ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №2, 2003 Механика

УДК 539.3

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ[1)]

Товмасян А.Б.

Ա. Բ. Թովմասյան
Անիզոտրոպ երկշերտ ջերմաառաձգական սալի ներքին եռաչափ
խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը

Ջերմաառաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրման միջոցով դիտարկվում է անիզոտրոպ երկշերտ ջերմաառաձգական սալի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը, երբ սալի դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են լարումների արժեքները, իսկ մյուս դիմային մակերևույթի վրա՝ տեղափոխության վեկտորի նորմալ բաղադրիչի և տանգենցիալ լարումների արժեքները: Գտնված է խնդրի լուծման ասիմպտոտիկան, որն էապես տարբերվում է դասական դրվածքով խնդիրների լուծման ասիմպտոտիկայից: Արտածված են ներքին խնդրում լարումների և տեղափոխությունների որոշման ռեկուրենտ բանաձևեր:

**A.B. Tovmasyan**
**On asymptotic solution of a mixed boundary value three-dimensional interior problem for anisotrope two-layered termoelastic plate**

Многие прикладные задачи сейсмологии, фундаментостроения, контактного взаимодействия тонкостенных тел приводят к рассмотрению слоистых конструкций, когда между слоями выполняются условия полного контакта.

В работе методом асимптотического интегрирования уравнений трехмерной задачи теории термоупругости рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропной двухслойной термоупругой пластинки, когда на одной из лицевых поверхностей заданы значения напряжений, а на другой–нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные напряжения. Найдена асимптотика решения, существенно отличающаяся от асимптотики решения классически поставленной задачи пластин и оболочек [1,2]. Выведены рекуррентные формулы для определения напряжений и перемещений, соответствующие внутренней задаче.

1. Требуется найти решение уравнений пространственной задачи термоупругости двухслойного анизотропного тела в области

$$\Omega = \{(x, y, z), x, y \in \Omega_0, -h_2 \le z \le h_1, h_1 + h_2 << a\}$$

Считается, что анизотропия самая общая. На пластинку действуют заданные объемные силы с компонентами

---

[1)] Работа доложена на «Международной конференции по теоретической и прикладной механике» (Ереван, октябрь 1994г.)

$$F_x^{(i)}(x,y,z), F_y^{(i)}(x,y,z), F_z^{(i)}(x,y,z), \quad i = 1,2$$

Известен закон изменения температурного поля в пределах каждого слоя.

Чтобы решить поставленную трехмерную краевую задачу, в уравнениях и соотношениях термоупругости перейдем к безразмерным переменным $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\zeta = z/h$, $h = \max(h_1, h_2)$ и безразмерным перемещениям $U^{(i)} = u^{(i)}/a$, $V^{(i)} = v^{(i)}/a, W^{(i)} = w^{(i)}/a$. Решение задачи сводится к решению сингулярно возмущенной малым параметром $\varepsilon = h/a$ системы при граничных и контактных условиях

$$\sigma_z^{(1)} = \varepsilon^{-1}\sigma_z^{+}(x,y),\ \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{+}(x,y),\ \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{+}(x,y) \qquad \text{при } z = h_1 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{xz}^{-}(x,y),\ \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{-}(x,y),\ w^{(2)} = \varepsilon^{-1}w^{-}(x,y) \qquad \text{при } z = h_1 \quad (1.2)$$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, u^{(1)} = u^{(2)}, v^{(1)} = v^{(2)}, w^{(1)} = w^{(2)} \text{ при } z = 0 \quad (1.3)$$

Решение вышеуказанной системы складывается из решения внутренней задачи и пограничного слоя [2,4]. Решение внутренней задачи ищем в виде

$$Q^{(i)} = \varepsilon^{q_i+s}Q^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta), \qquad s = \overline{0,S} \quad (1.4)$$

Чтобы получить разрешимую систему относительно $Q^{(i,s)}$, необходимо, чтобы

$$q_i = -1 \ \text{ для } \ \sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \sigma_z^{(i)}, \sigma_{xy}^{(i)} U^{(i)}, V^{(i)}, W^{(i)}$$

$$q_i = 0 \quad \text{для } \ \sigma_{xz}^{(i)}, \sigma_{yz}^{(i)} \quad (1.5)$$

Вклад объемных сил и температурных воздействий в общее напряженное состояние будет соизмерным со вкладом поверхностных сил, если

$$F_x^{(i)} = \varepsilon^{-1+s}a^{-1}F_x^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta) \quad (x,y)$$
$$F_z^{(i)} = \varepsilon^{-2+s}a^{-1}F_z^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta) \quad (1.6)$$
$$\theta^{(i)} = \varepsilon^{-1+s}\theta^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

2. Подставив (1.4) в преобразованные уравнения теории упругости с учетом (1.5), (1.6), по известной процедуре получим следующую систему:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(i,s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i,s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(i,s)}}{\partial\zeta} + F_x^{(i,s)} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(i,s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_y^{(i,s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(i,s)}}{\partial\zeta} + F_y^{(i,s)} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i,s-2)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(i,s-2)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_z^{(i,s)}}{\partial\zeta} + F_z^{(i,s)} = 0$$

$$\frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial\xi} = a_{11}^{(i)}\sigma_x^{(i,s)} + a_{12}^{(i)}\sigma_y^{(i,s)} + a_{13}^{(i)}\sigma_z^{(i,s)} + a_{14}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)} + a_{15}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)} + a_{16}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s)} + \alpha_{11}^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial\eta} = a_{12}^{(i)}\sigma_x^{(i,s)} + a_{22}^{(i)}\sigma_y^{(i,s)} + \ldots + a_{26}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s)} + \alpha_{22}^{(i)}\theta^{(i,s)} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial W^{(i,s)}}{\partial\zeta} = a_{13}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)} + a_{23}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)} + a_{33}^{(i)}\sigma_z^{(i,s-1)} + a_{34}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)} + a_{35}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)} + a_{36}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{33}^{(i)}\theta^{(i,s-1)}$$

$$\frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial\eta} = a_{14}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)} + a_{24}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)} + a_{34}^{(i)}\sigma_z^{(i,s-1)} + a_{44}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)} + a_{45}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)} + a_{46}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{23}^{(i)}\theta^{(i,s-1)}$$

$$\frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial\zeta} = a_{15}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)} + a_{25}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)} + \ldots + a_{56}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{13}^{(i)}\theta^{(i,s-1)}$$

$$\frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial\xi} = a_{16}^{(i)}\sigma_x^{(i,s)} + a_{26}^{(i)}\sigma_y^{(i,s)} + a_{36}^{(i)}\sigma_z^{(i,s)} + a_{46}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)} + a_{56}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)} + a_{66}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s)} + \alpha_{12}^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

где $a_{jk}^{(i)}$ –упругие коэффициенты податливости, $\alpha_{jk}^{(i)}$ –коэффициенты теплового расширения, $a$ – характерный размер срединной плоскости пластинки.

Учитывая, что $Q^{(i,s)} \equiv 0$ при $s < 0$, из системы (2.1) можно определить все неизвестные величины с точностью некоторых функций, зависящих только от переменных $\xi,\eta$. В результате имеем решение

$$\sigma_z^{(i,s)} = \sigma_{z0}^{(i,s)}(\xi,\eta) + \sigma_z^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$W^{(i,s)} = w^{(i,s)}(\xi,\eta) + w^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$V^{(i,s)} = v^{(i,s)}(\xi,\eta) + v^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$U^{(i,s)} = u^{(i,s)}(\xi,\eta) + u^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{2.2}$$

$$\sigma_x^{(i,s)} = A_{13}\sigma_{z0}^{(i,s)} + L_{11}u^{(i,s)} + L_{13}v^{(i,s)} + \sigma_x^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$\sigma_y^{(i,s)} = A_{23}\sigma_{z0}^{(i,s)} + L_{22}u^{(i,s)} + L_{23}v^{(i,s)} + \sigma_y^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$\sigma_{xy}^{(i,s)} = A_{63}\sigma_{z0}^{(i,s)} + L_{33}u^{(i,s)} + L_{63}v^{(i,s)} + \sigma_{xy}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$\sigma_{xz}^{(i,s)} = \sigma_{xz0}^{(i,s)}(\xi,\eta) - \zeta\left(\frac{\partial L_{11}}{\partial\xi} + \frac{\partial L_{23}}{\partial\eta}\right)u^{(i,s)} - \zeta\left(\frac{\partial L_{13}}{\partial\xi} + \frac{\partial L_{63}}{\partial\eta}\right)v^{(i,s)} -$$

$$-\left(A_{13}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\xi} + A_{63}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\eta}\right) + \sigma_{xz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$\sigma_{yz}^{(i,s)} = \sigma_{yz0}^{(i,s)}(\xi,\eta) - \zeta\left(\frac{\partial L_{33}}{\partial\xi} + \frac{\partial L_{22}}{\partial\eta}\right)u^{(i,s)} - \zeta\left(\frac{\partial L_{63}}{\partial\xi} + \frac{\partial L_{23}}{\partial\eta}\right)v^{(i,s)} -$$

$$-\left(A_{63}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\xi} + A_{23}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\eta}\right) + \sigma_{yz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

Здесь $A_{ij}$ –постоянные коэффициенты упругости, а $L_{ij}$ –дифференциальные операторы, приводимые в [5]. Величины $Q^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$ –известные функции для каждого приближения $s$, если определены величины предыдущих приближений, и определяются по рекуррентным формулам, приводимым в [5].

В (2.2) неизвестными являются функции $u^{(i,s)}$, $v^{(i,s)}$, $w^{(i,s)}$, $\sigma_{z0}^{(i,s)}$, $\sigma_{xz0}^{(i,s)}$, $\sigma_{yz0}^{(i,s)}$, которые определяются из условий (1.1)–(1.3). Удовлетворив условиям контакта (1.3), получим:

$$
\begin{gathered}
u^{(1,s)} = u^{(2,s)}, v^{(1,s)} = v^{(2,s)} \\
w^{(1,s)} = w^{(2,s)}, \sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)} \\
\sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz0}^{(2,s)}, \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)}
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

а удовлетворив условиям (1.1), (1.2), получим

$$
\begin{gathered}
w^{(i,s)} = w^{-(s)} + w^{*(i,s)}(\xi,\eta,-\zeta_2) \\
\sigma_{z0}^{(i,s)} = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta_1), \zeta_i = h_i/h \\
\sigma_{xz0}^{(i,s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} + \sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,-\zeta_2) - \sigma_{xz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta_1) \\
\sigma_{yz0}^{(i,s)} = \sigma_{yz}^{-(s)} + \sigma_{yz}^{+(s)} - \sigma_{yz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,-\zeta_2) - \sigma_{yz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Для определения $u^{(i,s)}, v^{(i,s)}$ получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$
\begin{gathered}
L_1 u^{(1,s)} + L_2 v^{(1,s)} = P_1^{(s)} \\
L_3 u^{(1,s)} + L_4 v^{(1,s)} = P_2^{(s)}
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

где $L_1, L_2, L_3, L_4$ –операторы в [5],

$$
\begin{gathered}
P_1^{(s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} - \sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi,\eta,-\zeta_2) + \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1) - \\
- A_{13}\left(\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}}{\partial\xi}\right) + A_{63}\left(\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\eta} - \frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}}{\partial\eta}\right) \\
P_2^{(1,s)} = \sigma_{yz}^{-(s)} - \sigma_{yz}^{+(s)} - \sigma_{yz}^{*(2,s)}(\xi,\eta,-\zeta_2) + \sigma_{yz}^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1) - \\
- A_{63}\left(\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}}{\partial\xi}\right) + A_{23}\left(\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\eta} - \frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}}{\partial\eta}\right)
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Определив перемещения $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}$, по формулам (1.4), (1.5), (2.2)-(2.4) определятся все искомые величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотропных пластин// Инж. ж. МТТ. 1966. №6. С.116-121.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости// ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686.
3. Агаловян Л.А. О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий// Докл. АН Арм.ССР. 1979. Т. 69. С.151-156.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
5. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки// Изв. АН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.3-11.

Арцахский госуниверситет
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
13.05.2003