ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №3, 2003 Механика

УДК 539.5

О НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСТАНДАРТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ДЛЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОНАСЫЩЕННЫХ ГРУНТОВ

Багдоев А.Г., Оганян Г.Г., Шекоян А.В.

Ա.Գ. Բագդոև, Գ.Գ. Օհանյան, Ա.Վ. Շեկոյան

Էլեկտրահաղորդիչ հեղուկով հագեցած գրունտների համար ոչ սովորական գծայնություն ունեցող էվոլյուցիոն հավասարման անալիտիկ մի քանի լուծումների մասին

Դիտարկված են հեղուկով հագեցած էլեկտրահաղորդիչ գրունտի համար ոչ սովորական ոչ գծայնություն պարունակող էվոլյուցիոն հավասարման անալիտիկ ճշգրիտ և մոտավոր լուծումների լայն դասեր:

A.G. Bagdoev, G.G. Oganyan, A.V. Shekoyan

On some Analytic Solutions of Evolutionary Equation with Nonstandard Nonlinearity for Electroconducting Fluid Saturated Solids

Рассматривается широкий круг аналитических точных и приближенных решений эволюционного уравнения для электропроводящих жидконасыщенных грунтов с нестандартной нелинейностью. Показано, что в недиспергирующей диссипативной среде могут быть солитонообразные волны.

Волновые процессы в жидконасыщенных грунтах описываются системой уравнений для твердой и жидкой фаз и уравнений Максвелла [1-3]. Для описания поведения нелинейных волн в таких сложных средах из исходной системы выводится нелинейное эволюционное уравнение [4,5] с нестандартной нелинейностью. Исследование такого уравнения представляет интерес для широкого класса применений, а именно — в сейсмологии, геофизике, геологии, в частности, при изысканиях полезных ископаемых, электроразведке и так далее.

Эволюционное уравнение имеет вид [4, 5]:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial x}+L\Delta_\perp\psi+B\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=G\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)+D\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3}+E\frac{\partial\psi^2}{\partial\tau} \tag{1}$$

где x — координата, вдоль которой распространяется волна, $\Delta_\perp$ — оператор Лапласа по координатам y, z; ψ — компонента скорости частиц среды по нормали к поверхности волны, L, B, D, G и E — соответственно коэффициенты дифракции, трения, вязкости, нелинейностей, причем G обусловлен обычной (геометрической, физической и т.д.), а E — концентрационной или токовой нелинейностью. Эти коэффициенты не зависят от координат и времени, но содержат все физические параметры, характеризующие среду, $\tau = xc_1^{-1}-t$, (c_1 — линейная нормальная скорость волны). Как видно из уравнения (1), в рассматриваемом волновом процессе дисперсия отсутствует. Если полагать $L=B=D=E=0$, то в этом случае уравнение (1) имеет решение типа ударной волны [6].

В данной работе уравнение (1) будет исследовано как приближенными методами, так и посредством точного частного решения. Так как в природе могут реализоваться ситуации, когда проявляется только токовая или только физическо-геометрическая нелинейности или обе нелинейности совместно, уравнение (1) будет исследовано для каждого случая в отдельности.

Итак, предположим, что $G \neq 0$, $E \neq 0$. Тогда уравнение (1) при $L = D = 0$ имеет точное решение ψ_0, которое после ввода переменной $\xi = -\dfrac{\tau}{G}$ имеет следующий вид [6]:

$$\psi_0 = \exp(-Bx + E\xi) f\left[F_1(\xi) - F_2(x)\psi_0 \exp(-E\xi)\right] \tag{2}$$

где

$$F_1(\xi) = -\frac{1}{E}\left[\exp(-E\xi) - 1\right], \quad F_2 = \frac{1}{B}\left[\exp(Bx) - 1\right]$$

$$\psi_0(\xi, 0) = g(\xi), \qquad f\left[F_1(\xi)\right] = g(\xi)\exp(-E\xi_0)$$

$g(\xi)$ – произвольная функция, которая выбирается таким образом, чтобы функция ψ_0 удовлетворяла некоторым граничным условиям, $\xi = -\tau / c_1$. В силу требования $\psi_0 \to 0$ при $x \to \infty$, должно быть $B > 0$.

Подобно задачам поршня в гидродинамике можно брать

$$g(\xi) = U_0 H(\xi), \quad H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \xi > 0 \\ 0 & \text{при} \quad \xi < 0 \end{cases} \quad U_0 = \text{const}.$$

Пусть $E < 0$, тогда из (2) следует

$$\psi_0 = \begin{cases} U_0 \dfrac{\exp(-Bx)}{1 - E\varphi}\left\{1 + U_0 \dfrac{\exp(-Bx) E\left[\varphi - F_2(x)(1 - E\varphi)\right]}{1 - E\varphi}\right\}^{-1} & \chi > 0 \\ 0 & \chi < 0 \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi = \left[1 - \exp(-E\xi)\right]E^{-1}$, $\chi = \varphi - F_2(x)(1 - E\varphi)\psi_0$.

Первое неравенство в (3) можно переписать

$$x < \frac{1}{B}\ln\left[U_0 \frac{\varphi^2 BE(1 - E\varphi)^{-1} + \varphi E + 1}{U_0 + \varphi(U_0 E - B)}\right] \tag{4}$$

Неравенство (4) определяет область переменного x, ограниченную кривой $\varphi(x)$, впереди которой $\psi_0 = 0$, а позади $\psi_0 \neq 0$, то есть $\varphi = F_2(x)(1 - E\varphi)\psi_0$ является фронтом разрыва. Выражение (4) имеет место для $\varphi < U_0(B - EU_0)^{-1}$.

Если $E > 0$, выражение (3) остается в силе, только неравенства из (3) и (4) меняются на обратные.

Приближенное решение уравнения (1) имеет вид [5]

$$\psi = \psi_0\left[1 + T(y, z, x, \xi)\right] \tag{5}$$

где искомая функция T должна удовлетворять условиям

$$1 >> T >> \frac{\partial T}{\partial x}, \ \frac{\partial T}{\partial \xi}, \ \frac{\partial T}{\partial y}, \ \frac{\partial T}{\partial z}$$

тогда, подобно [4], для функции T получится выражение

$$T = \frac{LG\Delta_{\perp}\psi_0 + DG^{-2}\dfrac{\partial^3\psi_0}{\partial\xi^3}}{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\psi_0\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\xi}\right) - E\dfrac{\partial\psi_0^2}{\partial\xi}}$$

Для определения профиля стационарной волны введем в уравнение (1) переменную $\eta = -\dfrac{\xi}{aG^2}$, где $\zeta = a\tau + by + dz - kx$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\mathrm{V}\frac{d\psi}{d\eta} + B_1\psi = -\psi\frac{d\psi}{d\eta} + D_1\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + E_1\psi^2 \tag{6}$$

где $\mathrm{V} = \dfrac{k}{aG} - \dfrac{L\left(b^2 + d^2\right)}{a^2G}$, $B_1 = aB$, $D_1 = \dfrac{D}{aG^2}$, $E_1 = aE$.

Если в уравнении (6) положим $D_1 = 0$, то полученное уравнение имеет точное решение ψ_1:

$$\eta = \frac{1}{aE}\left[A\ln\psi_1 + B_2\ln\left(\psi_1 - \frac{B}{E}\right)\right] \tag{7}$$

где $A = \dfrac{\mathrm{V}E}{a^2GB}$, $B_2 = 1 - \dfrac{\mathrm{V}E}{a^2GB}$.

Приближенное решение уравнения (6) снова будем искать в виде (5), где $\psi_0 = \psi_1$, $T = T_1(\eta)$ и удовлетворяет условиям

$$T >> \frac{dT}{d\eta} >> \frac{d^2T}{d\eta^2} \tag{8}$$

тогда

$$T_1(\eta) = \frac{D\dfrac{d^2\psi_1}{d\eta^2}}{\psi_1\dfrac{d\psi_1}{d\eta} - E_1\psi_1^2}$$

Следует отметить, что из ветвей функции (7) следует брать только те части, которые удовлетворяют граничным условиям, то есть в бесконечности стремятся к нулю.

Уравнение (1) имеет точное частное решение. Перейдем в (1) к координате ξ и введем новую функцию $\varphi_1 = \dfrac{G}{aD}\psi$, тогда получится

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\zeta^2} + L_1\frac{d\varphi_1}{d\zeta} - M\varphi_1 + N\varphi_1^2 + \varphi_1\frac{d\varphi_1}{d\zeta} = 0 \tag{9}$$

где $L_1 = \left[ak - L\left(b^2 + d^2\right)\right]\left(a^3D\right)^{-1}$, $M = \dfrac{B}{a^2D}$, $N = E\left(a^2D\right)^{-1}$.

Следуя методу Бэклунда [7, 8], решение уравнения (9) можно записать

$$\varphi_1 = U_2\left[1+\exp(k_1\zeta)\right]^{-1} + U_3,$$

где $k_1 = \pm(2N - L)$, а функции U_2 и U_3 определяются в ходе решения. Использованный метод дает два точных частных решения:

$$\varphi_1 = \begin{cases} \dfrac{2k_1 \exp(k_1\zeta)}{1+\exp(k_1\zeta)} & \text{при} \quad U_3 = 0 \\ \dfrac{2k_1 \exp(k_1\zeta)}{1+\exp(k_1\zeta)} + \dfrac{M}{N}, & \text{при} \quad U_3 = \dfrac{M}{N} \end{cases}$$

Полученные функции φ_1 есть сглаженные ударные волны, разница между которыми в постоянных значениях при $\zeta = 0$ и $\zeta = \pm\infty$.

Теперь приступим к случаю, когда в уравнении (1) $E = 0$, то есть токовая нелинейность не проявляется. Для простоты записи решения уравнения (1) введем обозначения

$$\eta_1 = x_1 + b_1\zeta_1 + d_1\zeta_2 - cx, \quad x_1 = -\frac{\tau}{G}, \quad b_1^2 = 2LGb^2$$

$$d_1^2 = 2LGd^2, \quad \nu = DG^2, \quad a = 1, \quad V_1 = -k + \frac{1}{2}\left(b_1^2 + d_1^2\right)$$

тогда получим уравнение типа (6) с соответствующими новыми обозначениями. Если в нем полагать $B = 0$, то частное точное решение ψ_2 имеет вид [6]

$$\psi_2 = \nu_1 - \nu_2 \operatorname{th}\left(\frac{\nu_2}{2\nu}\eta_1\right)$$

где

$$\nu_1 = \frac{1}{2}\left[\psi_2(+\infty) + \psi_2(-\infty)\right], \quad \nu_2 = \frac{1}{2}\left[\psi_2(-\infty) - \psi_2(+\infty)\right]$$

$$c = \nu_1 + \frac{b_1^2}{2} + \frac{d_1^2}{2}, \qquad \psi_2(-\infty) > \psi_2(+\infty)$$

Функция ψ_2 есть обычное решение сглаженной ударной волны.

В случае $B \neq 0$, аналогично (5), где $T = T_2(\eta_1)$, $\psi_0 = \psi_2$ и T_2 удовлетворяет неравенствам (8), для T_2 получим

$$T_2(\eta_1) = 2B\nu\left\{\left[1 - 3\operatorname{th}^2\left(\frac{\nu_2}{2\nu}\eta_1\right)\right]\nu_2^2 + 2\nu_1\nu_2\operatorname{th}\left(\frac{\nu_2}{2\nu}\eta_1\right)\right\}^{-1}$$

Для представления о характере кривых $T_2(\eta)$ запишем характерные значения

$$T_2(0) = \frac{2B\nu}{\nu_2^2}, \quad T_2(+\infty) = \frac{B\nu}{\nu_2\psi_2(+\infty)}, \quad T_2(-\infty) = -\frac{B\nu}{\nu_2\psi_2(-\infty)}$$

$T_2(\eta_1)$ имеет две особенности $\operatorname{th}\left(\dfrac{\nu_2}{2\nu}\eta_1\right)=\dfrac{\nu_1}{3\nu_2}\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{\nu_1^2}{\nu_2^2}+3}$, в которых фигурная скобка в выражении T_2 превращается в ноль. Кроме окрестностей этих точек всюду T_2 мало.

Теперь рассмотрим случай, когда $G=0$, а $E\neq 0$; такая ситуация проявляется в сильно проводящих и полупроводниковых средах, когда токовая нелинейность проявляется раньше, чем остальные. Уравнение (1), записанное через координату ζ, имеет вид

$$V_2\frac{d\psi}{d\zeta}+B_1\psi-E_1\psi^2-D_2\frac{d^2\psi}{d\zeta^2}=0 \qquad (10)$$

где $V_2=-ak+L(b^2+d^2)$, $D_2=a^3D$. Уравнение (10) при $D_2=0$ имеет решение

$$\psi_3=\left[c\exp\left(\frac{B_1}{V_2}\zeta\right)+\frac{E_1}{B_1}\right]^{-1}$$

где постоянная интегрирования $c=\dfrac{1}{\psi_3(0)}-\dfrac{E_1}{B_1}$, причем при $\dfrac{E_1}{B_1}>(<)0$ должно быть $c>(<)0$ для конечности ψ_3. Решение ψ_3 описывает сглаженную ударную волну.

Решение уравнения (10), как и выше, будем искать в виде (5), где $\psi_0=\psi_3$, а $T=T_3(\zeta)$, причем последнее удовлетворяет условиям типа (8).

Тогда для T_3 получится

$$T_3(\eta\zeta)=-\frac{2D_2C^2B_1^2}{E_1V_2^2}\psi_3$$

Здесь полученное решение верно для всех ζ.

Уравнение (10) имеет точное решение, которое можно получить методом Бэклунда. Полученные этим методом решения справедливы при определенных связях между коэффициентами, причем в данном случае их несколько.

Итак, решения имеют следующий вид:

$$\psi=-\frac{6}{25}\frac{V_2^2}{D_2E_1}\frac{\exp\left(\dfrac{2V_2}{5D_2}\zeta\right)}{\left[1+\exp\left(\dfrac{V_2}{5D_2}\zeta\right)\right]^2}\ \text{при}\ \begin{cases}U_3=0 & B_1=-\dfrac{b}{25}\dfrac{V_2^2}{D_2}\\[2ex] U_3=\dfrac{B_1}{E_1} & B_1=\dfrac{b}{25}\dfrac{V_2^2}{D_2}\end{cases}$$

$$\psi=\frac{6}{5}\frac{V^2}{E_1}k_i\left[\frac{1+(1+5k_iD_2/V_2)\exp(k_i\zeta)}{[1+\exp(k_i\zeta)]^2}-1\right],\qquad i=1,2,3,4$$

где в случае $U_3=0$: при $i=1$ $B_1=-\dfrac{100}{9}\dfrac{V_2^2}{D_2}$, а при $i=2$ $B_1=-\dfrac{9}{2}\dfrac{V_2^2}{D_2}$, в случае $U_3 = \frac{B_1}{E_1}$: при $i=3$ $B_1 = \frac{100}{9}\frac{V_2^2}{D_2}$ или при $i=4$ $B_1 = \frac{9}{2}\frac{V_2^2}{D_2}$.

$$K_{1,2} = -\frac{\alpha_{1,2}}{17} - \frac{30}{17}\frac{\beta}{\alpha_{1,2}}, \quad K_{3,4} = -\frac{\alpha_{3,4}}{17} + \frac{30}{17}\frac{\beta}{\alpha_{3,4}}$$

$$\alpha_{1,3}^2 = \mp\frac{100}{9}\beta, \ \alpha_{2,4}^2 = \mp\frac{9}{2}\beta, \quad \beta = \frac{B_1}{D_2}$$

Все полученные решения, кроме последнего, представляют сглаженные ударные волны с разными асимптотическими значениями, а последние кривые есть солитоноподобные решения.

Интересно отметить, что в отличие от обычных бездисперсионных случаев, когда за счет диссипации получается сглаженная ударная волна, в данном случае получается решение типа солитона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра. 1970. 335с.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solids // J. Acoustic. Soc. Amer. 1956. V.28. P.168-186.
3. Pride S. Governing equations for coupled electromagnetics and acoustics of porous media // Phys. Rev. B. 1994. V.50. N21. P.15678-15696.
4. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Нелинейные волны в твердой вязкой среде с полостями // Акуст. ж. 1999. Т.45. №2. С.149-156.
5. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Распространение волнового пучка в вязкоупругом, диспергирующем, нелинейном, предварительно деформированном слое со свободными поверхностями // Изв. РАН. МТТ. 1996. №6. С.93-101.
6. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев: Наукова думка. 1991. 198с.
7. Оганян Г.Г. О структурах нелинейных волн в термически релаксирующей газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2002. №2. С.110-119.
8. Кудряшов Н.А. Преобразования Бэклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса – КдФ. // Докл. АН СССР. 1988. Т.300. №2. С.342-345.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
24.03.2003