

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОЛОГИХ ПОКРЫТИЙ ДВОЙКОЙ  
 ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ ЗАДАННОГО ВЕСА  
 МАКСИМАЛЬНОЙ ЖЁСТКОСТИ

Гнунի В.Ս., Նշանյան Յ.Ս.

Վ. Յ. Գնունի, ՅՈՒ. Ս. Նշանյան

Հաստատուն քաշի մարսիմալ կոշտության երկակի հաստատուն  
 փոքր կորության ծածկույթների նախագծում

Դիտարկվում է տրված մակերեսը ( $s_0 = a_0 \times b_0$  չափերի ուղղանկյուն) ծածկող նյութի տրված հաստատուն ծավալի թաղանթի նախագծման խնդիրը: Ենթադրվում է, որ թաղանթի համար ապահովվում է փոքր կորության պայմանը ( $H / \min(a_0, b_0) \leq 0.2$ ;  $H$  – վերելքի չափը): Ստացվել է արագ ալգորիթմների տարբերակ: Տույց է տրված ծածկույթների կոշտության վրա վերելքի չափի ազդեցության ամսագնահատկությունները կախված հատակագծի սկզբնական չափերից:

V.Ts.Gunni, Yu. S. Nshanyan

Designing of Given Weight Low Grade Double Constant Curvature Surface with Maximal Stiffness

Рассматривается задача нахождения панели заданного объёма материала, обладающего наибольшей жёсткостью и покрывающего заданную площадь. Полагается, что для панели выполняется условие пологости ( $H / \min(a_0, b_0) \leq 0.2$ ;  $H$  – стрела подъёма). Получен вариант быстрых алгоритмов. Показаны специфические особенности влияния стрелы подъёма на жёсткость покрытия для различных исходных геометрий плана.

Пусть задан прямоугольник с размерами  $a_0 \times b_0$ . Ставится задача проектирования покрытия максимальной жёсткости из заданного объёма материала  $V = V_0 = s_0 \times h_0$ , где  $h_0$  – толщина плоского покрытия. Рассматривается множество покрытий типа оболочек двойкой постоянной кривизны  $k_1 = 1/R_1, k_2 = 1/R_2$ , с размерами  $a, b, h$  – однородного изотропного материала с упругими характеристиками  $E, \nu$ .

Предполагается, что покрытие нагружено нормальной следящей нагрузкой  $q$  и радиально оперто по краям. Тогда, представляя прогиб оболочки и нагрузку в виде [1]

$$w(\alpha, \beta) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m \alpha \sin \mu_n \beta \quad (1)$$

$$\lambda_m = \pi m t_1 / a_0; \mu_n = \pi n t_2 / b_0; t_1 = a_0 / a; t_2 = b_0 / b$$

$$q(\alpha, \beta) = \sum_{m,n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda_m \alpha \sin \mu_n \beta \quad (2)$$

$$q_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(\alpha, \beta) \sin \lambda_m \alpha \sin \mu_n \beta d\alpha d\beta$$

для коэффициентов разложения  $w_{mn}$  получается

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D \left[ (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} \frac{(k_2 \lambda_m^2 + k_1 \mu_n^2)^2}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \right]}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

В случае покрытия типа пластинки ( $k_1 = 0, k_2 = 0$ )

$$w_{mn} = w_{mn}^0 = \frac{q_{mn}}{D_0 (\lambda_{m0}^2 + \mu_{n0}^2)^2}; \quad \lambda_{m0} = \pi m / a_0 \quad (4)$$

$$\mu_{n0} = \pi n / b_0; \quad D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}$$

Полагая

$$\gamma_i = \frac{4\delta_i}{1 + 4\delta_i^2} \quad (5)$$

где  $\delta_1 = \frac{H_1}{a_0}, \delta_2 = \frac{H_2}{b_0}$  — относительные стрелы подъёма, а  $H_1, H_2$  — соответственно стрелы подъёма в координатных плоскостях,  $\beta = \text{const}, \alpha = \text{const}$ . Учитывая условие постоянства объёма материала покрытия, получим

$$h = t_1 t_2 h_0, \quad t_i = \frac{\gamma_i}{\arcsin \gamma_i}, \quad k_1 = 2\gamma_1 / a_0, \quad k_2 = 2\gamma_2 / b_0 \quad (6)$$

Для общей (суммарной) стрелы подъёма оболочки двойкой постоянной кривизны справедливы соотношения

$$H = H_1 + H_2, \quad H / \min(a_0, b_0) \leq 0.2 \text{ — условия пологости оболочки.}$$

Обозначим через  $K$  коэффициент совершенства конструкции, определяемый в данном случае как отношение наибольших прогибов пластинки и оболочки равного веса, покрывающей данную прямоугольную площадь:

$$K = \frac{\max_{\alpha, \beta} w^0(\alpha, \beta)}{\max_{\alpha, \beta} w(\alpha, \beta)} \quad (7)$$

Величина  $K$  характеризует относительное увеличение жёсткости конструкции при переходе от плоского покрытия (пластина) к выпуклому (оболочка двойкой постоянной кривизны) покрытию. При заданных весе (толщине  $h_0$ ) и размере покрытия в плане, проект определится величинами  $\delta_1, \delta_2$  и рассматриваемая задача построения проектов наибольшей жёсткости может быть представлена в виде:

$$\text{найти } \delta_1 = \frac{H_1}{a_0}, \delta_2 = \frac{H_2}{b_0} \text{ из условия } K = \frac{\max_{\alpha, \beta} w^0(\alpha, \beta)}{\max_{\alpha, \beta} w(\alpha, \beta)} \rightarrow_{\delta_1, \delta_2} \max \quad (8)$$

$$\text{при ограничении } \delta_1 + \mu_0 \delta_2 = \delta \leq 0.2; \quad \mu = b_0 / a_0; \quad \delta = H / a_0$$

Так как прогиб  $w(\alpha, \beta)$  — монотонно убывающая функция толщины покрытия  $h$ , то в рамках построения проектов максимальной жёсткости, представляется целесообразным отдельно рассмотреть следующую задачу построения проекта покрытия наибольшей толщины при заданном исходном объеме материала :

найти  $\delta_1 = H_1 / a_0$ ,  $\delta_2 = H_2 / b_0$  из условия

$$h = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\arcsin \gamma_1 \arcsin \gamma_2} \rightarrow_{\delta_1, \delta_2} \max \quad (9)$$

при ограничении  $\delta_1 + \mu \delta_2 = \delta \leq 0.2$ ; где  $\gamma_1, \gamma_2$  определяются из (5).

Задача (9) приводится к системе трансцендентных уравнений

$$\left(\operatorname{ctg} \varphi_1 - \frac{1}{\varphi_1}\right) \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - \mu \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi_2}{2}\right) + \left(\operatorname{ctg} \varphi_2 - \frac{1}{\varphi_2}\right) \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi_1}{2} - \mu \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}\right) = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} + \mu \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = 2\delta; \quad \varphi_i = 2 \operatorname{arctg} 2\delta_i$$

Очевидное решение системы (9) при значении  $\mu = 1$  (квадратный план покрытия)

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \delta_1 = \delta_2$$

и решение задачи (9) реализуется в классе сферических покрытий ( $\gamma_1 = \gamma_2$ ).

В частном случае цилиндрического покрытия ( $\delta_2 = 0$ ) задача (9) сводится к решению уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \varphi_1 \quad (10)$$

которое в интервале  $0 < \varphi_1 < 2 \operatorname{arctg} 2\delta_1$ ,  $0 < \delta_1 < 0.2$  не имеет решений. Следовательно, в этом случае оптимальными в смысле (9) являются цилиндрические покрытия с  $\delta_1 = 0.2$  максимальной относительной стрелой подъёма.

В общем случае решение системы (9) определяет семейство

$$(\varphi_1^*, \varphi_2^*) \Leftrightarrow (\delta_1^*(\mu, \delta), \delta_2^*(\mu, \delta)),$$

на которых реализуются оптимальные в смысле (7) проекты.

Результаты численных расчётов приведены в табл. 1.

Отметим общую тенденцию, которая сохраняется и для основной задачи — для более короткой в плане стороны предпочтительная стрела подъёма всегда меньше и с возрастанием  $\mu = b_0 / a_0$  отношение  $\delta_2^* / \delta_1^*$  относительных стрел подъёма, на которых реализуются оптимальные в смысле (9) проекты, также возрастает. При переходе от цилиндрической к оптимальной в смысле (9) форме, для квадратного в плане покрытия, увеличение толщины (при сохранении веса) при  $\delta = 0.2$  составляет 4.7% и убывает с увеличением  $\mu$ .

В общем случае, как было отмечено, задача нахождения геометрии покрытия двойкой постоянной кривизны заданного веса для заданного плана, обеспечивающего минимум для максимального прогиба (максимальной жёсткости) задаётся решениями задачи (8). Параметрический анализ при



$\delta = 0,2$  для покрытий с исходной относительной толщиной  $h_0/a_0 = 1/20$  приведён в табл. 2, где представлены значения коэффициента совершенства  $K$  в зависимости от геометрии плана покрытия и относительной стрелы подъёма. (Здесь и далее представленные расчёты произведены для случая  $q_{mn} = 0$  при  $m, n \neq 1$ )

Таблица 1.

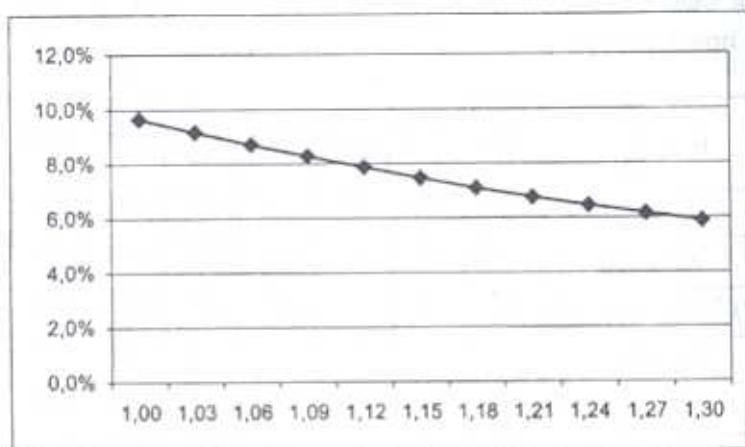
$\delta =$ $H/a_0$	$\mu = \frac{b_0}{a_0}$	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
0,12	$\delta_1^* \times 100$	6,0	5,0	4,2	3,6	3,2	3,0	2,5	2,1	1,8
	$\delta_2^* \times 100$	6,0	5,6	5,2	4,8	4,4	4,0	3,8	3,6	3,4
	$(h^* - h)/h \times 100$	0,2	1,1	1,7	2,2	2,5	2,8	3,0	3,1	3,2
0,20	$\delta_1^* \times 100$	10,0	8,4	7,1	6,0	5,2	4,5	4,0	3,5	3,2
	$\delta_2^* \times 100$	10,0	9,3	8,6	8,0	7,4	6,9	6,4	6,0	5,6
	$(h^* - h)/h \times 100$	4,7	5,9	6,8	7,5	8,0	8,4	8,7	8,9	9,1

Таблица 2

$\mu =$ $b_0/a_0$	$\delta_1 = H_1/a_0$										
	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2
1,00	6,44	6,66	6,83	6,96	7,04	7,07	7,04	6,96	6,83	6,66	6,44
1,03	6,49	6,70	6,87	6,99	7,06	7,08	7,06	6,98	6,85	6,68	6,46
1,06	6,51	6,72	6,88	7,00	7,06	7,08	7,05	6,97	6,84	6,67	6,46
1,09	6,52	6,72	6,87	6,98	7,04	7,06	7,02	6,94	6,81	6,65	6,45
1,12	6,50	6,69	6,84	6,95	7,01	7,01	6,98	6,89	6,77	6,61	6,41
1,15	6,47	6,66	6,80	6,90	6,95	6,96	6,92	6,83	6,71	6,55	6,36
1,18	6,43	6,60	6,74	6,83	6,88	6,88	6,84	6,76	6,64	6,48	6,30
1,21	6,37	6,54	6,67	6,76	6,80	6,80	6,75	6,67	6,55	6,40	6,22
1,24	6,30	6,46	6,59	6,67	6,70	6,70	6,65	6,57	6,46	6,31	6,14
1,27	6,22	6,37	6,49	6,57	6,60	6,59	6,55	6,47	6,35	6,21	6,04
1,30	6,13	6,28	6,39	6,46	6,49	6,48	6,43	6,35	6,24	6,10	5,94

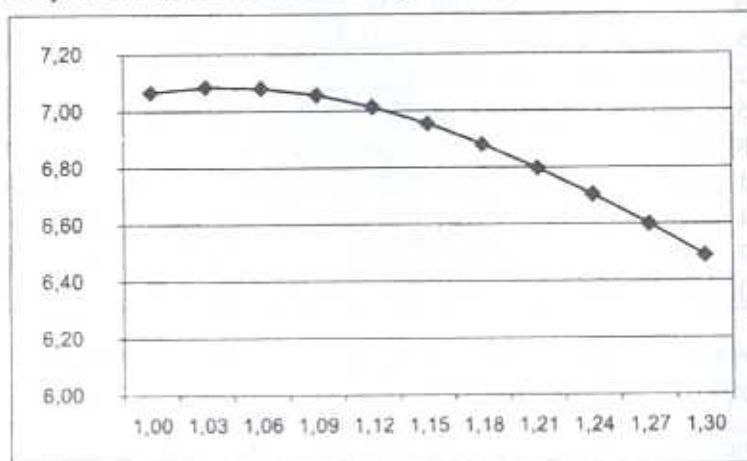
Нетрудно заметить, что в диапазоне исходных геометрий, близких к квадрату ( $1 \leq \mu \leq 1,3$ )  $\delta_1^* = 0,1$  и, следовательно,  $\delta_2^* / \delta_1^* = 1/\mu$ , а предельные значения  $\delta_1 = 0$ , соответствующие цилиндрическим формам, наименее жёсткие в классе пологих покрытий. Совершенный в смысле (8) проект в достаточно широком диапазоне исходных геометрий реализуется для значений  $0,05 \leq \delta_1 \leq 0,1$  и с высокой точностью может аппроксимироваться решениями задачи (9). Относительный выигрыш за счёт оптимального выбора  $\delta_1$  при различных геометриях плана приведен на фиг. 1. Выигрыш в жёсткости при переходе на пологую форму двойкой кривизны наибольший

при квадратном плане и составляет около 10 %. С отклонением плана от квадратного влияние этого фактора на жёсткость падает и форма оптимальной панели приближается к цилиндрической.



Фиг. 1. Прирост коэффициента совершенства от оптимального выбора соотношения относительных стрел подъёма при различных  $\mu = b_0/a_0$  ( $h_0/a_0 = 1/20$ )

Как было отмечено, переход к пологим оболочкам даёт наиболее ощутимый выигрыш в жёсткости для квадратного плана покрытия (более семи раз при  $h_0/a_0 = 1/20$ ). С увеличением одной из сторон плана покрытия выигрыш падает, тем не менее, оставаясь достаточно значительным (более шести раз для  $\mu = b_0/a_0 = 1,3$ ). Как и следовало ожидать, стороны с большей длиной плана более чувствительны к величине стрелы подъёма.



Фиг. 2. Изменение величины коэффициента совершенства в зависимости от  $\mu = b_0/a_0$  ( $h_0/a_0 = 1/20$ )

Во всём рассматриваемом диапазоне отклонение коэффициента совершенства на решениях задачи (8) от наилучших проектов не превышает

0,1%, что позволяет рассматривать задачу (8) как достаточно удачный быстрый алгоритм исходной задачи (7). С уменьшением  $h_0/a_0$  чувствительность проекта к выбору пары  $(\delta_1, \delta_2)$  падает, а к суммарной величине стрелы подъёма, параметру  $\delta$  увеличивается, превышая первый на порядок.

Для квадратного плана выбором любого набора стрел подъёма в сумме равных 0,2 имеем выигрыш в жёсткости более чем в 7 раз. Следует отметить, что если жёсткость элемента с увеличением  $\delta$  возрастает (максимальные прогибы падают) для всего диапазона геометрий, то вместе с тем чувствительность изучаемого параметра к изменению стрелы подъёма существенно не меняется с изменением исходных геометрий.

Отметим, что чем легче исходное покрытие, тем большего эффекта можно достигнуть за счёт параметра  $\delta$ . Так, при  $h_0/a_0 = 1/50$  в случае квадратного плана для относительной стрелы подъёма равной 0,1 выигрыш в жёсткости превышает 12, а увеличивая  $\delta_0$  до предельного значения 0,2, можно довести этот эффект до 40. При  $\mu = b_0/a_0 = 1,3$  эти величины – соответственно 10 и 36. С изменением относительной толщины исходного покрытия  $h_0/a_0$  сохраняется качественная зависимость от геометрии плана – эффективность перехода к пологим покрытиям падает с отклонением плана от квадратного.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 251с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
26.11.2002