_{33}^{(s)}$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12}^{(s)},\quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13}^{(s)},$$

$$\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23}^{(s)},\quad Q^{(s)}\equiv 0 \text{ при } s<0$$

В (1.9) все величины можно выразить через $U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}$ по формулам:

$$\sigma_{11}^{(s)}=-A_{23}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{12}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{22}^{(s)}=-A_{13}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}+A_{33}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{33}^{(s)}=A_{11}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{23}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{13}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} \qquad (1.10)$$

$$\sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right],\qquad \sigma_{13}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}\right]$$

где

$$A_{11}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\Delta},\qquad A_{22}=\frac{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}{\Delta},\qquad A_{33}=\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{\Delta}$$

$$A_{12}=\frac{a_{33}a_{12}-a_{13}a_{23}}{\Delta},\quad A_{13}=\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{\Delta},\quad A_{23}=\frac{a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23}}{\Delta} \qquad (1.11)$$

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{22}a_{13}^2-a_{11}a_{23}^2-a_{33}a_{12}^2$$

Для определения же $U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}$ получаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\omega_{*k}^2U^{(s-k)}=R_U^{(s)},\qquad \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}\omega_{*k}^2V^{(s-k)}=R_V^{(s)}$$

$$A_{11}\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\omega_{*k}^2W^{(s-k)}=R_W^{(s)},\qquad k=\overline{0,s} \qquad (1.12)$$

где

$$R_U^{(s)}=-\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-a_{55}\left[\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$R_V^{(s)}=-\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}-a_{44}\left[\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right] \qquad (1.13)$$

$$R_W^{(s)}=A_{23}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}+A_{13}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}-\left[\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

Очевидно, что $R_U^{(0)}=R_V^{(0)}=R_W^{(0)}=0$.

2. Чтобы определить значения частот, рассмотрим уравнения (1.12) при $s=0$:

$$\frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial \zeta^2}+a_{55}\omega_{*0}^2 U^{(0)}=0, \qquad \frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial \zeta^2}+a_{44}\omega_{*0}^2 V^{(0)}=0$$

$$A_{11}\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial \zeta^2}+\omega_{*0}^2 W^{(0)}=0 \tag{2.1}$$

Решениями уравнений (2.1) являются:

$$U^{(0)}=C_{U1}^{(0)}(\xi,\eta)\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0}\zeta+C_{U2}^{(0)}(\xi,\eta)\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0}\zeta \tag{2.2}$$

$$V^{(0)}=C_{V1}^{(0)}(\xi,\eta)\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*0}\zeta+C_{V2}^{(0)}(\xi,\eta)\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*0}\zeta \tag{2.3}$$

$$W^{(0)}=C_{W1}^{(0)}(\xi,\eta)\cos\frac{\omega_{*0}}{\sqrt{A_{11}}}\zeta+C_{W2}^{(0)}(\xi,\eta)\sin\frac{\omega_{*0}}{\sqrt{A_{11}}}\zeta \tag{2.4}$$

Используя (2.2) и удовлетворив условиям (1.1),(1.2) относительно σ_{xz}, u и учитывая, что $\sigma_{13}^{(0)}=\dfrac{1}{a_{55}}\dfrac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta}$, получим систему алгебраических уравнений относительно функций $C_{U1}^{(0)}$, $C_{U2}^{(0)}$. Из разрешимости этой системы вытекает

$$\cos 2\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0}=0 \tag{2.5}$$

откуда следует

$$\omega_{*0n}=\frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}}(2n+1), \qquad n\in N \tag{2.6}$$

Итак, определили некоторый класс значений частот собственных колебаний пластинки, которые будем обозначать индексом "I". С учетом (1.7) имеем:

$$\omega_{0n}^{\mathrm{I}}=\frac{\pi}{4h\sqrt{\rho a_{55}}}(2n+1), \qquad n\in N \tag{2.7}$$

Точно так же, удовлетворив остальным условиям (1.1),(1.2), получим

$$\omega_{*0n}^{\mathrm{II}}=\frac{\pi}{4\sqrt{a_{44}}}(2n+1) \quad \text{или} \quad \omega_{0n}^{\mathrm{II}}=\frac{\pi}{4h\sqrt{\rho a_{44}}}(2n+1), \quad n\in N \tag{2.8}$$

$$\omega_{*0n}^{\mathrm{III}}=\frac{\pi\sqrt{A_{11}}}{4}(2n+1) \quad \text{или} \quad \omega_{0n}^{\mathrm{III}}=\frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}}(2n+1), \quad n\in N \tag{2.9}$$

Имея в виду $a_{55}=\dfrac{1}{G_{13}}$, $a_{44}=\dfrac{1}{G_{23}}$, для ортотропного тела будем иметь следующие главные значения частот собственных сдвиговых колебаний ω_{0n}^{xz}, ω_{0n}^{yz} и собственных продольных колебаний ω_{0n}^{p}:

$$\omega_{0n}^{xz}=\frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}(2n+1)=\frac{\pi}{4h}v_c^{xz}(2n+1)$$

$$\omega_{0n}^{yz} = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{G_{23}}{\rho}}(2n+1) = \frac{\pi}{4h}v_c^{yz}(2n+1) \quad n\in N$$

$$\omega_{0n}^{p} = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}}(2n+1) = \frac{\pi}{4h}v_p(2n+1) \tag{2.10}$$

где
$$v_c^{xz} = \sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}, \qquad v_c^{yz} = \sqrt{\frac{G_{23}}{\rho}} \tag{2.11}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}} = \sqrt{\frac{E_3}{\rho}\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{31}(\nu_{12}\nu_{23}+\nu_{13})-\nu_{32}(\nu_{21}\nu_{13}+\nu_{23})}}$$

В (2.10), (2.11) v_c^{xz} и v_c^{yz} – известные скорости распространения сейсмических сдвиговых волн, а v_p – скорость распространения продольных волн в пластине.

Если $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^{\mathrm{I}}$, то оно не будет удовлетворять условиям разрешимости систем алгебраических уравнений, соответствующие (2.3) и (2.4), откуда следует, что эти системы будут иметь нулевые решения, т.к. определители систем отличны от нуля, следовательно:

$$V_{n\mathrm{I}}^{(0)} = W_{n\mathrm{I}}^{(0)} = 0 \tag{2.12}$$

Точно так же, если $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^{\mathrm{II}}$, то:

$$U_{n\mathrm{II}}^{(0)} = W_{n\mathrm{II}}^{(0)} = 0 \tag{2.13}$$

А при $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^{\mathrm{III}}$

$$U_{n\mathrm{III}}^{(0)} = V_{n\mathrm{III}}^{(0)} = 0 \tag{2.14}$$

Итак, мы имеем три типа собственных колебаний:

а) колебания с частотами $\omega_{0n}^{\mathrm{I}} = \dfrac{\pi}{4h\sqrt{\rho a_{55}}}(2n+1)$ и следующими собственными функциями и компонентами тензора напряжений:

$$U_{n\mathrm{I}}^{(0)} = C_{Un}^{(0)}(\xi,\eta)\sin[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)], \qquad V_{n\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad W_{n\mathrm{I}}^{(0)} = 0$$

$$\sigma_{13\,\mathrm{I}}^{(0)} = C_{Un}^{(0)}(\xi,\eta)\frac{\pi}{4a_{55}}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \tag{2.15}$$

$$\sigma_{11\,\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{22\,\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{33\,\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{12\,\mathrm{I}}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{23\,\mathrm{I}}^{(0)} = 0$$

б) колебания с частотами $\omega_{0n}^{\mathrm{II}} = \dfrac{\pi}{4h\sqrt{\rho a_{44}}}(2n+1)$ и следующими собственными функциями и напряжениями:

$$V_{n\mathrm{II}}^{(0)} = C_{Vn}^{(0)}(\xi,\eta)\sin[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)], \quad U_{n\mathrm{II}}^{(0)} = 0, \quad W_{n\mathrm{II}}^{(0)} = 0$$

$$\sigma_{23\,\mathrm{II}}^{(0)} = C_{Vn}^{(0)}(\xi,\eta)\frac{\pi}{4a_{44}}(2n+1)\cos[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \tag{2.16}$$

$$\sigma_{11\,\mathrm{II}}^{(0)}=0, \qquad \sigma_{22\,\mathrm{II}}^{(0)}=0, \qquad \sigma_{33\,\mathrm{II}}^{(0)}=0, \qquad \sigma_{12\,\mathrm{II}}^{(0)}=0, \qquad \sigma_{13\,\mathrm{II}}^{(0)}=0$$

в) колебания с частотами $\omega_{0n}^{\mathrm{III}}=\dfrac{\pi}{4h}\sqrt{\dfrac{A_{11}}{\rho}}(2n+1)$ и следующими собственными функциями и напряжениями:

$$W_{n\mathrm{III}}^{(0)}=C_{Wn}^{(0)}(\xi,\eta)\sin\left[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)\right], \qquad U_{n\mathrm{III}}^{(0)}=0, \qquad V_{n\mathrm{III}}^{(0)}=0$$

$$\sigma_{11\,\mathrm{III}}^{(0)}=-C_{Wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{23}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos\left[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)\right]$$

$$\sigma_{22\,\mathrm{III}}^{(0)}=-C_{Wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{13}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos\left[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)\right] \qquad (2.17)$$

$$\sigma_{33\,\mathrm{III}}^{(0)}=C_{Wn}^{(0)}(\xi,\eta)A_{11}\frac{\pi}{4}(2n+1)\cos\left[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)\right]$$

$$\sigma_{12\,\mathrm{III}}^{(0)}=0, \qquad \sigma_{13\,\mathrm{III}}^{(0)}=0, \qquad \sigma_{23\,\mathrm{III}}^{(0)}=0$$

Несложно показать, что каждое из семейств функций $\left\{U_{n\mathrm{I}}^{(0)}\right\}$, $\left\{V_{n\mathrm{II}}^{(0)}\right\}$, $\left\{W_{n\mathrm{III}}^{(0)}\right\}$ составляет ортогональную систему на интервале $-1\le\zeta\le 1$. Функции $C_{Un}^{(0)}$, $C_{Vn}^{(0)}$, $C_{Wn}^{(0)}$ определяются из начальных условий известным образом.

3. О приближениях s ≥ 1. Рассмотрим уравнения (1.12) при s = 1. Сперва рассмотрим первое уравнение (1.12) при $\omega_{*0n}=\omega_{*0n}^{1}$:

$$\frac{\partial^2 U_{n1}^{(1)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\left(\omega_{*0n}^{1}\right)^2 U_{n1}^{(1)}+a_{55}\left(\omega_{*1n}^{1}\right)^2 U_{n1}^{(0)}=R_{Un1}^{(1)} \qquad (3.1)$$

Решение $U_{n1}^{(1)}$ представим в виде ряда по собственным функциям $U_{n1}^{(0)}$ нулевого приближения [14, 17]:

$$U_{n1}^{(1)}=\sum_{m=1}^{\infty}b_{nm}U_{m1}^{(0)} \qquad (3.2)$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям (1.1), (1.2), соответствующим u и σ_{xz}. Подставив (3.2) в (3.1), с учетом (2.1) получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_{55}\,b_{nm}\left[\left(\omega_{*0n}^{1}\right)^2-\left(\omega_{*0m}^{1}\right)^2\right]U_{m1}^{(0)}=-a_{55}\left(\omega_{*1n}^{1}\right)^2U_{n1}^{(0)}+R_{Un1}^{(1)} \qquad (3.3)$$

Умножив (3.3) на $U_{k1}^{(0)}$ и проинтегрировав по ζ на отрезке [-1, 1], учитывая ортогональность функций $\left\{U_{n1}^{(0)}\right\}$, получим:

$$a_{55}\,b_{nk}\left[\left(\omega_{*0n}^{1}\right)^2-\left(\omega_{*0k}^{1}\right)^2\right]=-a_{55}\left(\omega_{*1n}^{1}\right)^2C_{nk}^{(0)}\delta_{nk}+R_{Unk1}^{(1)} \qquad (3.4)$$

где δ_{nk} — символ Кронекера, а

$$R_{Unk1}^{(1)}=\frac{1}{\left(C_{Uk}^{(0)}\right)^2}\int_{-1}^{1}R_{Un1}^{(1)}U_{k1}^{(0)}d\zeta, \qquad C_{nk}^{(0)}=\frac{C_{Un}^{(0)}}{C_{Uk}^{(0)}} \qquad (3.5)$$

При $k=n$ из (3.4) будем иметь:

$$\left(\omega_{*1n}^{1}\right)^2 = \frac{1}{a_{55}} R_{Unn1}^{(1)} \tag{3.6}$$

а при $k \neq n$

$$b_{nk} = \frac{R_{Unk1}^{(1)}}{a_{55}[(\omega_{*0n}^{1})^2 - (\omega_{*0k}^{1})^2]} \tag{3.7}$$

Из (1.13) и (2.15), следует:

$$R_{Un1}^{(1)} = 0 \tag{3.8}$$

следовательно,

$$b_{nk} = 0, \qquad k \neq n \tag{3.9}$$

$$\omega_{*1n}^{1} = 0, \qquad n \in N \tag{3.10}$$

Для определения b_{nn} нормируем U_n [16, 17]:

$$\frac{1}{\left\|U_{n1}^{(0)}\right\|^2} \int_{-1}^{1} [U_{n1}^{(0)} + \varepsilon U_{n1}^{(1)}]^2 d\zeta = 1, \quad \text{где} \quad \left\|U_{n1}^{(0)}\right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left[U_{n1}^{(0)}\right]^2 d\zeta \tag{3.11}$$

откуда получим:

$$\int_{-1}^{1} U_{n1}^{(0)} U_{n1}^{(1)} d\zeta = 0 \tag{3.12}$$

Подставив $U_n^{(1)}$ в (3.12), используя (3.2), будем иметь:

$$b_{nn} = 0 \tag{3.13}$$

Итак, имеем:

$$U_{n1}^{(1)} = 0, \ \omega_{*1n}^{1} = 0, \qquad n \in N \tag{3.14}$$

Теперь рассмотрим приближение s = 2. Первое уравнение (1.12) при $\omega_{*0n} = \omega_{*0n}^{1}$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U_{n1}^{(2)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}\left(\omega_{*0n}^{1}\right)^2 U_{n1}^{(2)} + a_{55}\left(\omega_{*1n}^{1}\right)^2 U_{n1}^{(1)} + a_{55}\left(\omega_{*2n}^{1}\right)^2 U_{n1}^{(0)} = R_{Un1}^{(2)} \tag{3.15}$$

Решение снова поищем в виде:

$$U_{n1}^{(2)} = \sum_{r=1}^{\infty} c_{nr} U_{r1}^{(0)} \tag{3.16}$$

Повторив те же действия, получим:

$$\left(\omega_{*2n}^{1}\right)^2 = \frac{1}{a_{55}} R_{Unn1}^{(2)}, \qquad c_{nk} = \frac{R_{Unk1}^{(2)}}{a_{55}[(\omega_{*0n}^{1})^2 - (\omega_{*0k}^{1})^2]}, \qquad k \neq n$$

$$R_{Unk1}^{(2)} = \frac{1}{\left(C_{Uk}^{(0)}\right)^2} \int_{-1}^{1} R_{Un1}^{(2)} U_{k1}^{(0)} d\zeta = \frac{1}{C_{Uk}^{(0)}} \int_{-1}^{1} R_{Un1}^{(2)} \Psi_k d\zeta \tag{3.17}$$

$$\Psi_n = \frac{U_{n1}^{(0)}}{C_{Un}^{(0)}} = \sin[(1+\zeta)\frac{\pi}{4}(2n+1)] \tag{3.18}$$

где функции $\{\Psi_n\}$ составляют ортонормальную систему. Из (1.13) имеем:

$$R_{Un1}^{(2)} = -\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial\xi\partial\zeta} - a_{55}\left[\frac{\partial\sigma_{11\,1}^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12\,1}^{(1)}}{\partial\eta}\right] \tag{3.19}$$

$W_1^{(1)}$ определяется из третьего уравнения (1.12), при $s = 1$ и $\omega_{*0n} = \omega_{*0n}^{1}$:

$$A_{11}\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial\zeta^2} + \left(\omega_{*0n}^{1}\right)^2 W_1^{(1)} + \left(\omega_{*1n}^{1}\right)^2 W_1^{(0)} = R_{W1}^{(1)} \tag{3.20}$$

Вычислив $R_{W1}^{(1)}$ из (1.13) и подставив в (3.20), получим следующее решение этого уравнения:

$$W_{n1}^{(1)} = C_{W1}^{(1)}\sin\frac{\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}\zeta + C_{W2}^{(1)}\cos\frac{\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}\zeta + A_W^{(1)}\cos[(1+\zeta)\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0n}^{1}]$$

$$A_W^{(1)} = \frac{(a_{55}A_{23}-1)\left(C_U^{(0)}\right)_{\xi}'}{(1-a_{55}A_{11})\,\omega_{*0n}^{1}\sqrt{a_{55}}} \tag{3.21}$$

Для определения констант $C_{W1}^{(1)}$ и $C_{W2}^{(1)}$ удовлетворим вытекающим из (1.1),(1.2) граничным условиям:

$$W_{n1}^{(1)}(\zeta=-1)=0$$

$$\sigma_{33\,1}^{(1)}(\zeta=1) = \left(A_{11}\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial\zeta} - A_{23}\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\zeta=1} = 0 \tag{3.22}$$

Используя (3.21), (3.22), получим неоднородную систему алгебраических уравнений, определитель которой отличен от нуля, следовательно, эта система будет иметь единственное ненулевое решение:

$$C_{W1}^{(1)} = \frac{\left(\sqrt{a_{55}}(A_{11}-A_{23})\cos\frac{\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}\sin 2\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0n}^{1} + \sqrt{A_{11}}(a_{55}A_{23}-1)\sin\frac{\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}\right)C_{U\ \xi}^{(0)\ \prime}}{\sqrt{a_{55}A_{11}}(a_{55}A_{11}-1)\omega_{*0n}^{1}\cos\frac{2\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}}$$

$$C_{W2}^{(1)} = \frac{\left(\sqrt{a_{55}}(A_{11}-A_{23})\sin\frac{\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}\sin 2\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0n}^{1} + \sqrt{A_{11}}(a_{55}A_{23}-1)\cos\frac{\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}\right)C_{U\ \xi}^{(0)\ \prime}}{\sqrt{a_{55}A_{11}}(a_{55}A_{11}-1)\omega_{*0n}^{1}\cos\frac{2\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}}$$

Подставив значения $W_{n1}^{(1)}$, $\sigma_{11\,1}^{(1)}$ и $\sigma_{12\,1}^{(1)}$ в (3.19), будем иметь:

$$R_{Un1}^{(2)} = \left[\left(C_{W2}^{(1)}\right)_{\xi}'(1-a_{55}A_{23})\frac{\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}\right]\sin\frac{\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}\zeta +$$

$$+\left[\left(C_{W1}^{(1)}\right)_{\xi}'(a_{55}A_{23}-1)\frac{\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}\right]\cos\frac{\omega_{*0n}^{1}}{\sqrt{A_{11}}}\zeta +$$

$$+\left[\left(A_W^{(1)}\right)_{\xi}'\left(1-a_{55}A_{23}\right)\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}-a_{55}\left(A_{22}\left(C_{Un}^{(0)}\right)_{\xi\xi}''+\frac{1}{a_{66}}\left(C_{Un}^{(0)}\right)_{\eta\eta}''\right)\right]\times \tag{3.23}$$

$$\times\sin[(1+\zeta)\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}]$$

а используя (3.23), из (3.17) следует:

$$R_{Unk1}^{(2)}=\frac{1}{C_{Uk}^{(0)}}\left[\frac{(1+2n)(a_{55}A_{23}-1)}{\left((1+2n)^2-(1+2k)^2a_{55}A_{11}\right)}\times\right.$$

$$\times\left(\left(-(1+2k)\sqrt{a_{55}A_{11}}\left(C_{W1}^{(1)}\right)_{\xi}'+(-1)^{k+1}(1+2n)\left(C_{W2}^{(1)}\right)_{\xi}'\right)\cos[\frac{\pi(2n+1)}{4\sqrt{a_{55}A_{11}}}]+\right. \tag{3.24}$$

$$\left.+\left(-(1+2k)\sqrt{a_{55}A_{11}}\left(C_{W2}^{(1)}\right)_{\xi}'+(-1)^{k+1}(1+2n)\left(C_{W1}^{(1)}\right)_{\xi}'\right)\sin[\frac{\pi(2n+1)}{4\sqrt{a_{55}A_{11}}}]\right)+$$

$$\left.+\left(\left(A_W^{(1)}\right)_{\xi}'\left(1-a_{55}A_{23}\right)\frac{\pi}{4}(2n+1)-a_{55}\left(A_{22}\left(C_{Uk}^{(0)}\right)_{\xi\xi}''+\frac{1}{a_{66}}\left(C_{Uk}^{(0)}\right)_{\eta\eta}''\right)\right)\delta_{nk}\right]$$

В итоге по формулам (3.17) определятся $\left(\omega_{*2n}^{\mathrm{I}}\right)^2$ и c_{nk}. Для определения c_{nn} поступим так же, как в случае b_{nn}, в результате получим:

$$c_{nn}=0 \tag{3.25}$$

Итак, мы определили $U_{n1}^{(2)}$ и $\omega_{*2n}^{\mathrm{I}}$, которые отличны от нуля. Следовательно, имеем:

$$\begin{cases}\omega_{*n}^{\mathrm{I}}=\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}+\varepsilon^2\omega_{*2n}^{\mathrm{I}}\\ U_{n1}=U_{n1}^{(0)}+\varepsilon^2U_{n1}^{(2)}\end{cases} \tag{3.26}$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи $\omega_{*0n}=\omega_{*0n}^{\mathrm{II}}$ и $\omega_{*0n}=\omega_{*0n}^{\mathrm{III}}$. В итоге будем иметь:

$$\begin{gathered}V_{n\mathrm{II}}^{(1)}=0,\ V_{n\mathrm{II}}^{(2)}\neq 0,\ \omega_{*1n}^{\mathrm{II}}=0,\ \omega_{*2n}^{\mathrm{II}}\neq 0\\ W_{n\mathrm{III}}^{(1)}=0,\ W_{n\mathrm{III}}^{(2)}\neq 0,\ \omega_{*1n}^{\mathrm{III}}=0,\ \omega_{*2n}^{\mathrm{III}}\neq 0\end{gathered} \tag{3.27}$$

Из полученных результатов следует, что начальное приближение дает достаточно точные значения для частот и форм собственных колебаний. Поэтому, значения частот для исходного приближения назовем главными и в практических приложениях можно ограничиться этими значениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 414с.
3. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. // Межвуз. сб.: Механика. Изд. ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.

4. Агаловян Л. А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера. // В сб.: ХШ Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. Часть первая. Таллин. 1983. С. 13-18.
5. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией. // В сб.: Тр. IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука. 1984. С. 105-110.
6. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1989. Т.42. №3. С. 28-36.
7. Агаловян Л. А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8-11.
8. Агаловян Л. А. О частотах собственных колебаний анизотропной полосы. // В сб. Юбил. науч. конф. к 60-летию ГПИ. Гюмри. Изд-во "Высшая школа". 1994. С. 23-26.
9. Агаловян Л. А., Саркисян Л.С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы. // Тр. XVIII международной конф. по теории оболочек и пластин. Р.Ф. Саратов. 1997. Т. 1. С. 30-38.
10. Агаловян М. Л. Об одной задаче на собственные значения, возникающей в сейсмологии. // Докл. НАН Армении. 1996. Т.96. №2-4. С. 23-24.
11. Агаловян М. Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С. 132-135.
12. Халатян Л. М. О собственных колебаниях анизотропной полосы при смешанных граничных условиях. // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван: Изд-во ЕГУ. 1997. С. 167-170.
13. Агаловян Л. А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во НАН РА. 2002. С. 9-19.
14. Агаловян Л. А., Агаловян М. Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы. // Докл. НАН РА. 2003. Т. 103. №4. С. 296-301.
15. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Международн. научн. журнал Прикл. механика. 2002. Т. 38. №7. С. 3-24.
16. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука. 1981. 398с.
17. Найфэ А. Х. Методы возмущений М.: Изд-во Мир. 1976. 456 с.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
17.11.2003