ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №4, 2003 Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А.

Կ.Լ. Աղայան, Է.Խ. Գրիգորյան, Ս.Հ. Ջիլավյան
Սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ առաձգական ներդիրով առաձգական տարածությունում

Աշխատանքում հետազոտվում է անվերջությունից կիսաանվերջ առաձգական ներդիրին ընկնող սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը: Խնդիրը բերվում է Վիներ-Հոպֆի ֆունկցիոնալ հավասարման լուծման: Ստացվում են ասիմպտոտական բանաձևեր կոնտակտային լարումների համար ներդիրի եզրի մոտակայքում և նրանից հեռու կետերում: Հեռավոր գոտում տրված են տեղափոխության ասիմպտոտական ներկայացումները: Ստվերի և անդրադարձման ալիքի տիրույթներում, կոնտակտի տեղամասում առկա է Լյավի մակերևութային ալիքը:

K.L. Agayan, E.Kh. Grigoryan, S.H. Jilavyan
Diffraction of a plane shear wave on the elastic space with the semi-infinite elastic inclusion

В работе исследована задача дифракции сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности на полубесконечное упругое включение. Задача сводится к решению функционального уравнения Винера-Хопфа. Получены асимптотические формулы контактных напряжений в окрестности края включения и в далеких от него точках. В дальней зоне даны асимптотические представления перемещения. Показано наличие поверхностной волны Лява в области тени и отраженной волны, а также на участке контакта.

В работе рассматривается дифракция сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности под некоторым углом на полубесконечное включение. Решение задачи представляется в виде суммы своей четной и нечетной частей. Рассматривая случай длинных волн, эти задачи (четная и нечетная) моделируются соответствующим образом, после чего каждая из них сводится к решению функционального уравнения Винера-Хопфа.

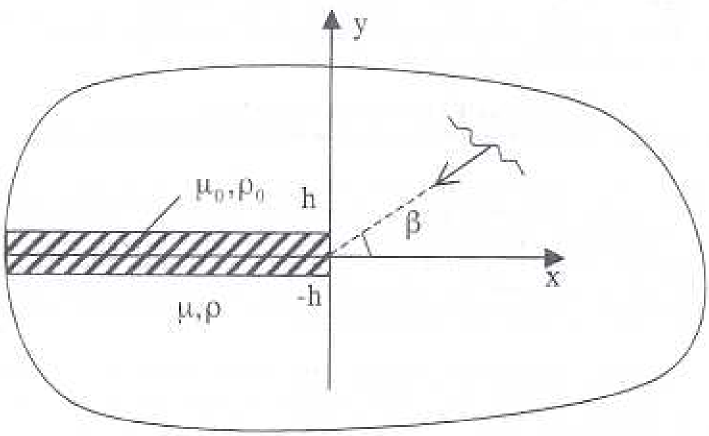
Получены асимптотические формулы для амплитуды перемещения в дальней зоне. В области тени и отраженной волны, а также на участке контакта эти формулы содержат волновую часть, обусловленную локализованной (поверхностной) волной Лява. Получены также асимптотические формулы для амплитуды контактных напряжений в окрестности края включения и в далеких от него точках. Причем отметим, что из решения рассматриваемой задачи предельным переходом получены решения соответствующих предельных задач — трещина или жесткое включение.

В работах [1,2] рассмотрена задача об установившихся сдвиговых колебаниях упругого пространства с полубесконечным упругим включением под действием линейного источника колебаний. Учитывая малость толщины включения, предложена модель поставленной задачи, которая сводит задачу к решению системы двух функциональных уравнений Винера-Хопфа. Однако в полученном таким путем решении отсутствует локализованная (поверхностная) волна Лява — важный компонент волнового поля, следовательно предложенная в [1,2] модель задачи неадекватна поставленной исходной задаче.

1. Рассмотрим упругое пространство, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$, содержащее упругое полубесконечное включение в виде занимающего область $\Omega_0\left(\infty < x \le 0, |y| \le h, |z| < \infty\right)$ полубесконечного слоя с малой толщиной $2h$ (фиг.1). Пусть из бесконечности под углом β падает плоская сдвиговая волна (гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и в дальнейшем опускается, т.е. задача решается в амплитудах, t – параметр времени) с амплитудой

$$u_z^{(\infty)}(x,y) = e^{-ikx\cos\beta - iky\sin\beta} \tag{1.1}$$

где $k = \omega/c$ – волновое число, $c = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны μ, ρ и μ_0, ρ_0 – модули сдвига и плотности пространства и упругого включения, соответственно, ω – частота колебаний, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.



Фиг. 1.

Среда находится в условиях антиплоской деформации. Ставится задача определить дифрагированное волновое поле как на участке контакта, так и во всем пространстве. Для решения поставленной задачи представим $u_z^{(\infty)}(x,y)$ в виде суммы своей четной

$$u_{z1}^{(\infty)}(x,y) = \frac{1}{2}\left(e^{-ikx\cos\beta - iky\sin\beta} + e^{-ikx\cos\beta + iky\sin\beta}\right) \tag{1.2}$$

и нечетной

$$u_{z2}^{(\infty)}(x,y) = \frac{1}{2}\left(e^{-ikx\cos\beta - iky\sin\beta} - e^{-ikx\cos\beta + iky\sin\beta}\right) \tag{1.3}$$

частей. Тогда перемещение также представится в виде

$$u_z(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y) \tag{1.4}$$

здесь уже $w_1(x,y)$ – четная часть, а $w_2(x,y)$ – нечетная часть амплитуды упругого перемещения пространства. Следовательно, решение поставленной задачи сводится к определению функций $w_1(x,y)$ и $w_2(x,y)$, т.е. к определению перемещений четно и нечетно (относительно y) поставленных задач.

Рассмотрим четную задачу. Пусть из бесконечности падает сдвиговая плоская волна с амплитудой $u_{21}^{(\infty)}(x, y)$. Уравнение движения для точек пространства имеет вид

$$\Delta w_1(x, y) + k^2 w_1(x, y) = 0 \tag{1.5}$$

а для включения –

$$\Delta w_1^{(0)}(x, y) + k_0^2 w_1^{(0)}(x, y) = 0, \quad x, y \in \Omega_0 \tag{1.6}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $w_1^{(0)}(x, y)$ – амплитуда упругого перемещения включения, $k_0 = \omega / c_0$ – волновое число, $c_0 = \sqrt{\mu_0 / \rho_0}$ – скорость распространения сдвиговой волны включения.

Считая толщину включения достаточно малой, т.е. $hk_0 << 1$, осредним перемещение $w_1^{(0)}(x, y)$ по толщине, отождествляя слой с его срединной плоскостью. Тогда из (1.6) приходим к уравнению

$$\frac{d^2 u_1^{(0)}(x)}{dx^2} + k_0^2 u_1^{(0)}(x) + \frac{1}{h\mu_0} q_1(x) = 0, \quad x < 0 \tag{1.7}$$

где $$u_1^{(0)}(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} w_1^{(0)}(x, y) dy, \qquad q_1(x) = \tau_{yz}^{(0)}(x, h) = -\tau_{yz}^{(0)}(x, -h) \tag{1.8}$$

$q_1(x)$ – интенсивность контактных напряжений, действующих на контактных участках между слоем и пространством.

Срединная полуплоскость слоя, которая совпадает с полуплоскостью $(y = 0,\ x < 0,\ |z| < \infty)$, имеет жесткость $h\mu_0$, а жесткость полуплоскости $(y = 0,\ x > 0,\ |z| < \infty)$ нулевая. Поэтому они не могут контактировать по линии $(x = 0,\ y = 0)$. Следовательно, имеет место условие

$$\left. \frac{du_1^{(0)}(x)}{dx} \right|_{x=-0} = 0 \tag{1.9}$$

указывающее, что следовало изначально пренебрегать контактными напряжениями на участке $(x = 0,\ |y| \le h,\ |z| < \infty)$, т.е. $\tau_{xz}^{(0)}(0, y) \equiv 0$.

Введем функции

$$f^+(x) = \theta(x) f(x), \quad f^-(x) = \theta(-x) f(x) \tag{1.10}$$

где $\theta(x)$ – известная функция Хевисайда. Тогда уравнение (1.7) при условии (1.9) запишется в виде

$$\frac{d^2 u_1^{(0)-}}{dx^2} + k_0^2 u_1^{(0)-}(x) = -u_1^{(0)}(0) \delta'(x) - \frac{1}{h\mu_0} q_1^-(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.11}$$

где $u_1^{(0)}(0)$ – неизвестная постоянная, подлежащая определению. После преобразования Фурье из (1.11) получим

$$\overline{u}_1^{(0)-}(\sigma)=\frac{i\sigma u_1^{(0)}(0)}{k_0^2-\sigma^2}-\frac{\overline{q}_1^-(\sigma)}{h\mu_0\left(k_0^2-\sigma^2\right)} \tag{1.12}$$

$$\overline{u}_1^{(0)-}(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_1^{(0)-}(x)e^{i\sigma x}dx,\quad \overline{q}_1^-(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}q_1^-(x)e^{i\sigma x}dx$$

причем действительная ось (линия интегрирования) обходит точку $-k_0$ сверху, а k_0 – снизу.

Поскольку мы уже считаем, что слой совпадает со своей срединной плоскостью (принимая вышеприведенную модель упругого включения), то имеют место следующие условия контакта:

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=+0}-\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=-0}=\frac{2}{\mu}q_1^-(x),\quad (-\infty<x<\infty) \tag{1.13}$$

$$w_1(x,0)=u_1^{(0)}(x)\quad (x<0) \tag{1.14}$$

Приступив к решению уравнения (1.5), введем функцию

$$W_1(x,y)=w_1(x,y)-u_{z1}^{(\infty)}(x,y) \tag{1.15}$$

Подставляя (1.15) в (1.5), после преобразования Фурье получим

$$\frac{d^2\overline{W}_1(\sigma,y)}{dy^2}-\gamma^2\overline{W}_1(\sigma,y)=0;\quad \gamma^2=\sigma^2-k^2 \tag{1.16}$$

Выберем то решение уравнение (1.16), которое представляет уходящую волну

$$\overline{W}_1(\sigma,y)=C_1\overline{e}^{\gamma|y|} \tag{1.17}$$

Предполагается, что $\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, а для $|\sigma|<k$, $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, т.е. решение уравнения в виде формулы (1.17) представляет уходящую волну. Для выбора такой ветви двузначной функции $\sqrt{\alpha^2-k^2}$ следует провести в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ разрезы до бесконечности от точек $\sigma=k$ в верхней полуплоскости, и $\sigma=-k$ – в нижней полуплоскости, т.е. действительная ось обходит точки ветвления $-k$ сверху, а k – снизу [4].

Применив преобразование Фурье к контактным условиям, из (1.13), имея в виду (1.17), получим

$$C_1(\sigma)=-\overline{q}_1^-(\sigma)/\mu\sqrt{\sigma^2-k^2} \tag{1.18}$$

а из (1.14) получим следующее функциональное уравнение Винера-Хопфа относительно $\overline{w}_1^+$ и $\overline{q}_1^-$:

$$\overline{w}_1^+(\sigma,0)+\overline{K}(\sigma)\overline{q}_1^-(\sigma)=2\pi\delta(\sigma-k\cos\beta)+\frac{i\sigma u_1^{(0)}(0)}{\sigma^2-k_0^2} \tag{1.19}$$

где $$\overline{K}(\sigma)=\frac{\overline{K}_1(\sigma)}{\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}};\quad \overline{K}_1(\sigma)=\frac{L(\sigma)}{h\mu_0\left(\sigma^2-k_0^2\right)}$$

$$L(\sigma)=\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}+h\mu_0\left(\sigma^2-k_0^2\right) \tag{1.20}$$

Функция Лява $L(\sigma)$ при $k < k_0$ имеет единственный действительный корень

$$\sigma_L = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2k_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_1\sqrt{\lambda_1^2 + 4\left(k_0^2 - k^2\right)}};\ \lambda_1 = \frac{\mu}{\mu_0 h};\quad k < \sigma_L < k_0 \quad (1.21)$$

Очевидно, что $-\sigma_L$ также является нулем функции $L(\sigma)$. При этом действительная ось обходит точку $\sigma = -\sigma_L$ сверху, а $\sigma = \sigma_L$ — снизу, тем самым обеспечивая условие уходящей волны.

Отметим, что в дальнейшем, в основном, будем считать, что $k < k_0$.

Для решения функционального уравнения (1.19) факторизуем функцию $\overline{K}(\sigma)$, представив ее в виде [4]

$$\overline{K}(\sigma) = \overline{K}^+(\sigma)\overline{K}^-(\sigma) \quad (1.22)$$

где $\overline{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha > 0$, а $\overline{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}(\alpha) < 0$, $\alpha = \sigma + i\tau$. Здесь

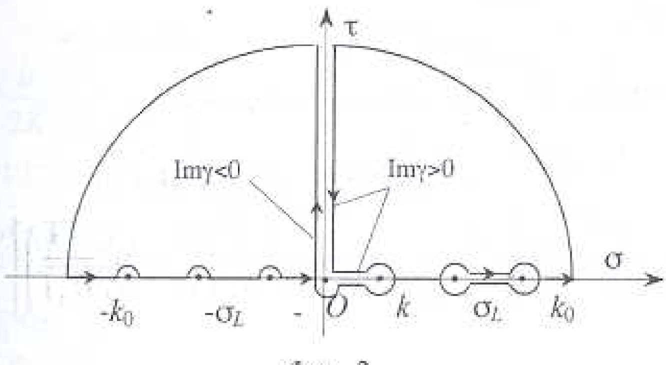
$$\overline{K}^\pm(\sigma) = \overline{K}_1^\pm(\sigma)/\sqrt{\mu(\sigma \pm k)};\qquad \overline{K}_1^\pm(\sigma) = \exp\left(F_1^\pm(\sigma)\right)$$

$$\overline{F}_1^+(\sigma) = \int_0^\infty F_1(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx;\qquad \overline{F}_1^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 F_1(x)e^{ix(\sigma-i0)}dx \quad (1.23)$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\overline{K}_1(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1 + \frac{\lambda_1\sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\sigma^2 - k_0^2}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Из выражения $\overline{K}_1(\sigma)$ (1.20) видно, что $\ln\overline{K}_1(\sigma) = O\left(\lambda_1|\sigma|^{-1}\right)$ при $|\sigma| \to \infty$, т.е. $F_1(x)$ имеет порядок $\ln|x|$ при $|x| \to 0$, тогда из (1.23) следует, что $\overline{F}_1^\pm(\sigma) = O\left(\frac{\ln(\sigma \pm i0)}{\sigma \pm i0}\right)$ при $|\sigma| \to \infty$. Следовательно, функции $\overline{K}^\pm(\alpha)$ стремятся к единице при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности.

Вычислим $\overline{K}_1^-(\sigma)$ методом контурного интегрирования, рассматривая при этом комплексную плоскость с разрезами, показанными на фиг. 2. Замыкая контур интегрирования (1.23) в верхней полуплоскости при



Фиг. 2

помощи леммы Жордана; получим

$$F_1(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2+\tau^2}}{k_0^2+\tau^2}e^{\tau x}d\tau+\frac{i}{\pi}\int_0^k \operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2-\sigma^2}}{k_0^2-\sigma^2}e^{-i\sigma x}d\sigma+i\int_{\sigma_L}^{k_0}e^{-i\sigma x}dx$$

$$(x<0) \tag{1.24}$$

Тогда из (1.23) будем иметь

$$\overline{F}_1^-(\sigma)=\ln\frac{\sigma-i0-\sigma_L}{\sigma-i0-k_0}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2+\tau^2}}{k_0^2+\tau^2}\frac{d\tau}{\tau+i(\sigma-i0)}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^k \operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2-s^2}}{k_0^2-s^2}\frac{ds}{\sigma-i0-s}$$

Следовательно,

$$\overline{K}_1^-(\sigma)=\frac{\sigma-i0-\sigma_L}{\sigma-i0-k_0}\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2+\tau^2}}{k_0^2+\tau^2}\frac{d\tau}{\tau+i(\sigma-i0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_0^k \operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\sqrt{k^2-s^2}}{k_0^2-s^2}\frac{ds}{\sigma-i0-s}\right]$$

$$\overline{K}_1^+(\sigma)=\overline{K}_1^-(-\sigma). \tag{1.25}$$

Надо иметь в виду, что $\dfrac{1}{s-(\sigma-i0)}=\dfrac{1}{s-\sigma}-i\pi\delta(s-\sigma).$

Приступим теперь к решению функционального уравнения (1.19). После обычной процедуры для решения данного уравнения методом Винера-Хопфа [4], (1.19) сводится к уравнению

$$\overline{M}^-(\sigma)=\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma+k}}{\overline{K}_1^-(\sigma)}\overline{w}_1^+(\sigma,0)-\frac{i\sqrt{k+k\cos\beta}}{\overline{K}_1^+(k\cos\beta)}\frac{\sqrt{\mu}}{\sigma-k\cos\beta+i0}-$$

$$-\frac{iu_1^{(0)}(0)\sqrt{\mu}}{2}\left[\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\overline{K}_1^+(\sigma)(\sigma+k_0)}+\frac{1}{\sigma-k_0}\left(\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\overline{K}_1^+(\sigma)}-\frac{\sqrt{k+k_0}}{\overline{K}_1^+(k_0)}\right)\right]=$$

$$-\frac{\overline{K}_1^-(\sigma)}{\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma-k}}\overline{q}_1^-(\sigma)-\frac{i\sqrt{k+k\cos\beta}}{\overline{K}_1^+(k\cos\beta)}\frac{\sqrt{\mu}}{\sigma-k\cos\beta-i0}+$$

$$+\frac{iu_1^{(0)}(0)\sqrt{\mu}}{2}\frac{\sqrt{k_0+k}}{\overline{K}_1^+(k_0)(\sigma-k_0)}=\overline{M}^-(\sigma)\qquad -\infty<\sigma<\infty \tag{1.26}$$

Отметим, что при получении (1.26) имелось в виду, что

$$2\pi i\delta(\sigma-k\cos\beta)=\frac{1}{\sigma-k\cos\beta-i0}-\frac{1}{\sigma-k\cos\beta+i0}$$

$$\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\overline{K}_1^+(\sigma)}\frac{i\sigma}{\sigma^2-k_0^2}=\frac{i}{2}\left[\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\overline{K}_1^+(\sigma)(\sigma+k_0)}+\frac{1}{(\sigma-k_0)}\left(\frac{\sqrt{\sigma+k}}{\overline{K}_1^+(\sigma)}-\frac{\sqrt{k_0+k}}{\overline{K}_1^+(k_0)}\right)\right]+$$

$$+\frac{\sqrt{k_0+k}}{2\overline{K}_1^+(k_0)}\frac{i}{\sigma-k_0}$$

где первое слагаемое регулярно в верхней полуплоскости, а вторая – в нижней.

Дальнейший ход решения уравнения (1.26) такой же, как в [5]. Применив к (1.26) обратное преобразование Фурье, получим

$$M^+(x)=M^-(x), \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{1.27}$$

которое может иметь место только, если

$$M^+(x)=M^-(x)=\sum_{k=0}^{n} m_k\delta^{(k)}(x) \tag{1.28}$$

где $\delta^{(k)}(x)-k$-ая производная функции Дирака $\delta(x)$ [6,7]. Применив к (1.28) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$M^+(\sigma)=M^-(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}(-i)^k m_k\sigma^k \tag{1.29}$$

Так как [8], $q_1^-(x)=O\left(x_-^{-\frac{1}{2}}\right)$ при $x\to-0$, а $w_1^+(0,0)$ – конечная величина, то из свойств интегралов Фурье следует, что

$$\overline{q_1^-}(\sigma)=O\left((\sigma-io)^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \overline{w}^+(\sigma,0)=O\left((\sigma+io)^{-1}\right) \quad \text{при} \quad |\sigma|\to\infty.$$

Следовательно, с учетом того, что $\overline{K}^{\pm}(\sigma)\to1$ при $|\sigma|\to\infty$, из (1.26) и (1.29) следует, что $m_k=0 \ (k=0,1...n)$, т.е.

$$\overline{M}^+(\sigma)=\overline{M}^-(\sigma)\equiv0 \tag{1.30}$$

Таким образом получим решение в виде

$$\frac{1}{\mu}\overline{q_1^-}(\sigma)=\frac{\sqrt{\sigma-k}}{\overline{K}_1^-(\sigma)}\left(\frac{a_1}{\sigma-k_0}-\frac{a_2}{\sigma-k\cos\beta-i0}\right) \tag{1.31}$$

$$\begin{gathered}\overline{w}_1^+(\sigma,0)=\frac{\overline{K}_1^+(\sigma)}{\sqrt{\sigma+k}}\frac{a_2}{\sigma-k\cos\beta+i0}+\\ +\frac{iu_1^{(0)}(0)}{2}\left[\frac{1}{\sigma+k_0}+\frac{1}{\sigma-k_0}\left(1-\frac{\sqrt{k_0+k}}{\overline{K}_1^+(k_0)}\frac{\overline{K}_1^+(\sigma)}{\sqrt{\sigma+k}}\right)\right]\end{gathered} \tag{1.32}$$

где $a_1=\frac{iu_1^{(0)}(0)}{2\overline{K}_1^+(k_0)}\sqrt{k+k_0}$; $a_2=\frac{i\sqrt{2k}\cos\beta/2}{\overline{K}_1^+(k\cos\beta)}$.

Из (1.12) и (1.31) определяется $u_1^{(0)}(0)$

$$u_1^{(0)}(0)=\frac{4i\lambda_1\cos\beta/2\sqrt{2k(k+k_0)}k_0\overline{K}_1^+(k_0)}{[(2k_0\overline{K}_1^+(k_0))^2+i\lambda_1(k_0+k)]\,(k_0+k\cos\beta)\overline{K}_1^+(k\cos\beta)} \tag{1.33}$$

Имея $\overline{q_1^-}(\sigma)$ из (1.31), с помощью (1.15), (1.17), (1.18) окончательно получим решение поставленной четной задачи.

2. Рассмотрим теперь нечетную задачу. Пусть из бесконечности падает сдвиговая плоская волна $u_{z2}^{(\infty)}(x,y)$ (1.3)

Уравнение движения имеет вид

$$\Delta w_2(x,y)+k^2 w_2(x,y)=0 \tag{2.1}$$

Введем функцию перемещения

$$W_2(x,y)=w_2(x,y)-u_{z2}^{(\infty)}(x,y) \tag{2.2}$$

которое удовлетворяет уравнению движения и представляет уходящую волну.

После преобразования Фурье, аналогично четной задаче, получим

$$\overline{W}_2(\sigma,y)=\overline{w}_2(\sigma,y)+2\pi i\sin(ky\sin\beta)\delta(\sigma-k\cos\beta)=C_2(\sigma)\operatorname{sgn} y\, e^{-\gamma|y|} \tag{2.3}$$

Относительно включения, в силу тонкости, полагая, что напряжение $\tau_{yz}^{(0)}(x,y)$ распределено равномерно по толщине, с учетом нечетности задачи $w_2^{(0)}(x,0)=0$ получим:

$$w_2^{(0)}(x,y)=\frac{1}{\mu_0}yq_2^-(x);\qquad q_2^-(x)=\tau_{yz}^{(0)}(x,y),\qquad (x<0) \tag{2.4}$$

где $q_2^-(x)$ – интенсивность искомых контактных напряжений.

Условие контакта имеет вид

$$w_2(x,\pm 0)=w_2^{(0)}(x,\pm h),\qquad (x<0) \tag{2.5}$$

После преобразования Фурье из (2.4), (2.5) получим

$$C_2=\frac{h}{\mu_0}\overline{q}_2^-(\sigma) \tag{2.6}$$

а из (2.3)

$$-\sqrt{\sigma^2-k^2}\,C_2=\frac{1}{\mu}\overline{q}_2^-(\sigma)+\frac{1}{\mu}\overline{q}_2^+(\sigma)+2\pi ik\sin\beta\delta(\sigma-k\cos\beta) \tag{2.7}$$

причем, здесь имелось в виду, что

$$\left.\frac{\partial\overline{w}_2}{\partial y}\right|_{y=0}=\frac{1}{\mu}\left(\overline{q}_2^-(\sigma)+\overline{q}_2^+(\sigma)\right) \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.7) приходим к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа:

$$\overline{q}_2^-(\sigma)+\overline{R}(\sigma)\overline{w}_2^-(\sigma,0)=-2\pi ik\mu\sin\beta\delta(\sigma-k\cos\beta)\qquad(-\infty<\sigma<\infty) \tag{2.9}$$

$$\overline{R}(\sigma)=\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\overline{K}_2(\sigma);\quad \overline{K}_2(\sigma)=1+\lambda_2\left(\sigma^2-k^2\right)^{-\frac{1}{2}};\quad \lambda_2=\frac{\mu_0}{h\mu} \tag{2.10}$$

Таким образом, решение нечетной задачи свелось к функциональному уравнению (2.9) относительно $\overline{q}_2^+(\sigma)$ и $\overline{w}_2^-(\sigma,0)$.

Так как напряжение $\tau_{yz}^0(x)$ прямо пропорционально перемещению и конечно, следовательно, $q_2^-(0)$ также конечна, и $\overline{q}\,_2^-(\sigma)\sim O(\sigma-i0)^{-1}$ при $|\sigma|\to\infty$.

Поступая, как при решении четной задачи, получим решения функционального уравнения (2.9) в виде

$$\frac{1}{\mu}\bar{q}_2^+(\sigma)=\frac{\sqrt{2k}\sin\beta/2}{\bar{K}_2^+(k\cos\beta)}\frac{\sqrt{\sigma+k}\bar{K}_2^+(\sigma)}{\sigma-k\cos\beta+i0} \tag{2.11}$$

$$\bar{w}_2^-(\sigma,0)=\frac{h}{\mu_0}\bar{q}_2^-(\sigma)=-\frac{\sqrt{2k}\sin\beta/2}{\bar{K}_2^+(k\cos\beta)}\frac{1}{\sqrt{\sigma-k}\bar{K}_2^-(\sigma)}\frac{1}{\sigma-k\cos\beta-i0} \tag{2.12}$$

$$\bar{K}_2^-(\sigma)=\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{\lambda_2}{\sqrt{k^2+\tau^2}}\frac{d\tau}{\tau-i(\sigma-i0)}+\frac{1}{\pi}\int_0^k \operatorname{arctg}\frac{\lambda_2}{\sqrt{k^2-s^2}}\frac{ds}{\sigma-i0-s}\right]$$

$$\bar{K}_2^+(\sigma)=\bar{K}_2^-(-\sigma) \tag{2.13}$$

3. Решение поставленной исходной задачи, как уже отметили, представляется в виде суммы решений рассмотренных выше четной и нечетной задач

$$u_z(x,y)=u_z^{(\infty)}(x,y)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(C_1(\sigma)+\operatorname{sgn} y\,C_2(\sigma))e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-k^2}}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{3.1}$$

$$q^-(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\bar{q}_1^-(\sigma)+\bar{q}_2^-(\sigma))e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{3.2}$$

где $u_z^{(\infty)}(x,y)$ представляется формулой (1.1), а $C_1(\sigma), C_2(\sigma), \bar{q}_1^-(\sigma), \bar{q}_2^-(\sigma)$ - формулами (1.18), (2.6), (1.31), (2.11).

Из (3.1), проводя в комплексной плоскости разрезы по линиям $-k-i\tau,\ k+i\tau\ (0<\tau<\infty)$, обходя точки $\sigma=k\cos\beta$ и $\sigma=\sigma_L$ снизу, а $\sigma=-\sigma_L$ сверху, и замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости, для амплитуды перемещений в контактной зоне $(x<0, y=\pm 0)$ получим

$$u_z(x,\pm 0)=(1+A_{01}\pm A_{02})e^{-ikx\cos\beta}+A_L e^{-i\sigma_L x}+$$

$$+\frac{e^{-i\left(kx+\frac{\pi}{4}\right)}}{\pi}\int_0^\infty\sqrt{\tau}(\lambda_1 f_1(\tau)\mp f_2(\tau))e^{\tau x}d\tau \qquad (x<0) \tag{3.3}$$

где $A_{01}=\dfrac{k^2\cos^2\beta-k_0^2}{k_0^2-k^2\cos^2\beta+ik\lambda_1\sin\beta}$; $A_{02}=\dfrac{ik\sin\beta}{ik\sin\beta-\lambda_2}$

$$A_L=\frac{i(\sigma_L+k_0^+)\sqrt{\sigma_L-k}\bar{K}_1^+(\sigma_L)}{\sigma_L\left(\lambda_1+2\sqrt{\sigma_L^2-k^2}\right)}\left(a_2\frac{\sigma_L-k_0}{\sigma_L-k\cos\beta}-a_1\right) \tag{3.4}$$

$$f_1(\tau)=\left(-a_1+a_2\frac{k-k_0+i\tau}{k-k\cos\beta+i\tau}\right)\frac{(k+k_0+i\tau)\bar{K}_1^+(k+i\tau)}{\lambda_1^2(2ik\tau-\tau^2)-(k_0^2-k^2+\tau^2-2ik\tau)^2}$$

$$f_2(\tau)=\frac{\sqrt{2k}(2k+i\tau)\sin\beta/2}{(k-k\cos\beta+i\tau)(\lambda_2^2+\tau^2-2ik\tau)}\frac{\bar{K}_2^+(k+i\tau)}{\bar{K}_2^+(k\cos\beta)},$$

а из (3.2) для контактного напряжения –

$$\frac{1}{\mu}q(x)=A_0^{(q)}e^{-ikx\cos\beta}+A_L^{(q)}e^{-i\sigma_L x}+$$

$$+\frac{e^{-i\left(kx+\frac{\pi}{4}\right)}}{\pi}\int\limits_0^\infty\sqrt{\tau}\left(\left(k_0^2+\tau^2-k^2-2ik\tau\right)f_1(\tau)-\lambda_2 f_2(\tau)\right)e^{\tau x}d\tau \quad (x<0) \tag{3.5}$$

$$A_0^{(q)}=\frac{ik\left(k^2\cos^2\beta-k_0^2\right)\sin\beta}{k_0^2-k^2\cos^2\beta+i\lambda_1 k\sin\beta}+\frac{\lambda_2 k\sin\beta}{k\sin\beta+i\lambda_2}\quad A_L^{(q)}=-\sqrt{\sigma_L^2-k^2}A_L \tag{3.6}$$

Из (3.3) следует, что волновое поле в контактной зоне складывается из следующих компонентов: падающая волна, отраженная волна, поверхностная (локализованная) волна Лява и сдвиговая объемная волна. Отметим, что если $k_0<k$, то в соответствующих выражениях волна Лява отсутствует, а в (1.25) множитель при экспоненте $\dfrac{\sigma-i0-\sigma_L}{\sigma-i0-k_0}$ следует заменить единицей.

Следует особо отметить, что в выражениях (3.3), (3.5) наличие компонент поверхностной волны Лява и сдвиговой объемной волны обусловлено наличием ребра (кромки) упругого включения, так что в случае бесконечного включения эти члены отсутствуют при данной постановке задачи.

Приведем асимптотическое представление контактного напряжения в близкой к концу включения и далекой от него зонах

$$\frac{1}{\mu}q^-(x)=\frac{a_1-a_2}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{|x|^{\frac{1}{2}}}+O(1)\quad x\to-0$$

$$\frac{1}{\mu}q^-(x)=A_0^{(q)}e^{-ikx\cos\beta}+A_L^{(q)}e^{-i\sigma_L x}+e^{-i\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{B_q^{(0)}}{2\sqrt{\pi}|x|^{\frac{3}{2}}}+O\left(|x|^{-\frac{5}{2}}\right)\right)\quad x\to-\infty \tag{3.7}$$

где $B_q^{(0)}=\left(\dfrac{\sqrt{2k}\,\overline{K}_2^+(k)}{\lambda_2\sin\dfrac{\beta}{2}\overline{K}_2^+(k\cos\beta)}-\dfrac{\overline{K}_1^+(k)}{k_0-k}\left(a_1+a_2\dfrac{k_0-k}{k-k\cos\beta}\right)\right)$

а перемещение при $x\to-\infty$ имеет следующую асимптотику:

$$u_z(x,\pm0)=\left(1+A_{01}\pm A_{02}\right)e^{-ikx\cos\beta}+A_L e^{-i\sigma_L x}+e^{-i\left(kx+\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{B_u^{(0)}}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}+O\left(|x|^{-\frac{5}{2}}\right)\right) \tag{3.8}$$

где $B_u^{(0)}=\left(a_1+a_2\dfrac{k_0-k}{k-k\cos\beta}\right)\dfrac{\overline{K}_1^+(k)(k+k_0)\lambda_1}{\left(k_0^2-k^2\right)^2}\pm\dfrac{\sqrt{2k}\,\overline{K}_2^-(k)}{\lambda_2^2\sin\dfrac{\beta}{2}\;\overline{K}_2^+(k\cos\beta)}$

Из решений рассмотренной задачи можно получить решения задач предельных к рассмотренной – пространство с полубесконечной трещиной или с жестким включением. Рассмотрим эти частные случаи:

а) при $\mu_0 \to 0, \rho_0 \to 0$ (трещина) $\lambda_1 \to \infty, \lambda_2 \to 0$. Тогда из (1.25) $\overline{K}_1^{\pm}(\sigma) \to \infty$, из (1.31), (2.12) следует, что $\overline{q}_1^-(\sigma) = \overline{q}_2^-(\sigma) = 0$, т.е. напряжения на берегах трещины отсутствуют, а из (1.18) $C_1 = 0$. С другой стороны, из (2.13) следует, что при $\lambda_2 \to 0$ $\overline{K}_2^{\pm}(\sigma) \to 1$. Исходя из этих соображений, из (3.1) с помощью (2.6), (2.12) получим, что при $\mu_0 \to 0$, $\rho_0 \to 0$

$$
\begin{gathered}
u_z(x,y) = u_z^{(\infty)}(x,y) - \frac{\sqrt{2k}\sin\beta/2}{2\pi}\operatorname{sgn} y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-k^2}} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma-k}(\sigma - k\cos\beta - i0)} \\
\frac{1}{\mu} q(x) = \sqrt{2k}\sin\frac{\beta}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma+k}}{\sigma - k\cos\beta + i0} e^{-i(\sigma+i0)x} d\sigma, \qquad x > 0
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

которое совпадает с решением соответствующей задачи, приведенной в [4].

б) при $\mu_0 \to \infty$ (жесткое включение) $\lambda_1 \to 0$, $\lambda_2 \to \infty$. Тогда аналогичными соображениями, как выше, из (3.1) получим, что при жестком полубесконечном включении волновое поле определяется формулой

$$
u_z(x,y) = u_z^{(\infty)}(x,y) + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2k}\cos\beta/2 \;\; e^{-|y|\sqrt{\sigma^2-k^2}}}{\sqrt{\sigma+k}(\sigma - k\cos\beta - i0)} e^{-i\sigma x} d\sigma \tag{3.10}
$$

а напряжения на линии контакта и на ее продолжении

$$
q(x) = -ik\mu\sin\beta\, e^{-ikx\cos\beta} + \mu \frac{\sqrt{2k}\cos\beta/2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma-k}\, e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sigma - k\cos\beta - i0} \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{3.11}
$$

Эти решения также совпадают с решениями, приведенными в [4].

Здесь имелось в виду, что при $\mu_0 \to \infty$ $\overline{K}_1^{\pm}(\sigma) \to 1$ и

$$
\lim_{\mu_0 \to \infty} \frac{\overline{K}_2^-(k\cos\beta)}{\overline{K}_2^-(\sigma)} = \sqrt{\frac{k-\sigma}{k - k\cos\beta}}.
$$

4. Поле перемещений в пространстве, пользуясь подходом, изложенным в [9], представляется в виде (принимая $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$)

$$
u_z(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\beta)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{D_1(\sigma) + D_2(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} - \frac{A_1}{\lambda - \lambda_1} \right) e^{-i\lambda r} d\lambda, \tag{4.1}
$$

когда $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$,

где $\lambda = \sigma\cos\theta - i\sin\theta\sqrt{\sigma^2 - k^2}$, $\sigma(\lambda) = \lambda\cos\theta + i\sin\theta\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ (4.2)

$$D_1(\sigma) = -\frac{f(\sigma)\sqrt{\sigma - k}}{(\sigma - k\cos\beta - i0)(\sigma - k_0)\overline{K}_1^-(\sigma)}$$

$$D_2(\sigma) = -\frac{\sqrt{2k}\sin\beta/2}{\overline{K}_2^+(k\cos\beta)}\frac{\sqrt{\sigma + k}}{(\sigma - k\cos\beta - i0)\overline{K}_2^-(\sigma)} \tag{4.3}$$

$$f(\sigma) = \sigma(a_1 - a_2) + a_2k_0 - a_1k\cos\beta$$

$$\lambda_L = \lambda(\sigma_L) = \sigma_L\cos\theta - i\sin\theta\sqrt{\sigma_L^2 - k^2} = \sigma_L\cos\theta - \frac{i\sin\theta}{\lambda_1}\left(k_0^2 - \sigma_L^2\right) \tag{4.4}$$

A_1 – вычет функции $D_1(\sigma)/\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ относительно особой точки $\lambda = \lambda_L$, в формуле (4.1) контур интегрирования обходит точку $\lambda = -k$ сверху, а точки $\lambda = k$, $\lambda = k\cos(\theta + \beta)$, $\lambda = k\cos(\theta - \beta)$ – снизу, где $\lambda = k\cos(\theta \pm \beta)$ – нули функции $\sigma(\lambda) - k\cos\beta$.

В случае $\pi/2 < \theta < \pi$ –

$$u_z(r,\theta) = e^{-ikr\cos(\theta-\beta)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_1(\sigma) + D_2(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}e^{i\lambda r}d\lambda \tag{4.5}$$

где уже $\lambda = -\sigma\cos\theta + i\sin\theta\sqrt{\sigma^2 - k^2}$, $\sigma(\lambda) = -\lambda\cos\theta - i\sin\theta\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ (4.6)

Контур интегрирования обходит точки ветвления $\lambda = -k$ и $\lambda = k$ сверху и снизу, соответственно.

При $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$ функция $\sigma(\lambda) - k\cos\beta$ не имеет нулей, но при $\pi - \beta < \theta < \pi$ $\lambda = -k\cos(\theta + \beta)$ является единственным нулем этой функции и контур интегрирования обходит точку $\lambda = -k\cos(\theta + \beta)$ снизу.

Функция $D_1(\sigma)$ имеет простой полюс в точке $\lambda = -\lambda_L$.

В случае $\theta = \pi - \beta$ точка $\lambda = k$ является и простым полюсом функций $\frac{D_1(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}, \frac{D_2(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$ и точкой ветвления. В этом случае функцию перемещений можно представить в виде

$$u_z(r,\pi - \beta) = e^{ikr\cos 2\beta} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{D_1(\sigma) + D_2(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} - \frac{B_1 + B_2}{\lambda - k}\right)e^{i\lambda r}d\lambda + i(B_1 + B_2)e^{ikr} \tag{4.7}$$

где B_1, B_2 – вычеты относительно точки $\lambda = k$ функций $\frac{D_1(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$ и

$\dfrac{D_2(\sigma)}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}$, соответственно

$$B_1 = -\frac{i}{2}A_{01}, \quad B_2 = -\frac{i}{2}A_{02} \tag{4.8}$$

Отметим, что в случае $y<0$, т.е. $-\pi<\theta<0$ в вышеуказанных функциях $u_z(r;\theta)$ в подынтегральных выражениях (4.1), (4.5) следует заменить θ на $-\theta$, а $D_2(\sigma)$ на $-D_2(\sigma)$.

Полагая, что при выборе однозначной ветви $\sqrt{\alpha^2-k^2}$ разрезы в комплексной плоскости $\alpha=\lambda+i\tau$ проведены по линиям $k+i\tau, -k-i\tau$, $(0<\tau<\infty)$, с помощью леммы Жордана выражения перемещений (4.1), (4.5) можно представить в виде (при этом контур интегрирования в случае $0<\theta<\pi/2$ замыкается в нижней полуплоскости, а при $\pi/2<\theta<\pi$ – в верхней)

при $0<\theta<\pi/2$

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-i\left(r\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}}{\sqrt{\alpha^2-k^2}}\left(D_1(\sigma)+D_1(\sigma_2)+D_2(\sigma)+D_2(\sigma_2)\right)d\tau \tag{4.9}$$

где $\alpha=-k-i\tau$,

$$\sigma(\alpha)=\alpha\cos\theta+i\sin\theta\sqrt{\alpha^2-k^2} \qquad \sigma_2(\alpha)=\alpha\cos\theta-i\sin\theta\sqrt{\alpha^2-k^2} \tag{4.10}$$

Волновое поле состоит из падающей волны и объемной сдвиговой волны.

При $\pi/2<\theta<\pi-\beta$

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{i\left(r\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\alpha^2-k^2}}\left(D_1(\sigma)+D_1(\sigma_1)+D_2(\sigma)+D_2(\sigma_1)\right)d\tau+$$

$$+A_L e^{-ir\lambda_L} \tag{4.11}$$

где $\alpha=k+i\tau$,

$$\sigma(\alpha)=-\alpha\cos\theta-i\sin\theta\sqrt{\alpha^2-k^2}, \quad \sigma_1(\alpha)=-\alpha\cos\theta+i\sin\theta\sqrt{\alpha^2-k^2} \tag{4.12}$$

Волновое поле состоит из падающей волны, объемной сдвиговой волны, а также локализованной (поверхностной) волны Лява.

При $\pi-\beta<\theta<\pi$ волновое поле состоит из падающей и отраженной волн, поверхностной волны Лява и объемной сдвиговой волны –

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+\left(A_{01}+A_{02}\right)e^{-ikr\cos(\theta+\beta)}+A_2e^{-ir\lambda_L}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{e^{i\left(r\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\alpha^2-k^2}}\left(D_1(\sigma)+D_1(\sigma_1)+D_2(\sigma)+D_2(\sigma_1)\right)d\tau \qquad (4.13)$$

Исходя из того, что подынтегральные выражения экспоненциально убывают, и главный вклад в значениях интегралов дает их поведение в окрестности $\tau=0$, при больших значениях r (дальние от края включения зоны) получим следующие асимптотические представления перемещений, когда $rk\to\infty$:

при $-\pi\le\theta<-\pi+\beta$

$$u_z(r,\theta)=\left(1+A_{01}-A_{02}\right)e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+A_Le^{-ir\bar{\lambda}_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}}+O(rk)^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad (4.14)$$

при $\theta=-\pi+\beta$

$$u_z(r,-\pi+\beta)=\left(1+\frac{A_{01}-A_{02}}{2}\right)e^{ikr}+A_Le^{-ir\bar{\lambda}_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}O(rk)^{-\frac{1}{2}} \qquad (4.15)$$

при $-\pi+\beta<\theta<-\pi/2$

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+A_Le^{-ir\bar{\lambda}_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}}+O(rk)^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad (4.16)$$

при $-\pi/2\le\theta\le\pi/2$

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}}+O(rk)^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad (4.17)$$

при $\pi/2<\theta<\pi-\beta$

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+A_Le^{-ir\lambda_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}}+O(rk)^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad (4.18)$$

при $\theta=\pi-\beta$

$$u_z(r,\pi-\beta)=e^{ikr\cos 2\beta}+\frac{A_{01}+A_{02}}{2}e^{ikr}+A_Le^{-ir\lambda_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}O(rk)^{-\frac{1}{2}} \qquad (4.19)$$

при $\pi-\beta<\theta\le\pi$

$$u_z(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+\left(A_{01}+A_{02}\right)e^{-ikr\cos(\theta+\beta)}+$$

$$+A_Le^{-ir\lambda_L}+e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\left(B(\theta)\frac{1}{\sqrt{\pi kr}}+O(rk)^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad (4.20)$$

где если $\theta\ne\pm\pi$

$$B(\theta) = -\frac{1}{\cos\theta + \cos\beta} \times$$

$$\times \left(\frac{\cos\frac{\theta}{2} f(-k\cos\theta)}{\sqrt{k}(k\cos\theta + k_0)\overline{K}_1^-(-k\cos\theta)} - \frac{i\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\overline{K}_2^+(k\cos\beta)\overline{K}_2^-(-k\cos\theta)} \right) \quad (4.21)$$

а при $\theta = \pm\pi$, $\dot{B}(\theta) = 0$.

Асимптотическое представление напряжения $\tau_{\theta z}$ вблизи края включения имеет вид

$$\tau_{\theta z} = \mu \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi r}} \left((a_2 - a_1)\sin\frac{\theta}{2} - \frac{i\sqrt{2k}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\overline{K}_2^+(k\cos\beta)} \right) + O(1),\ r \to 0 \quad (4.22)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В.С., Караханян И.М. О факторизации в задаче дифракции гармонической волны на упругое полубесконечное включение. // Уч. записки ЕГУ, 2, 2001г., с.32-39
2. Саркисян В.С., Караханян И.М. Дифракция сдвиговых упругих гармонических волн на полубесконечных включениях. Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван, 2002. С. 266-280.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
4. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир. 1962. 279 с.
5. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. Записки ЕГУ, 1979. 3. С. 29-34.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука. 1965 327 с.
7. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука. 1972. 283 с.
8. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. // ПММ. Т.32. №4. 1968. С. 632-646.
9. Григорян Э.Х., Саркисян Л.В. Дифракция сдвиговых электроупругих поверхностных волн на крае электропроводящего упругого слоя. Изв. НАН Арм. Механика. Т. 52. №1. 1999. С.30-39.

Институт Механики НАН Армении
Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию 30.01.2004