

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ ПРИ УЧЕТЕ
ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА И ОБЖАТИЯ

Киракосян Р.М., Саркисян М.С.

Ռ.Մ. Կիրակոսյան, Մ. Ս. Սարգսյան
Օրթոտրոպ սալ-գոտու լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը ընդլայնական
սահիի և սեղմման հաշվառմամբ

[11] տեսության շրջանակներում տրվում է եզրերում հողակապրեն հենված հաստատուն հաստության սալ-գոտու խնդրի ճշգրիտ լուծումը մակերևութային հավասարաչափ բաշխված նորմալ բեռի դեպքում: Կատարվում է ստացված անալիտիկ փակ լուծումների բազմակողմանի վերլուծություն և արվում հաշվային մեծությունների վրա ընդլայնական սահիի և սեղմման ազդեցությունների վերաբերյալ որակական և քանակական երակացություններ: Քննարկվում են հարթ խնդրի հետ ծոման խնդրի կապի, ինչպես նաև սալ-գոտու հենման գծերի ազդեցության հարցերը: Կատարվում է [2,3] և [11] տեսություններով միջին հարթության համար ստացվող մաքսիմում ճկվածքների համեմատություն:

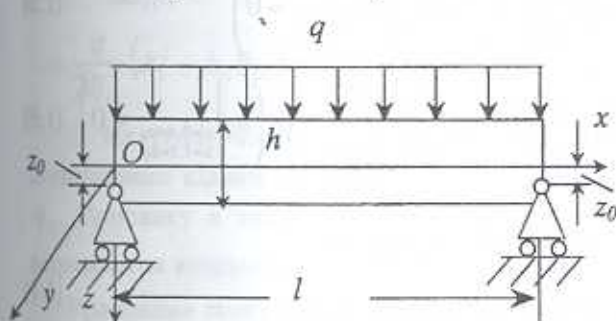
R.M. Kirakosyan, M.S. Sarkisyan

The Stress-Strane State of Orthotropic Strips Taking into Account the
Transverse Shears and Normal Compression

В работе [11] предложен один вариант основных уравнений и соотношений ортотропных пластин переменной толщины, учитывающих влияние как поперечных сдвигов, так и обжатия. В качестве приложения там же дано решение задачи изгиба ортотропной пластинки-полосы линейно-переменной толщины. Из-за сложности полученных аналитических выражений заключения в этой работе сделаны только на основе анализа безразмерных численных результатов. Аналогичные заключения, непосредственно из аналитически замкнутых решений, можно сделать для простейшего случая – случая пластинки-полосы постоянной толщины. Во избежание раскрытия ряда неопределенностей, целесообразно эти решения получить не как частный случай решений задачи пластинки-полосы линейно-переменной толщины, а путем отдельного рассмотрения случая пластинки-полосы постоянной толщины, что и делается в настоящей работе. Помимо задачи изгиба решается также плоская задача. Обсуждается вопрос связи задачи изгиба с плоской задачей, а также вопрос влияния места расположения опорных линий полосы. Сравниваются значения максимальных прогибов срединной плоскости пластины, вычисленные по теориям [2, 3] и [11].

1. Рассмотрим ортотропную пластинку-полосу постоянной толщины h и ширины l . Координатную плоскость xu совместим со срединной плоскостью, выбрав начало на левом краю пластинки-полосы. Ось x направим перпендикулярно краям, ось z – вертикально вниз, а ось y так, чтобы образовалась правая система координат (фиг. 1). Пусть пластинка-

полоса находится под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки интенсивности q , приложенной на поверхности $z = -h/2$.
 Пластика-полоса шарнирно опёрта вдоль линий $x = 0, z = z_0$ и $x = l, z = z_0$, где $-h/2 \leq z_0 \leq h/2$.



Фиг.1

Задачу определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемой пластики-полосы с одновременным учетом влияния поперечного сдвига и обжатия будем решать на основе уравнений, предложенных в работе [11].

Поскольку в данном случае перемещение вдоль оси y равно нулю, а перемещение вдоль оси x не зависит от y , то второе уравнение плоской задачи удовлетворяется автоматически, а первое уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (1.1)$$

Аналогично третье уравнение задачи изгиба удовлетворяется автоматически, а первые два принимают вид:

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = -\frac{3q}{2h} \quad (1.2)$$

$$B_{11} h^2 \frac{d^3 w}{dx^3} + 8\varphi_1 = 0$$

Здесь u — перемещение по оси x , w — прогиб срединной плоскости, φ_1 — функция, характеризующая распределение касательного напряжения τ_{xz} , B_{11} — параметр, который выражается через упругие постоянные материала по известным формулам [3].

Граничные условия плоской задачи имеют вид:

$$\left(B_{11} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} A_1 q \right)_{x=0} = 0, \quad (T_x |_{x=0} = 0) \quad (1.3)$$

$$u |_{x=l/2} = 0$$

Параметры, с помощью которых учитывается влияние нормального напряжения σ_z , в общеизвестных обозначениях определяются формулами [3]

$$A_1 = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12}, \quad A_2 = a_{23}B_{22} + a_{13}B_{12} \quad (1.4)$$

Граничные условия задачи изгиба при полном выражении нормального перемещения u_z [11] формулируются следующим образом:

$$\left[B_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} - (\chi + A_1) \frac{d\varphi_1}{dx} \right]_{x=0}^{x=l} = 0, \quad \left(M_x \Big|_{x=0}^{x=l} = 0 \right) \quad (1.5)$$

$$\left[w + z_0 \left(A_1 \frac{du}{dx} + \Delta_1 \frac{q}{2} \right) - \frac{z_0^2}{2} \left(A_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - \Delta_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \right]_{x=0}^{x=l} = 0, \quad \left(u_z \Big|_{x=0, z=z_0}^{x=l, z=z_0} = 0 \right) \quad (1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi &= a_{55}B_{11}, \quad \Delta_1 = a_{13}A_1 + a_{23}A_2 - a_{33} \\ \Delta_2 &= a_{13}(\chi + A_1) + a_{23} \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \chi + A_2 \right) - a_{33} \end{aligned} \quad (1.7)$$

a_{ij} — упругие постоянные материала, χ учитывает влияние поперечного сдвига. В выражении (1.6) член с множителем z_0 относится к плоской задаче, а член с множителем z_0^2 — к задаче изгиба.

Нетрудно заметить, что как разрешающее уравнение (1.1), так и граничные условия плоской задачи (1.3) не содержат величин изгибного характера, в силу чего эту задачу всегда можно решать отдельно, независимо от задачи изгиба. Аналогичное утверждение относительно задачи изгиба неверно. Это понятно, поскольку при $z_0 \neq 0$, т.е. когда линия опирания не находится на срединной плоскости, в граничных условиях (1.5) фигурирует член du/dx , в силу чего задача изгиба становится связанной с плоской задачей.

Решения уравнений (1.1) и (1.2) при граничных условиях (1.3) и (1.5), (1.6) имеют вид

$$u = \frac{A_1 q}{4B_{11}} (l - 2x) \quad (1.8)$$

$$\varphi_1 = \frac{3q}{4h} (l - 2x) \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{qx}{2B_{11}h^3} (l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{3q}{4B_{11}h} (\chi + A_1)x(l - x) + \\ &+ \frac{qz_0}{2B_{11}} (A_1^2 - \Delta_1 B_{11}) - \frac{3qz_0^2}{4B_{11}h} (A_1^2 - \Delta_1 B_{11}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для перемещений произвольной точки пластинки-полосы с учетом (1.8)-(1.10) получим формулы

$$u_x = -\frac{qz}{2B_{11}h^3}(l^3 - 6lx^2 + 4x^3) + \frac{A_1q}{4B_{11}h}(h - 3z)(l - 2x) \quad (1.11)$$

$$u_z = \frac{qx}{2B_{11}h^3}(l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{3q}{4B_{11}h^3}[(\chi + A_1)h^2 + 4A_1z^2]x(l - x) - \frac{q}{2B_{11}}(A_1^2 - \Delta_1 B_{11})(z - z_0) + \frac{3q}{4B_{11}h}(A_1^2 - \Delta_1 B_{11})(z^2 - z_0^2) \quad (1.12)$$

2. Из (1.11) видно, что u_x не содержит параметра χ , т.е. учет поперечного сдвига не влияет на значение тангенциального перемещения u_x . Поправку в значение этого перемещения вносит учет обжатия, что выражается вторым слагаемым (1.11), содержащим параметр A_1 .

Уравнение поверхности, на которой u_x равно нулю, имеет вид

$$z_H = \frac{A_1 h^3 (l - 2x)}{2(l^3 - 6lx^2 + 4x^3) + 3A_1 h^2 (l - 2x)} \quad (2.1)$$

При пренебрежении обжатием ($A_1 = 0$) эта поверхность совпадает со срединной плоскостью $z = 0$.

Поверхность (2.1), которую условно можно назвать нейтральной, пластинку-полосу делит на две части. Выше этой поверхности, т.е. при $-h/2 \leq z < z_H$ происходит укорачивание, а ниже нее, т.е. при $z_H < z \leq h/2$ — удлинение горизонтальных волокон.

Раскрывая неопределенность (2.1) при $x = l/2$, находим

$$z_H \Big|_{x=l/2} = \frac{A_1 h^3}{3(l^2 + A_1 h^2)} \quad (2.2)$$

Пользуясь тем, что $A_1 < 0$, $|A_1| h^2 \ll l^2$, можно показать

$$\frac{dz_H}{dx} > 0 \text{ при } 0 \leq x < l/2, \quad \frac{dz_H}{dx} \Big|_{x=l/2} = 0, \quad \frac{dz_H}{dx} < 0 \text{ при } l/2 < x \leq l$$

$$\frac{d^2 z_H}{dx^2} < 0 \text{ при } 0 \leq x \leq l \quad (2.3)$$

На фиг. 2 представлен примерный вид нейтральной поверхности.

Таким образом, независимо от значения z_0 , т.е. от места расположения линии опирания, нейтральная поверхность целиком расположена выше срединной плоскости.

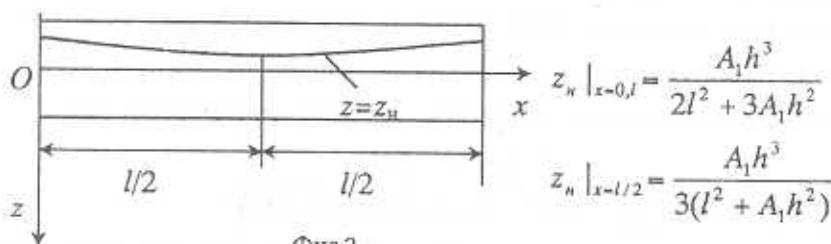
Тангенс угла α , на который поворачиваются поперечные сечения пластинки-полосы вследствие изгиба, определяется формулой [11]

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{dw}{dx} + a_{ss} \varphi_1 \quad (2.4)$$

С учетом (1.9) и (1.10) из (2.4) получим

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{q}{2B_{11}h^3}(l^3 - 6lx^2 + 4x^3) - \frac{3A_1q}{4B_{11}h}(l - 2x) \quad (2.5)$$

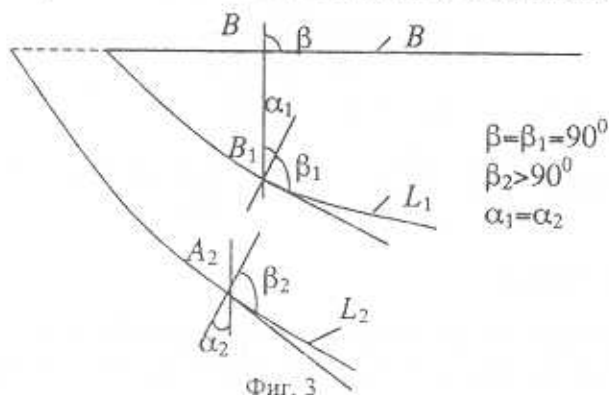
Из этой формулы видно, что угол поворота α не зависит от параметра χ , т.е. учет поперечного сдвига не влияет на значения этого угла. С другой стороны известно, что учет поперечных сдвигов приводит к увеличению прогибов срединной плоскости пластинок. Нетрудно убедиться в том, что здесь нет противоречия. Дело в том, что при учете поперечных сдвигов прямые элементы, перпендикулярные к срединной плоскости



Фиг. 2

недеформированной пластинки, после деформации остаются также прямыми, но, в отличие от классической теории, они не перпендикулярны к той поверхности, в которую переходит срединная плоскость вследствие деформации.

На фиг. 3 показаны примерные формы поверхностей L_1 и L_2 , в которые переходит срединная плоскость L после деформации по классической теории пластинок и по теории [11] соответственно.



Фиг. 3

Там же показаны положения произвольной точки B_i срединной плоскости. Углы поворота нормального элемента α_i и углы β_i , образованные этим элементом и срединной поверхностью деформированной пластинки-полосы по обеим теориям, соответствуют случаю неучета обжатия.

Поскольку параметр A_1 фигурирует в (2.5), то учет обжатия влияет на значения угла поворота. Естественно, что в середине пролета $x = l/2$ угол поворота равен нулю. Наибольшую величину угол поворота имеет на опорах —

$$\operatorname{tg} \alpha|_{x=0} = -\operatorname{tg} \alpha|_{x=l} = -\frac{ql^3}{2B_{11}h^3} \left(1 + \frac{3}{2} A_1 \frac{h^2}{l^2} \right) \quad (2.6)$$

В силу того, что $A_1 < 0$, учет обжатия уменьшает абсолютное значение α . Это влияние имеет порядок h^2/l^2 . В случае изотропного материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$, ($A_1 = -1/2$) при $h/l = 1/4$ и $1/5$ поправка наибольшего значения $\operatorname{tg} \alpha$ составляет 4,7% и 3% соответственно. Разумеется, в общем случае анизотропной пластинки переменной толщины эти цифры могут существенно изменяться.

3. Выражение (1.12) содержит как параметр χ , так и параметры A_1, Δ_1 . Это означает, что на значение нормального перемещения u_z влияет учет как поперечного сдвига, так и обжатия. В отличие от тангенциального перемещения u_x нормальное перемещение u_z зависит от z_0 , т.е. от положения линий опирания пластинки-полосы.

Для точек срединного сечения пролета из (1.12) имеем:

$$u_z|_{z=l/2} = \frac{5ql^4}{32B_{11}h^3} \left[1 + \frac{6}{5} \chi \frac{h^2}{l^2} + \frac{6}{5} A_1 (1 + 4\bar{z}^2) \frac{h^2}{l^2} - \frac{16}{5} (A_1^2 - \Delta_1 B_{11}) (\bar{z} - \bar{z}_0) \frac{h^4}{l^4} + \frac{24}{5} (A_1^2 - \Delta_1 B_{11}) (\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2) \frac{h^4}{l^4} \right] \quad (3.1)$$

$$\text{Здесь } \bar{z} = z/h, \quad \bar{z}_0 = z_0/h \quad (3.2)$$

Внутри больших скобок фигурируют пять слагаемых. Первое слагаемое, т.е. "1", представляет классическое значение прогиба срединной плоскости, которое получается без учета как поперечного сдвига, так и обжатия. Второе слагаемое представляет поправку, вносимую в значение максимального прогиба срединной плоскости, только учетом поперечного сдвига. Эта поправка имеет порядок h^2/l^2 . Остальные слагаемые представляют поправки, обусловленные учетом обжатия. Они относятся к точкам как срединной плоскости $z = 0$, так и любой точке $-1/2 \leq \bar{z} \leq 1/2$. Третье слагаемое соответствует задаче изгиба при пренебрежении влиянием места расположения линий опирания. Подобно поправке от поперечного сдвига, эта поправка также имеет порядок h^2/l^2 .

Четвертое и пятое слагаемые соответствуют плоской задаче и задаче изгиба соответственно. Обе эти поправки имеют порядок h^4/l^4 и учитывают влияние обжатия и, связанное с ним, влияние места расположения линий опирания. Очевидно, что при обычных значениях относительной толщины h/l и при обычных ортотропных материалах можно без заметного ущерба точности пренебречь членами порядка h^4/l^4 . Тогда из выражения нормального перемещения u_z [11] можно отбросить слагаемое, соответствующее плоской задаче, что позволит упростить граничное условие (1.6), заменив его следующим условием:

$$\left[w - \frac{z_0^2}{2} \left(A_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - \Delta_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \right]_{x=0}^{x=l} = 0, \quad \left(u_z \Big|_{x=0, z=z_0}^{x=l, z=z_0} = 0 \right) \quad (3.3)$$

Благодаря этому, задача изгиба полностью отделится от плоской задачи и ее также можно решать отдельно.

Для более наглядности рассмотрим случай изотропного материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Пользуясь [3], имеем

$$B_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \chi = \frac{2}{1-\nu}, \quad A_1 = A_2 = -\frac{\nu}{1-\nu}, \quad (3.4)$$

$$B_{12} = \nu B_{11}, \quad A_1^2 - \Delta_1 B_{11} = 1$$

С учетом (3.4) из (3.1) при $\nu = 1/3$ и $h/l = 1/4$ получим

$$u_z \Big|_{x=l/2} = \frac{5}{36} \frac{ql^4}{Eh^3} \left[1 + 0.225 - 0.0375(1 + 4\bar{z}^2) - 0.0125(\bar{z} - \bar{z}_0) + 0.01875(\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2) \right] \quad (3.5)$$

Наибольшие значения поправок, вносимых тремя последними членами, составляют 7.5%, 1.25% и 0.47% соответственно. Следовательно, вклады последних двух слагаемых (3.5), на самом деле, существенно малы по сравнению с вкладами его первых трех слагаемых. Это убедительно подтверждает допустимость пренебрежения членами порядка h^4/l^4 . Кроме полного отделения задачи изгиба от плоской задачи, это приведет еще и к независимости решений от значения z_0 , т.е. от места расположения линий опирания. Хотя приведенный численный пример относится к случаю изотропного материала, сделанное заключение, бесспорно, будет справедливым и для случаев материалов с умеренной ортотропией.

4. В рассмотренной задаче касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} отсутствуют. Относительно напряжений σ_x, σ_z и τ_{xz} задача статически определима, в силу чего учет поперечного сдвига и обжатия не влияет на

их значения. Выражения этих напряжений по [11] совпадают с соответствующими формулами классической теории пластинок —

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{6q}{h^3}xz(l-x), & \sigma_z &= -\frac{q}{2} + \frac{3qz}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \\ \tau_{xz} &= \frac{3q}{4h^3}(l-2x)(h^2 - 4z^2)\end{aligned}\quad (4.1)$$

Определенный интерес представляет напряжение σ_y , которое возникает из-за отсутствия перемещения вдоль оси y .

В рамках теории [11] с учетом (1.9) и (1.10) для этого напряжения имеем:

$$\sigma_y = \frac{6q}{h^3} \frac{B_{12}}{B_{11}} xz(l-x) + \frac{q}{2h} \left(A_2 - A_1 \frac{B_{12}}{B_{11}} \right) (h - 3z) \quad (4.2)$$

Первая часть этого выражения совпадает с соответствующей формулой классической теории пластин. Вторая же часть (4.2) является результатом учета обжатия. Классическая часть зависит от x и z . Поправка же является функцией только от z . Наибольшее по абсолютному значению напряжение σ_y^{\max} возникает в точках $x=l/2$, $z=-h/2$. Для конкретности рассмотрим случай изотропного материала.

С учетом (3.4) из (4.2) находим:

$$\sigma_y^{\max} = \sigma_y \Big|_{x=l/2, z=-h/2} = -\frac{3qvl^2}{4h^2} \left(1 + \frac{5h^2}{3l^2} \right) \quad (4.3)$$

Величина $\frac{5h^2}{3l^2}$ и есть поправка, вносимая учетом обжатия в значение σ_y^{\max} . Она не зависит ни от E , ни от ν . Поправка имеет порядок h^2/l^2 и при $h/l = 1/4$ и $1/5$ составляет 10,4% и 6,7% соответственно.

5. По итерационной теории [2, 3] для нормального перемещения u_z , при опирании пластины вдоль линий $x=0, z=h/2$ и $x=l, z=h/2$, после первого приближения получится формула

$$\begin{aligned}u_z &= \frac{qx}{2B_{11}h^3} (l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{3qa_{33}}{5h} x(l-x) + \frac{9qA_1}{20B_{11}h} x(l-x) + \\ &+ \frac{3qA_1}{B_{11}h^3} z^2 x(l-x) + \frac{qa_{33}}{32} (3h - 16z) + \frac{3qa_{33}}{4h} z^2 - \frac{qa_{33}}{2h^3} z^4\end{aligned}\quad (5.1)$$

Подобно (1.12) здесь также первое слагаемое представляет классическое выражение прогиба срединной плоскости, второе слагаемое — поправку от поперечного сдвига, а остальные слагаемые — поправки, вносимые учетом нормального напряжения σ_z и обжатия.

С целью количественного сравнения вычислим значения u_z в точках срединного сечения изотропной пластины по обеим формулам при $\nu = 1/3$ и $h/l = 1/4$.

По формуле (5.1) имеем

$$u_z|_{x=l/2} = w_0 \left(1.1601 - 0.0141 \frac{z}{h} - 0.1289 \frac{z^2}{h^2} - 0.0141 \frac{z^4}{h^4} \right) \quad (5.2)$$

По формуле (1.12) —

$$u_z|_{x=l/2} = w_0 \left(1.1890 - 0.0125 \frac{z}{h} - 0.1312 \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (5.3)$$

где $w_0 = 5ql^4/36Eh^3$ — максимальное значение прогиба пластины по классической теории. В нижеприведенной таблице представлены значения полной поправки

$$\Delta = \frac{u_z - w_0}{w_0} 100\% \quad (5.4)$$

для некоторых точек сечения $x = l/2$, подсчитанные по формулам (5.2) и (5.3).

Таблица

		z/h	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
Δ	По (5.3)		16.24	18.39	18.90	17.77	15.00
	По (5.2)		13.41	15.54	16.01	14.84	11.99

Данные таблицы показывают, что значения полной поправки по формуле (5.3) получаются несколько больше, чем по формуле (5.2). Наибольшее расхождение имеет место в точке $z = h/2$ и составляет 3.01%.

Таким образом, в рассматриваемой задаче теория [11], которая предложена для пластин переменной толщины, приводит к результатам, мало отличающимся от соответствующих результатов первого приближения итерационной теории пластин постоянной толщины [2.3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Reissner E.—Trans. ASME, 1945. V.67, p. A69-A77.
2. Амбарцумян С.А. Еще одна уточненная теория анизотропных оболочек. // Механика полимеров. 1970. №5. С. 884-896.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360с.
4. Власов Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты. // Вестник МГУ. 1957. №3. С. 42-51.
5. Хачатурян Т.Т. Об учете влияния касательных напряжений в теории изгиба плит. // Изв. АН Арм ССР. Сер. физ-мат наук. 1961. Т. XIV. №1. С. 67-78.
6. Алфутов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин. // Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С.65-72.
7. Васильев В.В. Классическая теория пластин — история и современный анализ. // Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С.46-58.
8. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова Думка. 1981. 544с.
9. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Уточненные модели деформирования неоднородных анизотропных оболочек. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: 2002. С.155-166.
10. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. Гитутюн НАН РА. 2000. 122с.
11. Киракосян Р. М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. №4. С. 12-23.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
21.07.2003