ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №3, 2003 Механика

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Даноян З.Н.

Զ.Ն. Դանոյան
Հարթ մագնիսաառաձգական ալիքների տարածումը անիզոտրոպ իդեալական հաղորդիչ միջավայրերում

Սմիռնովի-Սոբոլևի կոմպլեքս լուծումների մեթոդի հիման վրա կառուցված են մագնիսաառաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումները, չորս առաձգական հաստատուններ ունեցող անիզոտրոպ իդեալական հաղորդիչ միջավայրերի համար: Այդ լուծումներից առանձնացված են լուծումներ որոնք ներկայացնում են հարթ մագնիսաառաձգական ալիքներ: Բերվում է ալիքների դասակարգումը արագ և դանդաղ կամ քվազիերկայնական ու քվազիլայնական ալիքների՝ կախված միջավայրի ֆիզիկա մեխանիկական հատկություններից և արտաքին մագնիսական դաշտի մեծությունից ու կողմնորոշումից: Ուսումնասիրվում են փուլային արագությունների փոփոխությունները կախված նախանշված պարամետրերից: Մասնավորապես որոշված են փուլային արագությունների էքստրեմալային արժեքները և տարածման ուղղությունները:

Այս հարցը անիզոտրոպ միջավայրերի համար դիտարկված է [4-6]-ում, մագնիսաառաձգական ալիքների համար՝ [1-3]-ում:

Z.N. Danoyan
The Propagation of Magnetoelastic Plane Waves in Anisotropic Perfectly Cconducting Media

На основе метода комплексных решений Смирнова-Соболева [7] построены функционально-инвариантные решения плоской задачи теории магнитоупругости для идеально-проводящих анизотропных сред с четырьмя упругими постоянными. Из этих решений отделены решения, представляющие собой плоские магнитоупругие волны.

Приводится классификация волн на быстрые и медленные или на квазипродольные и квазипоперечные в зависимости от физико-механических свойств среды и от величины и ориентации внешнего магнитного поля. Изучаются изменения фазовых скоростей в зависимости от указанных параметров. В частности, определены интервалы монотонности, экстремальные значения и направления распространения фазовых скоростей.

Для анизотропных сред этот вопрос рассмотрен в [4,5,6], для магнитоупругих волн — в [1-3].

Введение. Магнитоупругие волновые процессы в анизотропных упругих средах сложны и многообразны, зависят от класса анизотропии, соотношений упругих постоянных, величины и направления внешнего магнитного поля, направлений распространения волн и т.д. В отличие от изотропных сред, где распространяются чисто продольные и чисто поперечные волны, в анизотропных средах, а также изотропных и анизотропных средах в магнитном поле распространяются квазипродольные и квазипоперечные, или быстрые и медленные волны. В изотропных средах волновой процесс был описан функционально-инвариантными или комплексными решениями волновых уравнений [1]. В работах [2-4] методом комплексных решений исследованы волновые процессы в анизотропных средах, причем в [4] предлагается уточняющий подход к построению комплексных решений. В работах [5,6] методом комплексных решений изучены волновые процессы в изотропных средах в магнитном поле. В работах [7,8] этим методом изучено поведение магнитоупругих волн в идеально-проводящих анизотропных средах. В этой работе продолжается изучение данного вопроса. Детально изучаются решения, соответствующие плоским магнитоупругим волнам. Приводится классификация волн на быстрые и медленные или на квазипродольные и квазипоперечные в зависимости от физико-механических свойств среды и от величины и ориентации внешнего магнитного поля. Изучаются изменения фазовых скоростей в зависимости от указанных параметров. В частности, определены интервалы монотонности, экстремальные значения и направления распространения фазовых скоростей.

Для анизотропных сред этот вопрос рассмотрен в [4,5,6], для магнитоупругих сред — в [1-3].

1.Постановка задачи. Основные уравнения и их решения. Магнитоупругие волны в анизотропных идеально-проводящих упругих средах в плоском случае при наличии внешнего однородного постоянного магнитного поля с вектором напряженности $\vec{H}_0$ описываются следующими уравнениями движения в перемещениях [1,3]:

$$a_m u_{xx} + c_m v_{xy} + d_m u_{yy} = u_{tt},\quad e_m v_{xx} + c_m u_{xy} + b_m v_{yy} = v_{tt} \tag{1.1}$$

где $u = f(x,y,t)$, $v = g(x,y,t)$ — компоненты упругого перемещения $\vec{u} = \{u, v, 0\}$ в декартовой системе координат x, y, z, оси которой совпадают с главными направлениями упругости среды, a_m, b_m, c_m, d_m, e_m — постоянные коэффициенты, определяемые выражениями (индексы у u и v обозначают производные по x, y и t):

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_0,\ b_1 = b_0 + \chi,\ d_1 = d_0,\ \ e_1 = d_0 + \chi,\ c_1 = c_0\\
&a_2 = a_0 + \chi,\ b_2 = b_0,\ d_2 = d_0 + \chi,\ \ e_2 = d_0,\ \ c_2 = c_0\\
&a_3 = a_0 + \chi,\ b_3 = b_0 + \chi,\ \ d_3 = d_0,\ \ e_3 = d_0,\ c_3 = c_0 + \chi\\
&a_0 = c_{11}/\rho_0,\ b_0 = c_{22}/\rho_0,\ \ d_0 = c_{66}/\rho_0,\ c_0 = (c_{12} + c_{66})/\rho_0,\ \ \chi = H_0^2/4\pi\rho_0
\end{aligned} \tag{1.2}$$

c_{ik} — упругие постоянные, ρ_0 — плотность среды, χ — скорость Альфвена.

В (1.1) $m = 0,1,2,3$ соответствует случаям отсутствия и следующим направлениям магнитного поля: $\vec{H}_0 = 0, \vec{H}_0 = H_0\vec{i},\ \ \vec{H}_0 = H_0\vec{j}, \vec{H}_0 = H_0\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты координатной системы $Oxyz$.

Ограничения, которые должны налагаться на коэффициенты системы (1.1), определяются из условия вполне гиперболичности системы (1.1) и из условия положительной определенности формы упругой энергии [1]. Ввиду того, что упругие постоянные a_0, b_0, c_0, d_0 реальных известных сред рассматриваемого класса удовлетворяют условиям [4-6]:

$$d_0 > 0,\ A_0 = a_0 - d_0 > 0,\ B_0 = b_0 - d_0 > 0,\ \ 0 < c_0 < c_E^{(0)} = \sqrt{a_0 b_0} + d_0 \tag{1.3}$$

поведение упругих волн исследуется при (1.3) и при $\chi > 0$.

Согласно методу комплексных решений Смирнова-Соболева [7], выражаем решение системы уравнений (1.1) функциями:

$$u = f(\Omega), v = g(\Omega) \tag{1.4}$$

где Ω представляет собой функцию, определенную в неявном виде линейным уравнением относительно x, y, t:

$$\delta \equiv l(\Omega)t + m(\Omega)x + n(\Omega)y - k(\Omega) = 0 \tag{1.5}$$

Здесь под f и g понимаются непрерывные дважды дифференцируемые функции, если величины $l(\Omega),\ldots,k(\Omega)$ — вещественны. А если некоторые из этих величин комплексны, то f и g — аналитические функции от Ω.

Определяя производные функций (1.4) по известным формулам дифференцирования сложных и неявных функций [5,6] из (1.5) и подставляя их значения в систему (1.1), получим условия:

$$\begin{aligned}(a_m m^2+d_m n^2-l^2)f'(\Omega)+c_m mn\,g'(\Omega)=0\\ c_m mn\,f'(\Omega)+(e_m m^2+b_m n^2-l^2)g'(\Omega)=0\end{aligned}\qquad(1.6)$$

устанавливающие взаимосвязь между искомыми функциями (1.4).

Система (1.6) имеет ненулевое решение, если имеет место условие:

$$\Delta\equiv(a_m m^2+d_m n^2-l^2)(e_m m^2+b_m n^2-l^2)-c_m^2m^2n^2=0\qquad(1.7)$$

Уравнение (1.7) устанавливает зависимость между функциями $l(\Omega),m(\Omega),n(\Omega)$, а также, согласно (1.6), между производными $f'(\Omega),\ g'(\Omega)$.

Таким образом, класс функций (1.4) выражает решение системы (1.1), если их аргумент Ω определен уравнением (1.5) с коэффициентами, подчиненными уравнению (1.7), а сами функции — условием (1.6).

2. Однородные и неоднородные плоские волны. Из класса функционально-инвариантных решений можно отделить решения, представляющие собой плоские волны. Для этого в уравнении (1.5) примем $l(\Omega)\equiv1, m(\Omega)\equiv-\theta=\text{const}$, $k(\Omega)\equiv\Omega, n(\Omega)\equiv\lambda=\text{const}$. Тогда получим:

$$u_k=f_k(\Omega_k),\ \mathrm{v}_k=g_k(\Omega_k)\qquad(2.1)$$

$$\Omega_k=t-\theta x\pm\lambda_k y\quad(k=1,2)\qquad(2.2)$$

где λ_k — корни уравнения (1.7), которые в данном случае принимают вид:

$$b_m d_m\lambda^4-p_m(\theta)\lambda^2+r_m(\theta)=0\qquad(2.3)$$

Решения уравнения (2.3) представим в виде:

$$\lambda=\pm\lambda_k(\theta)=\pm\sqrt{\left(p_m(\theta)+(-1)^k\sqrt{q_m(\theta)}\right)/2b_m d_m}.\ (k=1,2)\qquad(2.4)$$

Здесь приняты обозначения:

$$p_m=b_m+d_m-1_m\theta^2,\ r_m=(a_m\theta^2-1)(e_m\theta^2-1),\ l_m=a_m b_m+d_m e_m-c_m^2\qquad(2.5)$$

$$q_m=p_m^2-4b_m d_m r_m=D_m\theta^4-2M_m\theta^2+B_m^2,\ D_m=l_m^2-4a_m b_m d_m e_m\qquad(2.6)$$

$$M_m=(b_m+d_m)N_m-(a_m d_m-b_m e_m)B_m\qquad(2.7)$$

$$A_m=a_m-e_m,\ B_m=b_m-d_m,\ N_m=A_m B_m-c_m^2\qquad(2.8)$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что при вещественных значениях θ, функции (2.1) выражают однородные и неоднородные плоские волны.

Для построения решений можно использовать как первое, так и второе уравнение (1.6). Однако при некоторых значениях θ коэффициенты одного из уравнений могут одновременно обращаться в ноль и решение, составленное на основе этого уравнения, при таких значениях теряет смысл. Чтобы устранить этот недостаток, в работе [5] предлагается сначала из условий (1.6) составить обобщенное условие, суммируя последние. Решение, составленное на основе обобщенного условия:

$$(a_m\theta_k^2+d_m\lambda_k^2-c_m\theta_k\lambda_k-1)f_k'(\Omega_k)+(e_m\theta_k^2+b_m\lambda_k^2-c_m\theta_k\lambda_k-1)g_k'(\Omega_k)=0, \quad (2.9)$$

согласно (2.1), можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u_k&=(e_m\theta^2+b_m\lambda_k^2-c_m\theta\lambda_k-1)W_k(\Omega_k)\\ \mathrm{v}_k&=-(a_m\theta^2+d_m\lambda_k^2-c_m\theta\lambda_k-1)W_k(\Omega_k)\end{aligned} \quad (k=1,2) \qquad (2.10)$$

Здесь W_k — ветви произвольной непрерывной дважды дифференцируемой функции W, если коэффициенты при переменных x,y,t в (2.2) вещественны. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области переменных x,y,t комплексные величины, то W — аналитическая функция комплексной переменной Ω.

В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные волны.

Выбор знака + или − перед λ_k в (2.2) показывает, что плоские волны (2.10) распространяются в противоположных направлениях. Ввиду этого в дальнейшем будем рассматривать волны со знаком + перед λ_k.

3. Классификация плоских волн и характер изменения их скоростей. Уравнения фронтов плоских волн имеют вид:

$$\Omega_k=t-\theta x+\lambda_k y=C=\mathrm{const} \qquad (3.1)$$

Фазовые скорости и направления распространения этих волн определяются по нижеприведенным формулам:

$$\vec{V}_k=-\frac{\partial\varphi/\partial t}{|\mathrm{grad}\varphi_k|}\vec{n}_k,\ \vec{n}_k=\frac{\mathrm{grad}\varphi_k}{|\mathrm{grad}\varphi_k|},\ \varphi_k=C-t+\theta x-\lambda_k y$$

$$\vec{V}_k=\frac{\theta}{\theta^2+\lambda_k^2}\vec{i}-\frac{\lambda_k}{\theta^2+\lambda_k^2}\vec{j},\quad \vec{n}_k=\frac{\theta}{\sqrt{\theta^2+\lambda_k^2}}\vec{i}-\frac{\lambda_k}{\sqrt{\theta^2+\lambda_k^2}}\vec{j} \qquad (3.2)$$

$$V_k=\frac{1}{\sqrt{\theta^2+\lambda_k^2}},\qquad \mathrm{tg}\alpha_k=\frac{\theta}{\lambda_k(\theta)}$$

где $\vec{n}_k$ — единичные векторы нормалей к фронтам волн, V_k — фазовые скорости распространения, $\alpha_k=\angle(-\vec{j},\vec{n}_k)$, C — произвольная константа [3,4].

Из (3.2) следует, что каждому значению параметра θ из промежутка $(-\infty;\infty)$, для которых величины $\lambda_k(\theta)$ вещественны, соответствуют плоские однородные волны, фазовые скорости и направления распространения которых определяются формулами $(3.2)_6$ и $(3.2)_7$. Ввиду симметрии будем рассматривать интервал $0\le\theta<\infty$.

Как известно [2-4], важное значение имеет вопрос о разделении волн на квазипродольные и квазипоперечные или на быстрые и медленные в зависимости от параметра θ при любых вышеуказанных допустимых значениях параметров a_0, b_0, c_0, d_0 и χ (при выполнении (1.3) и при $\chi>0$) [1].

Исследование этого вопроса связано с изучением свойств корней $\lambda_k(\theta)$ характеристического уравнения (2.3). Этот вопрос детально изучен в работе [3], где получен следующий окончательный результат:

1) Параметры a_0, b_0, c_0, d_0 и χ удовлетворяют условиям:

а) $S_m = A_m d_m + c_m^2 > 0,\ K_m = A_m b_m - c_m^2 > 0$, или б) $K_m < 0, S_m < 0$.

В этом случае один из корней уравнения $r_m(\theta) = 0$ является нулем функции $\lambda_1(\theta)$, а другой корень — нулем функции $\lambda_2(\theta)$; в случае а) — $\theta_{r_1}^{(m)} = 1/\sqrt{a_m}$ — корень функции $\lambda_1(\theta)$, $\theta_{r_2}^{(m)} = 1/\sqrt{e_m}$ — корень $\lambda_2(\theta)$; в случае б) корни меняются местами; $\lambda_k(\theta)$ вещественны в отрезках [0, $\theta_{rk}^{(m)}$]. В этом случае корни $\lambda_k(\theta)$ относятся к первому типу [3].

2) Указанные параметры удовлетворяют условиям $K_m < 0, S_m > 0$. Обе величины $\theta_{ri}^{(m)}$ являются нулями $\lambda_1(\theta)$, а $\lambda_2(\theta)$ нигде не обращается в ноль. $\lambda_1(\theta)$ принимает вещественые значения в двух отрезках:

$$[0;\theta_{r1}^{(m)}] \text{ и } \theta_{r2}^{(m)};\theta_{q1}^{(m)}], \text{ при } A_m > 0;\ [0;\theta_{r2}^{(1)}] \text{ и } [\theta_{r1}^{(1)};\theta_{q1}^{(1)}], \text{ при } A_1 < 0 \quad (3.3)$$

а функция $\lambda_2(\theta)$ в одном интервале $\left[0, \theta_{q1}^{(m)}\right]$, причем $\lambda_1(\theta_{q1}^{(m)}) = \lambda_2(\theta_{q1}^{(m)}) = \lambda^*$, где $\theta_{q1}^{(m)}$ — корень уравнения $q_m(\theta)$ и определяется следующим образом:

$$\theta_{q1}^{(m)} = \sqrt{\left(M_m + (-1)^k \sqrt{\Delta_m}\right)/D_m},\quad \Delta_m = M_m^2 - B_m^2 D_m = -4 b_m d_m c_m^2 N_m \quad (3.4)$$

Такие корни $\lambda_k(\theta)$ относятся к второму типу.

3) В случае, когда одна из величин K_m или S_m обращается в ноль, то мы имеем дело с переходным случаем между случаями **1)** и **2)**.

4) Случай $A_1 = 0$ является особым. Здесь $\lambda_k(\theta)$ вещественны в [0; $\theta_{q1}^{(1)}$], причем в двойной точке $\theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)}$ этого отрезка $\lambda_1(\theta)$ обращается в ноль; а $\lambda_2(\theta)$ нигде не обращается в ноль. Это случай конической рефракции. Здесь в направлении магнитного поля $\overline{H}_0$ скорости волн совпадают и имеется одна волна с любыми смещениями вида (2.1) [2].

Далее в силу симметрии рассматриваются случаи $m = 1$ и $m = 3$.

Теперь рассмотрим поведение функций $\alpha_k(\theta)$ и $V_k(\theta)$. Найдем производные этих функций в интервалах вещественности корней $\lambda_k(\theta)$.

Согласно $(3.2)_6$, $(3.2)_7$ и (2.3) будем иметь:

$$(\mathrm{tg}\alpha_k)' = \frac{\varphi_k(\theta)}{2b_m d_m \lambda_k^3(\theta)},\quad V_k' = -\frac{\theta V_k^3(\theta)}{2b_m d_m}\Psi_k(\theta)$$

$$\varphi_k = b_m + d_m + (-1)^k \frac{B_m^2 - M_m\theta^2}{\sqrt{q_m(\theta)}}$$

$$\varphi_k' = -(-1)^k 8 b_m d_m c_m^2 \theta^3 N_m / \sqrt{q_m(\theta)} \quad (3.5)$$

$$\Psi_k = 2b_m d_m - l_m + (-1)^k (D_m\theta^2 - M_m)/\sqrt{q_m(\theta)}$$

$$\Psi_k' = (-1)^k 8 b_m d_m c_m^2 \theta N_m / \sqrt{q_m^3(\theta)}$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Пусть $K_m > 0$. Тогда, $A_m > 0, S_m > 0$, а N_m может принимать значение любого знака. Согласно [3, табл.2], функции $\lambda_1(\theta)$ и $\lambda_2(\theta)$ вещественны соответственно в следующих интервалах и обращаются в ноль на концах этих отрезков:

$$0 \le \theta \le \theta_{r1}^{(m)},\ 0 \le \theta \le \theta_{r2}^{(m)} \quad (\theta_{r1}^{(m)} < \theta_{r2}^{(m)}) \tag{3.6}$$

Пусть $N_m > 0$. Из $(3.5)_4$ следует, что $\varphi_1' > 0$, $\varphi_2' < 0$, т.е. функция φ_1 возрастает, а φ_2 убывает. Далее, согласно (2.8) и (1.2) имеем:

$$B_1 = B_0 + \chi > 0,\ B_3 = B_0 + \chi > 0 \tag{3.7}$$

Учитывая $A_m > 0,\ S_m > 0$ и (3.7), из $(3.5)_3$ получаем:

$$\varphi_1(0) = 2d_m > 0,\ \varphi_2(\theta_{r2}^{(m)}) = 2b_m d_m A_m K_m^{-1} > 0$$

Отсюда следует, что в (3.6) правые части (3.5) принимают положительные значения и поэтому $\operatorname{tg}\alpha_k(\theta)$ возрастает от нуля до бесконечности. Поэтому углы $\alpha_k(\theta)$ в (3.6) возрастают от 0 до $\pi/2$:

$$0 \le \alpha_1 \le \pi/2,\ 0 \le \alpha_2 \le \pi/2 \tag{3.8}$$

Пусть $N_m = 0$. Согласно $(3.5)_1$, $(3.5)_3$ и $(3.5)_4$ имеем $\varphi_k'(\theta) = 0$, $\varphi_k(\theta) = b_m + d_m = \text{const} > 0$, $(\operatorname{tg}\alpha_k)_\theta' > 0$. Поэтому в отрезках (3.6) углы $\alpha_k(\theta)$, монотонно возрастая, пробегают отрезки (3.8).

Пусть выполняется условие $N_m < 0$. Согласно $(3.5)_3$ и $(3.5)_4$, φ_2 возрастает, а φ_1 убывает. Кроме того, в силу $A_m > 0,\ S_m > 0$ и (3.6) имеем: $\varphi_1(\theta_{r1}^{(m)}) = 2b_m d_m A_m S_m^{-1} > 0, \varphi_2(0) = 2b_m > 0$. Отсюда и из $(3.5)_1$ следует, что углы $\alpha_k(\theta)$ в соответствующих отрезках (3.6) возрастают от 0 до $\pi/2$.

Таким образом, при условии $K_m > 0$ значениям θ из промежутков (3.6) соответствуют волны (2.10) с направлениями распространения (3.8).

Из (3.2), (2.3) следует соотношение между фазовыми скоростями

$$V_1(\alpha) > V_2(\alpha), \alpha \in [0; \pi/2] \tag{3.9}$$

Итак, в случае $K_m < 0$ волны (2.10) при $k = 1$ являются быстрыми, а при $k = 2$ – медленными, причем:

$$V_f = V_1(\theta), \theta \in [0; \theta_{r1}^{(m)}]; V_s = V_2(\theta), \theta \in [0; \theta_{r2}^{(m)}] \tag{3.10}$$

Случай 2. Пусть $K_m < 0$. Пусть при этом выполняется также условие $A_m > 0$. Тогда и $S_m > 0$. При этих условиях, т.е. при

$$A_m > 0, S_m > 0,\ K_m < 0 \tag{3.11}$$

как следует из [3, табл.2], корни $\lambda_k(\theta)$ принадлежат второму типу, причем $\lambda_1(\theta)$ принимает вещественные значения в двух отрезках:

$$0 \le \theta \le \theta_{r1}^{(m)},\ \theta_{r2}^{(m)} \le \theta \le \theta_{q1}^{(m)} (\theta_{r1}^{(m)} < \theta_{r2}^{(m)}) \tag{3.12}$$

обращаясь в ноль в конце первого и вначале второго отрезков; функция же $\lambda_2(\theta)$ вещественна только в $0 \le \theta \le \theta_{q1}^{(m)}$, где она не равна нулю. Кроме того, т.к. $q_m(\theta_{q1}^{(m)}) = 0$, то верно условие $\lambda_1(\theta_{q1}^{(m)}) = \lambda_2(\theta_{q1}^{(m)})$. Представляя N_m из (2.8) в виде $N_m = K_m - d_m A_m$, замечаем, что при (3.11) выполняется условие $N_m < 0$. Так как имеют место условия $A_m > 0, S_m > 0, N_m < 0$, то на основании результатов случая 1, заключаем, что когда θ изменяется в первом отрезке (3.12), то угол $\alpha_1(\theta)$ возрастает от 0 до $\pi/2$, а когда θ пробегает интервал $0 \le \theta \le \theta_{q1}^{(m)}$, то угол $\alpha_2(\theta)$, возрастая, меняется от 0 до значения $\alpha_2(\theta_{q1}^{(m)}) < \pi/2$. При $N_m < 0$ функция $\varphi_1(\theta)$ убывает, и т.к. при $K_m < 0$ выполняется условие $\varphi_1(\theta_{r2}^{(m)}) = -2b_m d_m |K_m|^{-1} < 0$, то правая часть (3.9) при $k = 1$ отрицательна во втором отрезке (3.12) и поэтому угол $\alpha_1(\theta)$ в этом интервале убывает от $\pi/2$ до значения $\alpha_1(\theta_{q1}^{(m)}) \equiv \alpha_2(\theta_{q1}^{(m)})$.

Итак, при $A_m > 0, K_m < 0$, значению θ из промежутка $0 \le \theta \le \theta_{r1}^{(m)}$ соответствуют волны, распространяемые по направлениям $0 \le \alpha_1(\theta) \le \pi/2$. Значениям θ из промежутка $0 \le \theta \le \theta_{q1}^{(m)}$ соответствуют волны, распространяемые по направлениям $0 \le \alpha_2(\theta) \le \alpha_2(\theta_{q1}^{(m)}) \equiv \alpha_1(\theta_{q1}^{(m)})$. Наконец, значениям θ из промежутка $\theta_{r2}^{(m)} \le \theta \le \theta_{q1}^{(m)}$ соответствуют волны, распространяемые по направлениям $\pi/2 \ge \alpha_1(\theta) \ge \alpha_1(\theta_{q1}^{(m)}) \equiv \alpha_2(\theta_{q1}^{(m)})$. Теперь можно проверить, что

$$V_f(\alpha) > V_s(\alpha), \alpha \in [0; \pi/2] \tag{3.13}$$

$$V_f(\alpha) = V_1(\alpha_1(\theta)), \theta \in [0; \theta_{r1}^{(m)}], V_s(\alpha) = \begin{cases} V_2(\alpha_2(\theta)), \theta \in [0; \theta_{q1}^{(m)}] \\ V_1(\alpha_1(\theta)), \theta \in [\theta_{r2}^{(m)}; \theta_{r1}^{(m)}] \end{cases} \tag{3.14}$$

Следовательно, в случае $A_m > 0, K_m < 0$, волны (2.10) при $k = 1$ в $0 \le \theta \le \theta_{r1}^{(m)}$ являются быстрыми, а при $k = 2$ в $0 \le \theta \le \theta_{q1}^{(m)}$ и при $k = 1$ в $\theta_{r2}^{(m)} \le \theta \le \theta_{q1}^{(m)}$ являются медленными. Скорости быстрых и медленных волн определяются по (3.2) и (3.14), а их направления – по (3.2), причем:

$$\alpha = \alpha_1(\theta), \theta \in [0; \theta_{r1}^{(m)}] \text{ (для быстрых волн)}, \tag{3.15}$$

$$\alpha = \alpha_2(\theta), \theta \in [0; \theta_{q1}^{(m)}]; \alpha = \alpha_1(\theta), \theta \in [\theta_{r2}^{(m)}; \theta_{q1}^{(m)}] \text{ (для медленных волн)}. \tag{3.16}$$

Пусть теперь, при $K_m < 0$ выполняется условие $A_m = 0$, что возможно только при m=1. Согласно [3,табл.2], функции λ_k в этом случае вещественны в отрезке $0 \le \theta \le \theta_{q1}^{(1)}$, причем функция $\lambda_1(\theta)$ обращается в ноль в двойной точке $\theta = \theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)} = 1/\sqrt{a_0}$, а функция $\lambda_2(\theta)$ нигде не обращается в ноль. Это — случай конической рефракции [3]. Разделение волн на быстрые и медленные осуществляется так, как в случае (3.11). Но, в отличие от указанного случая, здесь $\theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)}$, вследствие чего по направлению магнитного поля $\overrightarrow{H}_0$, магнитоупругие волны распространяются с одной и той же фазовой скоростью:

$$V_f(\pi/2) = V_s(\pi/2) = \sqrt{a_1} = \sqrt{a_0}.$$

Наконец рассмотрим случай $K_1 < 0$, $A_1 < 0$. Предположим сначала, что выполняется также условие $S_1 > 0$. Тогда, согласно [3, табл.2], функция $\lambda_2(\theta)$ вещественна в отрезке $0 \le \theta \le \theta_{q1}^{(m)}$, а функция $\lambda_1(\theta)$ — в отрезках $0 \le \theta \le \theta_{r2}^{(1)}$ и $\theta_{r1}^{(1)} \le \theta \le \theta_{q1}^{(1)}$, где $\lambda_1(\theta_{rk}^{(1)}) = 0$, $\lambda_1(\theta_{q1}^{(1)}) = \lambda_2(\theta_{q1}^{(1)}) > 0$.

Отсюда следует, что этот случай аналогичен случаю $K_1 < 0$, $A_1 < 0$. Аналогию следует понимать в том смысле, что разделение волн на быстрые и медленные происходит одинаковым образом. Соответствующие результаты можно получить из (3.13)-(3.16) при помощи взаимозамены $\theta_{r1}^{(1)}$ и $\theta_{r2}^{(1)}$.

Далее, на основании [3, табл.2] легко заметить, что случай $K_1 < 0, A_1 < 0, S_1 < 0$ аналогичен случаю $K_1 > 0, A_1 > 0, S_1 > 0$. Только следует в (3.9) и (3.0) произвести вышеуказанную замену.

$K_m = 0$ или $S_m = 0$ являются переходными между вышеприведенными случаями.

Таким образом, разделение магнитоупругих волн (2.10) на быстрые и медленные зависит от типа корней $\lambda_k(\theta)$, причем, когда корни $\lambda_k(\theta)$ относятся к первому типу, то разделение волн совершается формулами (3.9) и (3.10), если же корни $\lambda_k(\theta)$ второго типа, то разделение волн совершается формулами (3.13) и (3.14).

Отметим следствие, связанное с изменением знака величины A_1 в зависимости от величины магнитного поля $\vec{H}_0$. При $0 < \chi < \chi_A^{(1)} (A_1 \ge 0)$ в направлении оси Ox (параллельно $\vec{H}_0$) медленные волны распространяются со скоростью $V_s = \sqrt{e_1(\chi)}$. В дальнейшем, с возрастанием напряженности магнитного поля $\chi \ge \chi_A^{(1)} (A_1 \le 0)$ медленные волны распространяются с постоянной скоростью $V_s(\chi) = \sqrt{a_0} = \text{const}$. Для быстрых волн картина их распространения противоположна: при $\chi \le \chi_A^{(1)}$ быстрые волны распространяются с постоянной скоростью $V_f(\chi) = \sqrt{a_0} = \text{const}$, а при $\chi \ge \chi_A^{(1)}$ — со скоростью $V_f(\chi) = \sqrt{e_1} \ge \sqrt{a_0}$, которая возрастает от значения $\sqrt{a_0}$ до $+\infty$. Отсюда следует, что быстрые волны при $\chi < \chi_A^{(1)}$ представляют собой продольные волны, а медленные — поперечные. Если же $\chi > \chi_A^{(1)}$, то имеем обратную картину. Отсюда следует также, что при $\chi < \chi_A^{(1)}$ продольные волны распространяются быстрее, чем поперечные. В случае же $\chi > \chi_A^{(1)}$ поперечные волны распространяются быстрее продольных, что обычно невозможно при распространении чисто упругих волн. В случае $\chi = \chi_A^{(1)}$ продольные и поперечные волны распространяются с одинаковой скоростью, причем это разделение здесь формально — имеется одна волна, в которой вектор перемещения $\vec{u}$ может иметь любое направление относительно $\vec{H}_0$ и любую величину (случай конической рефракции).

Перейдем к исследованию на экстремумы фазовых скоростей внутри отрезков вещественности корней $\lambda_k(\theta)$.

Критические точки по экстремуму скоростей $V_k(\theta)$, согласно (3.10), определяются из уравнения:

$$v_m(\theta) \equiv N_0 D_m \theta^4 - 2N_0 M_m \theta^2 + N_0 B_m^2 - N_m c_m^2 = 0 \qquad (3.17)$$

Выясним, при каких условиях решения уравнения (3.17) будут экстремальными точками для функций $\lambda_k(\theta)$.

Сначала рассмотрим случай продольного магнитного поля ($m = 1$). Согласно $(3.5)_5$ и работе [2, (3.9), (3.12), (3.22)] имеем:

$$\Psi_1(0) = 2d_0 B_1^{-1}(B_0 B_1 - c_1^2), \Psi_2(0) = -2b_1 B_1^{-1}(A_0 B_1 - c_1^2)$$

$$\Psi_1(\theta_{r1}^{(1)}) = -2b_1 d_1 S_1^{-1}(A_0 A_1 - c_1^2) \text{ при } A_1 > 0$$

$$\Psi_2(\theta_{r2}^{(1)}) = 2b_1 d_1 K_1^{-1}(B_0 A_1 - c_1^2) \text{ при } K_1 > 0$$

$$\Psi_1(\theta_{r2}^{(1)}) = -2b_1 d_1 |K_1|^{-1}(B_0 A_1 - c_1^2) \text{ при } K_1 < 0, A_1 > 0 \qquad (3.18)$$

$$\Psi_1(\theta_{q1}^{(1)}) = +\infty, \Psi_2(\theta_{q1}{}^{(1)}) = -\infty \text{ при } K_1 < 0$$

$$\Psi_1(\theta_{r1}^{(1)}) = 2b_1 d_1 c_1^4 > 0 \text{ при } A_1 = 0 (\theta_{r1}{}^{(1)} = \theta_{r2}{}^{(1)})$$

$$\Psi_1(\theta_{r2}^{(1)}) = 2b_1 d_1 |K_1|^{-1}(B_0 |A_1| + c_1^2) > 0 \text{ при } A_1 < 0$$

$$\Psi_1(\theta_{r1}^{(1)}) = 2b_1 d_1 S_1^{-1}(A_0 |A_1| + c_1^2) > 0 \text{ при } A_1 < 0, S_1 > 0$$

$$\Psi_2(\theta_{r1}^{(1)}) = -2b_1 d_1 |S_1|^{-1}(A_0 |A_1| + c_1^2) < 0 \text{ при } S_1 < 0$$

Пользуясь обычными методами математического анализа, на основании формул (3.2), $(3.5)_1$-$(3.5)_5$ исследуем скорости $V_k(\theta)$ на максимум и минимум. Здесь приведем только окончательные результаты:

1) а) Если $N_1 > 0$, $A_0 A_1 - c_1^2 \le 0$, или б) $N_1 > 0$, $B_0 B_1 - c_1^2 \le 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ в случае а) убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, а в случае б) возрастает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$.

2) Если $N_1 > 0$ и $B_0 A_1 - c_1^2 \le 0$, то в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ скорость $V_2(\theta)$ возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$; если же выполняется

условие $N_1 > 0$, $B_0A_1 - c_1^2 > 0$, то в указанном интервале $V_2(\theta)$ имеет максимум, причем точка максимума является нулем уравнения (3.17).

3) Если $N_1 = 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ монотонно возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$.

4) Если $N_1 = 0$ и а) $b_1 - a_1 > 0$, или б) $b_1 - a_1 < 0$, то в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ скорость $V_1(\theta)$ меняется монотонно, причем в случае а) убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, а в случае б) возрастает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$; если же $b_1 - a_1 = 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в рассматриваемом интервале сохраняет постоянное значение, равное $V_1(\theta) = \sqrt{a_0}$.

5) Если $N_1 < 0$, $K_1 \geq 0$ и а) $A_0A_1 - c_1^2 \geq 0$, или б) $B_0B_1 - c_1^2 \geq 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ в случае б) убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, а в случае а) возрастает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$.

6) Если $N_1 < 0$, $K_1 \geq 0$ и $A_0A_1 - c_1^2 < 0, B_0B_1 - c_1^2 < 0$ то в $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ скорость $V_1(\theta)$ имеет точку максимума, в которой $v_1(\theta) = 0$.

7) Если $N_1 < 0$, $K_1 \geq 0$ и а) $A_0B_1 - c_1^2 \geq 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в интервале $0 \leq \theta \leq \theta_{r2}^{(1)}$ монотонно возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$; если же б) $A_0B_1 - c_1^2 < 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в указанном интервале имеет точку минимума, в которой $v_1(\theta) = 0$.

8) Если $K_1 < 0$, $A_1 \geq 0$ (тогда и $N_1 < 0$), то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ ведет себя как в случае $N_1 < 0$, $K_1 > 0$, а в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ убывает, причем $V_1(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$,

$$V_1(\theta_{q1}^{(1)}) = \sqrt{(2b_1d_1)^{-1}[b_1 + d_1 + \theta_{q1}^{(1)^2}(2b_1d_1 - l_1)]}.$$

9) Если $K_1 < 0$, $A_1 \geq 0$ и а) $A_0B_1 - c_1^2 \geq 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{q1}^{(1)})$ возрастает от $V_2(0) = \sqrt{d_0}$ до $V_2(\theta_{q1}^{(1)}) = V_1(\theta_{q1}^{(1)})$; если же б) $A_0B_1 - c_1^2 < 0$, то скорость $V_2(\theta)$ в этом интервале имеет точку минимума, которая является решением уравнения (3.17).

10) Если $K_1 < 0$, $A_1 < 0$, $S_1 > 0$ а) $B_0B_1 - c_1^2 \geq 0$, то в $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ скорость $V_1(\theta)$ убывает от $V_1(0) = \sqrt{b_1}$ до $V_1(\theta_{r2}^{(1)}) = \sqrt{e_1}$; если же б) $B_0B_1 - c_1^2 < 0$, то она в этом интервале имеет максимум, причем точка максимума определяется из уравнения (3.29).

11)Если $K_1 < 0$, $A_1 < 0$, $S_1 > 0$, то скорость $V_1(\theta)$ в $(\theta_{r1}^{(1)}, \theta_{q1}^{(1)})$ убывает, причем $V_1(\theta_{r1}^{(1)}) = \sqrt{a_0}$, $V_1(\theta_{q1}^{(1)}) = \sqrt{(2b_1 d_1)^{-1}[b_1 + d_1 + \theta_{q1}^{(1)^2}(2b_1 d_1 - l_1)]}$; а скорость $V_2(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{q1}^{(1)})$ меняется, как в случае $K_1 < 0$, $A_1 > 0$.

12) Если $S_1 < 0$ (тогда и $N_1 < 0$, $A_1 < 0$, $K_1 < 0$), то скорость $V_1(\theta)$ в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ меняется, как в случае 10), а скорость $V_2(\theta)$ меняется в интервале $(0, \theta_{r1}^{(1)})$ так же, как в интервале $(0, \theta_{r2}^{(1)})$ случая $K_1 > 0$, $N_1 < 0$.

Перейдем к рассмотрению случая поперечного магнитного поля ($m = 3$). В этом случае критические точки определяются выражениями $\theta_1^{(3)} = \sqrt{(B_3 - c_3)/[a_3 b_3 - (c_3 + d_3)^2]}$, $\theta_2^{(3)} = \sqrt{(B_3 + c_3)/[a_3 b_3 - (c_3 - d_3)^2]}$ причем точка $\theta_1^{(3)}$ является критической для функции $V_1(\theta)$, а точка $\theta_2^{(3)}$ – для функции $V_2(\theta)$, а вместо формулы (3.30) имеем следующие формулы:

$$\Psi_1(0) = 2d_3 B_3^{-1}(B_3 + c_3)(B_0 - c_0), \Psi_2(0) = -2b_3 B_3^{-1} N_3$$

$$\Psi_1(\theta_{r2}^{(3)}) = -2b_3 d_3 |K_3|^{-1} N_3 \text{ при } K_3 < 0,\ \ \Psi_1(\theta_{q1}^{(3)}) = +\infty, \Psi_2(\theta_{q1}^{(3)}) = -\infty \qquad (3.19)$$

$$\Psi_1(\theta_{r1}^{(3)}) = -2b_3 d_3 S_3^{-1}(A_3 + c_3)(A_0 - c_0),\ \ \Psi_2(\theta_{r2}^{(3)}) = 2b_3 d_3 K_3^{-1} N_3 \text{ при } K_3 > 0$$

Согласно (3.2$_{6,7}$), (3.5) и (3.19) приходим к заключению:

1) Если $N_3 > 0$ и а) $A_0 - c_0 \le 0$ или б) $B_0 - c_0 \le 0$, то $V_1(\theta)$ в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$ при а) убывает от $\sqrt{b_3}$ до $\sqrt{a_3}$, а при б) возрастает от $\sqrt{b_3}$ до $\sqrt{a_3}$; а если $A_0 - c_0 > 0$, $B_0 - c_0 > 0$, то $V_1(\theta)$ в точке $\theta_1^{(3)} \in (0, \theta_{r1}^{(3)})$ имеет минимум:

$$V_1(\theta_1^{(3)}) = \sqrt{\frac{a_3 b_3 - (c_3 + d_3)^2}{A_0 + B_0 - 2c_0}}, \alpha_1(\theta_1^{(3)}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{B_0 - c_0}{A_0 - c_0}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.20)$$

2) Если $N_3 > 0$, то в точке $\theta_2^{(3)} \in (0, \theta_{r2}^{(3)})$ $V_2(\theta)$ имеет максимум:

$$V_2(\theta_2^{(3)}) = \sqrt{\frac{a_3 b_3 - (c_3 - d_3)^2}{A_0 + B_0 - 2c_0}}, \alpha_2(\theta_2^{(3)}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{B_3 + c_3}{A_3 + c_3}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.21)$$

3) Если $N_3 = 0$ и а) $b_0 < a_0$ или б) $b_0 > a_0$, то в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$, $V_1(\theta)$ в случае а) убывает, а в случае б) возрастает, причем $V_1(0) = \sqrt{b_3}$, $V_1(\theta_{r1}^{(3)}) = \sqrt{a_3}$; если же $b_0 = a_0$, то $V_1(\theta)$ не меняется и равна $V_1(\theta) \equiv \sqrt{a_3}$.

4) Если $N_3 = 0$, то $V_2(\theta)$ в $(0, \theta_{r2}^{(3)})$ постоянна и равна $\sqrt{d_0}$.

5) Если $N_3 < 0$, $K_1 \ge 0$ и а) $B_0 - c_0 \ge 0$ или б) $A_0 - c_0 \ge 0$, то в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$, $V_1(\theta)$ при а) убывает от $\sqrt{b_3}$ до $\sqrt{a_3}$, а при б) возрастает от $\sqrt{b_3}$ до

$\sqrt{a_3}$; а если $A_0 - c_0 < 0$, $B_0 - c_0 < 0$, то в точке $\theta_1^{(3)} \in 0 \le \theta \le \theta_{r1}^{(3)}$, $V_1(\theta)$ имеет максимум, причем $V_1(\theta_1^{(3)})$, $\alpha_1(\theta_1^{(3)})$ определяются формулами (3.20).

6) Если $N_3 < 0$, $K_3 \ge 0$, то $V_2(\theta)$ в точке $\theta_2^{(3)} \in 0 \le \theta \le \theta_{r2}^{(3)}$ всегда имеет минимум, причем имеют место формулы (3.21).

7) Если $K_3 < 0$, (тогда и $N_3 < 0$), то функции $V_1(\theta)$ в $(0, \theta_{r1}^{(3)})$ описывается как при $N_3 < 0$, $K_3 > 0$, а в $(\theta_{r2}^{(3)}, \theta_{q1}^{(3)})$ она убывает от $\sqrt{d_0}$ до $V_1(\theta_1^{(3)})$, а $V_2(\theta)$ в точке $\theta_2^{(3)} \in 0 \le \theta \le \theta_{q1}^{(3)}$ имеем минимум, причем $V_2(0) = \sqrt{d_0}$, $V_2(\theta_{q1}^{(1)}) = V_1(\theta_{q1}^{(1)})$.

Отсюда можно получить результаты для изотропной среды [2].

ЛИТЕРАТУРА.

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Уравнения движения в перемещениях идеально-проводящих упругих анизотропных сред при наличии магнитного поля.// Механика, межвуз. сб. науч. трудов, вып.3, Ереван, 1984, С. 32-42.
2. Даноян З.Н. К плоской задаче распространения магнитоупругих волн в идеально-проводящих изотропных средах.// Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1974. Т. 27. №5. С. 37-46.
3. Даноян З.Н. К методу функционально-инвариантных решений для задачи магнитоупругости идеально-проводящих анизотропных сред.// Механика, уч. записки ЕГУ. 1984. №1. С. 52-61.
4. Осипов И.О. К методу функционально-инвариантных решений для задач динамической теории упругости анизотропных сред.// Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. №3. С. 391-396.
5. Осипов И.О. К методу комплексных решений динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред.// Изв. РАН. МТТ. 1999. №4. С.102-112.
6. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела.// ПММ. 1961. Т.25. Вып. 5. С.885-896.
7. Соболев С.Л. Некоторые вопросы распространения колебаний.— В кн. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.— М.-Л.: ОНТИ. 1937. С. 468-617.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.06.2003