

УДК 539.3

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТО-
УПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ ИДЕАЛЬНО-
ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА
Даноян З.Н.

Զ.Ն. Դանոյան

Անիզոտրոպ իդեալական հաղորդիչ միջավայրում կետային աղբյուրից տարածվող
մագնիսատառձգական ալիքների հարթ խնդրի վերաբերյալ

Դիտարկված է հարթ խնդրում չորս առաձգական հաստատուններ ունեցող անիզոտրոպ իդեալական
հաղորդիչ միջավայրում ակնրարբային իմպուլսի տիպի կետային աղբյուրից տարածվող
մագնիսատառձգական ալիքների հարթ խնդիրը, երբ միջավայրը գտնվում է արտաքին համասեռ
հաստատուն մագնիսական դաշտում: Խնդրի լուծումները կառուցված են Սմիռնովի-Սուրյուկի կոմպլեքս
լուծումների մեթոդով: Գտնված են պայմաններ առաձգական հաստատունների և մագնիսական դաշտի
ինտենսիվության միջև, երբ ալիքները տարածվում են որոշակի բնութագրիչ օրինաչափությամբ:
Մասնավորապես գտնված են պայմաններ, որոնց օգնությամբ կարելի է որոշել ալիքների ճակատների
երկրաչափական ձևը և ալիքային դաշտերում լակունների առկայությունը:

Z.N. Danoyan

On the Plane Problem of Magnetoelastic Waves Propagation from A Point Source in
an Anisotropic Perfect Conducting Media

Рассмотрена плоская задача распространения магнитоупругих волн от точечного
источника типа мгновенного импульса в анизотропной идеально-проводящей среде с
четырьмя упругими постоянными в плоской задаче, находящейся во внешнем однородном
постоянном магнитном поле. Решения задачи строятся методом комплексных решений
Смирнова-Соболева. Найдены условия между упругими постоянными и интенсивностью
магнитного поля, когда волны распространяются с определенной характеристической
закономерностью. В частности, найдены условия, с помощью которых можно определить
геометрическую форму фронтов волн и наличия лакун в волновых полях.

Введение. Волновые процессы в анизотропных упругих средах и, тем
более, магнитоупругие волновые процессы сложны и многообразны,
зависят от класса анизотропии, соотношений упругих постоянных, вели-
чины и направления внешнего магнитного поля, направлений распростра-
нения волн и т.д. В отличие от изотропных сред, где распространяются
чисто продольные и чисто поперечные волны, в анизотропных средах, а
также изотропных и анизотропных средах в магнитном поле распростра-
няются квазипродольные и квазипоперечные или быстрые и медленные
волны. В изотропных средах волновой процесс был описан функциональ-
но-инвариантными или комплексными решениями волновых уравнений
[1]. В работах [2-4] методом комплексных решений исследованы волновые
процессы в анизотропных средах, причем в [4] предлагается уточняющий
подход к построению комплексных решений. В работах [5,6] методом ком-

плексных решений изучены волновые процессы в изотропных средах, находящихся в магнитном поле. В работах [7,8] этим методом изучено поведение магнитоупругих волн в идеально-проводящих анизотропных средах. В этой работе продолжается изучение данного вопроса. Детально изучаются решения, соответствующие магнитоупругим волнам от точечного источника типа мгновенного импульса. Исследованы геометрические формы волновых фронтов и условия возникновения лакун в волновых полях. В работах [9,11] изучены поведения магнитоупругих волн при наличии сосредоточенных сил и импульсов в упругом полупространстве.

1. Уравнения магнитоупругих волн и их решение методом комплексных решений Смирнова-Соболева. Рассмотрим анизотропную идеально проводящую среду, уравнения движения которой в случае плоской деформации содержат четыре упругих постоянных [5]. Оси x, y, z прямоугольной системы координат совпадают с главными направлениями упругости среды. Перемещения не зависят от координаты z . Среда находится в однородном постоянном магнитном поле $\vec{H}_0$, направленное по одной из координатных осей. Уравнения движения этих сред в перемещениях имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} a_m u_{xx} + c_m v_{xy} + d_m u_{yy} &= u_{tt} \\ e_m v_{xx} + c_m u_{xy} + b_m v_{yy} &= v_{tt} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $u = f(x, y, t)$, $v = g(x, y, t)$ — компоненты упругого перемещения $\vec{u} = \{u, v, 0\}$, индексы у u и v обозначают производные по x, y и t ; a_m, b_m, c_m, d_m, e_m — постоянные коэффициенты, определяемые формулами ($m = 0, 1, 2, 3$ соответствуют случаям: $\vec{H}_0 = 0$, $\vec{H}_0 = H_0 \vec{i}$, $\vec{H}_0 = H_0 \vec{j}$, $\vec{H}_0 = H_0 \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты координатной системы $Oxyz$):

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0, b_1 = b_0 + \chi, d_1 = d_0, e_1 = d_0 + \chi, c_1 = c_0 \\ a_2 &= a_0 + \chi, b_2 = b_0, d_2 = d_0 + \chi, e_2 = d_0, c_2 = c_0 \\ a_3 &= a_0 + \chi, b_3 = b_0 + \chi, d_3 = d_0, e_3 = d_0, c_3 = c_0 + \chi \\ a_0 &= c_{11} / \rho_0, b_0 = c_{22} / \rho_0, d_0 = c_{66} / \rho_0, c_0 = (c_{12} + c_{66}) / \rho_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

c_{ik} — упругие постоянные, ρ_0 — плотность среды, $\chi = H_0^2 / 4\pi\rho_0$ — величина, характеризующая интенсивность внешнего магнитного поля, называемая скоростью Альфвена.

Область допустимых значений параметров a_0, b_0, c_0, d_0 , т.е. коэффициентов уравнений (1.1) при $m = 0$ (при отсутствии магнитного поля) находятся из условия положительной определенности формы упругой энергии [3]:

$$a_0 > 0, b_0 > 0, d_0 > 0, E_0 = a_0 b_0 - (c_0 - d_0)^2 > 0 \quad (1.3)$$

При этих условиях система (1.1) (при $m=0$) вполне гиперболична, что означает возможность распространения чисто упругих волн в любых направлениях в рассматриваемых средах.

Можно показать [8], что при условиях (1.3) и $\chi > 0$ (что имеет место при наличии магнитного поля любой интенсивности) система уравнений магнитоупругих волн вполне гиперболична и магнитоупругие волны в рассматриваемых средах могут распространяться в любых направлениях, причем

$$a_m > 0, b_m > 0, d_m > 0, e_m > 0, |c_m| < c_E^{(m)} \quad (1.4)$$

$$c_E^{(m)} = \sqrt{a_m b_m} + \sqrt{d_m e_m}, \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

Ввиду того, что упругие постоянные реальных известных сред рассматриваемого класса удовлетворяют условиям [3]:

$$a_0 > d_0, b_0 > d_0, c_0 > 0, d_0 > 0, E_0 > 0 \quad (1.6)$$

или, что то же самое,

$$A_0 = a_0 - d_0 > 0, B_0 = b_0 - d_0 > 0, d_0 > 0, 0 < c_0 < c_E^{(0)} \quad (1.7)$$

в работах [2-4] поведение упругих волн исследуются именно при этих условиях. В этой работе мы также будем исходить из неравенств (1.6) и $\chi > 0$.

Согласно методу комплексных решений Смирнова-Соболева [1] выражаем решение системы уравнений (1.1) функциями:

$$u = f(\Omega), v = g(\Omega) \quad (1.8)$$

где Ω представляет собой функцию, определенную в неявном виде линейным уравнением относительно x, y, t :

$$\delta \equiv l(\Omega)t + m(\Omega)x + n(\Omega)y - k(\Omega) = 0 \quad (1.9)$$

Здесь под f и g понимаются дважды непрерывно-дифференцируемые функции, если величины $l(\Omega), \dots, k(\Omega)$ вещественны. А если некоторые из этих величин комплексны, то f и g — аналитические функции в соответствующей области.

Определяя производные функций (1.8) с учетом (1.9) и подставляя их значения в систему (1.1), получим соотношения:

$$\begin{aligned} (a_m m^2 + d_m n^2 - l^2) f'(\Omega) + c_m m n g'(\Omega) &= 0 \\ c_m m n f'(\Omega) + (e_m m^2 + b_m n^2 - l^2) g'(\Omega) &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

устанавливающие взаимосвязь между искомыми функциями (1.8).

Система (1.10) имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$\Delta \equiv (a_m m^2 + d_m n^2 - l^2)(e_m m^2 + b_m n^2 - l^2) - c_m^2 m^2 n^2 = 0 \quad (1.11)$$

Соотношение (1.11) устанавливает зависимость между функциями $l(\Omega), m(\Omega), n(\Omega)$, а также, согласно (1.10), между производными $f'(\Omega), g'(\Omega)$.

Таким образом, класс функций (1.8) выражают решение системы (1.1), если их аргумент Ω определен уравнением (1.9), с коэффициентами, подчиненными уравнениям (1.10).

2. Решения, выражающие магнитоупругие волны от точечного источника. Из класса функционально-инвариантных решений можно выделить решения, выражающие магнитоупругие волны от точечного источника типа мгновенного импульса в начале координат. Эти решения будут однородными решениями нулевого измерения. Для этого примем в уравнении (1.9) $l(\Omega) \equiv 1, n(\Omega) \equiv \lambda, k(\Omega) \equiv 0, m(\Omega) \equiv -\theta$. В этом случае уравнения (1.9), (1.10) и (1.11) примут вид:

$$t - \theta x + \lambda y = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} (a_m \theta^2 + d_m \lambda^2 - 1) f'(\theta) - c_m \theta \lambda g'(\theta) = 0 \\ -c_m \theta \lambda f'(\theta) + (e_m \theta^2 + b_m \lambda^2 - 1) g'(\theta) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$b_m d_m \lambda^4 - p_m(\theta) \lambda^2 + r_m(\theta) = 0 \quad (2.3)$$

$$p_m = b_m + d_m - (a_m b_m + d_m e_m - c_m^2) \theta^2, r_m = (a_m \theta^2 - 1)(e_m \theta^2 - 1) \quad (2.4)$$

$$q_m = p_m^2 - 4b_m d_m r_m = D_m \theta^4 - 2M_m \theta^2 + B_m^2, D_m = l_m^2 - 4a_m b_m d_m e_m \quad (2.5)$$

$$M_m = (b_m + d_m) N_m - (a_m d_m - b_m e_m) B_m, l_m = a_m b_m + d_m e_m - c_m^2 \quad (2.6)$$

$$A_m = a_m - e_m, B_m = b_m - d_m, N_m = A_m B_m - c_m^2 \quad (2.7)$$

В этом случае уравнение (2.1) определяет новую переменную величину θ как функцию от x, y, t , а уравнение (2.3) определяет λ как функцию от θ :

$$\lambda = \pm \lambda_k(\theta) = \pm \sqrt{\frac{p_m(\theta) + (-1)^k \sqrt{q_m(\theta)}}{2b_m d_m}} \quad (k=1,2), \lambda_3 = -\lambda_1, \lambda_4 = -\lambda_2 \quad (2.8)$$

функции $\lambda_k(\theta)$ являются ветвями алгебраической функции $\lambda = \lambda(\theta)$, однозначно определенной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных и интенсивности магнитного поля (параметра χ).

Решения (1.8) системы (1.1) принимают вид:

$$u_k = f_k(\Omega_k), v_k = g_k(\Omega_k) \quad (2.9)$$

где θ_k определяются, согласно (2.1), из уравнения:

$$1 - \theta_k \xi + \lambda_k \eta = 0 \quad (2.10)$$

а производные искомых функций, согласно (2.3), из уравнений:

$$\begin{cases} (a_m \theta_k^2 + d_m \lambda_k^2 - 1) f'_k(\theta_k) - c_m \theta_k \lambda_k g'_k(\theta_k) = 0 \\ -c_m \theta_k \lambda_k f'_k(\theta_k) + (e_m \theta_k^2 + b_m \lambda_k^2 - 1) g'_k(\theta_k) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Для получения решения, соответствующего физическому смыслу задачи, необходимо просуммировать условия (2.11) [4]:

$$(a_m \theta_k^2 + d_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) f'_k(\theta_k) + (e_m \theta_k^2 + b_m \lambda_k^2 - c_m \theta_k \lambda_k - 1) g'_k(\theta_k) = 0 \quad (2.12)$$

Согласно (2.12), решения (2.9) можно представить в виде:

$$u(x, y, t) = - \sum_{k=1}^4 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_k}^{0_k} [e_m \zeta^2 + b_m \lambda_k^2 - 1 - c_m \zeta \lambda_k] W_k(\zeta) d\zeta \right\} \quad (2.13)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{k=1}^4 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma_k}^{0_k} [a_m \zeta^2 + d_m \lambda_k^2 - 1 - c_m \zeta \lambda_k] W_k(\zeta) d\zeta \right\}$$

где W_k — ветви произвольной аналитической функции W , однозначно определенной на вышеуказанной римановой поверхности функции $\lambda(\theta)$.

Равенство (2.10) устанавливает соответствие между вышеуказанной римановой поверхностью и областью на плоскости $O\xi\eta$ (следовательно, и на плоскости Oxy), где определены функции $\theta_k(\xi, \eta)$.

Из вышеизложенного следует, что для построения решения, характеризующего распространения волны от точечного источника, необходимо исследовать алгебраическую функцию $\lambda(\theta)$, ветви этой функции и соответствующую риманову поверхность. Для чисто упругой задачи этот вопрос детально изучен в [2-4], а для магнитоупругих волн — в [8].

Для изучения поведения корней $\lambda_k(\theta)$ следует изучать поведение функций $p(\theta)$, $q(\theta)$ и $r(\theta)$ из (2.5). Корни дискриминанта характеристического уравнения (2.3) определяют особые точки алгебраической функции $\lambda(\theta)$:

$$\Phi_m(\theta) = 16a_m d_m r_m(\theta) q_m(\theta) = 0 \quad (2.14)$$

что эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$r_m(\theta) = 0, \quad q_m(\theta) = 0 \quad (2.15)$$

Корни функций $p(\theta)$, $q(\theta)$ и $r(\theta)$ определяются выражениями:

$$\theta = \pm \theta_p^{(m)} = \pm \sqrt{\frac{b_m + d_m}{a_m b_m + d_m e_m - c_m^2}} \quad (2.16)$$

$$\theta = \pm \theta_{r1}^{(m)} = \pm 1/\sqrt{a_m}, \quad \theta = \pm \theta_{r2}^{(m)} = \pm 1/\sqrt{e_m} \quad (2.17)$$

$$\theta = \pm \theta_{qk}^{(m)} = \pm \sqrt{\frac{M_m + (-1)^k \sqrt{\Delta_m}}{D_m}}, \quad (k=1,2) \quad (2.18)$$

$$\Delta_m = M_m^2 - B_m^2 D_m = -4b_m d_m c_m^2 N_m \quad (2.19)$$

Характер и взаимоположение этих корней в зависимости от упругих постоянных и от χ детально изучен в [8].

Так как точки $\pm \theta_{qk}^{(m)}$ ($k=1,2$) суть простые нули функции $q_m(\theta)$ (за исключением случая, когда $N_m = 0$), то внутренний радикал, входящий в

(2.8), будет однозначной функцией на плоскости θ с разрезами, соединяющими точки разветвления $\pm \theta_{qk}^{(m)}$. Эти разрезы таковы:

- 1) $N_m > 0: (\pm \theta_{q1}^{(m)}, \mp \theta_{q1}^{(m)}); (\pm \theta_{q2}^{(m)}, \mp \theta_{q2}^{(m)})$
- 2) $N_m < 0, D_m > 0, M_m < 0: (i|\theta_{q2}^{(m)}|, i|\theta_{q1}^{(m)}|); (-i|\theta_{q1}^{(m)}|, -i|\theta_{q2}^{(m)}|)$
- 3) $N_m < 0, D_m > 0, M_m > 0: (\theta_{q1}^{(m)}, \theta_{q2}^{(m)}); (-\theta_{q2}^{(m)}, -\theta_{q1}^{(m)})$
- 4) $N_m < 0, D_m < 0: (\theta_{q1}^{(m)}, +\infty); (-\infty, -\theta_{q1}^{(m)})$
 $(i|\theta_{q2}^{(m)}|, +i\infty); (-i\infty, -i|\theta_{q2}^{(m)}|)$

В случае $N_m = 0$ имеют место равенства $\pm \theta_{q1}^{(m)} = \pm \theta_{q2}^{(m)}$, и поэтому двойные нули $\pm \theta_{qk}^{(m)}$ не являются точками разветвления для внутреннего радикала функций $\lambda_k(\theta)$, т.е. при $N_m = 0$ внутренний радикал функций $\lambda_k(\theta)$ является однозначной функцией на всей комплексной плоскости θ . Случай $N_m = 0$ имеет место, например, для изотропной среды при отсутствии магнитного поля. В этом случае:

$$\theta_{q1}^{(0)} = \theta_{q2}^{(0)} = +\infty, \lambda_1(\theta) = \sqrt{1/a_0 - \theta^2}, \lambda_2(\theta) = \sqrt{1/d_0 - \theta^2}$$

В общем случае значение внутреннего радикала функций $\lambda_k(\theta)$ будем фиксировать условием: он положителен при $\theta = ib$, где b достаточно малая положительная величина.

Взяв два листа плоскости θ с вышеуказанными разрезами и склеив крест-накрест соответствующие берега разрезов, получим риманову поверхность однозначного определения функции $T(\theta)$:

$$T(\theta) = (2b_m d_m)^{-1} [p_m(\theta) + \sqrt{q_m(\theta)}] \quad (2.21)$$

находящейся под внешним радикалом функции $\lambda(\theta)$. Ветви функции $T(\theta)$ определены на плоскостях θ_1 и θ_2 и имеют вид:

$$T_k(\theta) = (2b_m d_m)^{-1} [p_m(\theta) + (-1)^k \sqrt{q_m(\theta)}] \quad (2.22)$$

Теперь рассмотрим поведение радикала $\lambda(\theta) = \sqrt{T(\theta)}$ на двулистной римановой поверхности алгебраической функции $T(\theta)$. Функция $T(\theta)$ обращается в ноль в четырех точках, которые являются корнями уравнения $r_m(\theta) = 0$, т.е. в точках $\pm \theta_{rk}^{(m)}$ ($k = 1, 2$). При вышеуказанном выборе ветвей $T_k(\theta)$, согласно результатам работы [8, табл.1] следует, что в зависимости от значений параметров a_0, b_0, d_0, c_0 и χ с точки зрения обращения в ноль функций $T_k(\theta)$, возможны следующие случаи:

- 1) При условии $K_m > 0, A_m > 0, S_m > 0$ функция $T_1(\theta)$ обращается в ноль в

точках $\pm \theta_{r1}^{(m)}$ плоскости θ_1 римановой поверхности функции $T(\theta)$, а $T_2(\theta)$ — в точках $\pm \theta_{r2}^{(m)}$ плоскости θ_2 ;

2) При условии $K_m < 0$, $A_m > 0$, $S_m > 0$ функция $T_1(\theta)$ обращается в ноль в точках $\pm \theta_{r1}^{(m)}$ и $\pm \theta_{r2}^{(m)}$ плоскости θ_1 римановой поверхности, а $T_2(\theta)$ нигде не обращается в ноль;

3) При условии $K_m < 0$, $A_m = 0$, $S_m > 0$ имеет место $\theta_{r1}^{(m)} = \theta_{r2}^{(m)}$ и функция $T_1(\theta)$ обращается в ноль в двух двойных точках $\pm \theta_{r1}^{(m)} = \pm \theta_{r2}^{(m)}$ плоскости θ_1 , а $T_2(\theta)$ нигде не обращается в ноль;

4) При $K_m < 0$, $A_m < 0$, $S_m > 0$ функции $T_k(\theta)$ ведут себя так же, как в случае 2), но здесь взаиморасположение нулей функции $T_1(\theta)$ на плоскости θ_1 меняется на противоположные;

5) При $K_m < 0$, $A_m < 0$, $S_m < 0$ функции $T_k(\theta)$ ведут себя так же, как в случае 1), но здесь взаиморасположение точек $\theta_{r1}^{(m)}$ и $\theta_{r2}^{(m)}$ меняется на обратное, причем $T_1(\theta_{r2}^{(m)}) = 0$, $T_2(\theta_{r1}^{(m)}) = 0$;

6) Случай $K_m = 0$ является переходным между случаями 1) и 2), случай же $S_m = 0$ — между случаями 4) и 5).

Отсюда следует, что в случаях 1) и 5) точки $\pm \theta_{rk}^{(m)}$ являются точками разветвления первого порядка функции $\lambda(\theta)$, причем в случае 1) две из них, а именно, точки $\pm \theta_{r1}^{(m)}$ являются точками разветвления для ветви $\lambda_1(\theta) = \sqrt{T_1(\theta)}$ этой функции, а другие две, т.е. точки $\pm \theta_{r2}^{(m)}$, являются точками разветвления для ветви $\lambda_2(\theta) = \sqrt{T_2(\theta)}$ этой функции. В случае 5) роль точек $\theta_{r1}^{(m)}$ и $\theta_{r2}^{(m)}$ меняется на обратное. В случаях 2) и 4) опять же точки $\pm \theta_{rk}^{(m)}$ являются точками разветвления первого порядка для функции $\lambda(\theta)$, но в этих случаях все четыре особые точки являются точками разветвления для $\lambda_1(\theta)$; ветвь $\lambda_2(\theta)$ точек разветвления не имеет.

Заметим, что в случае 4) по сравнению со случаем 2) взаиморасположением точек $\theta_{r1}^{(m)}$ и $\theta_{r2}^{(m)}$ меняется на обратное. В случае 3) точки $\pm \theta_{rk}^{(m)}$ не являются точками разветвления для функции $\lambda(\theta)$. Этот случай (конической рефракции) является особым и требует дополнительных исследований.

На основе вышеприведенных рассуждений приходим к заключению, что радикал $\lambda(\theta) = \sqrt{T(\theta)}$ на римановой поверхности функции $T(\theta)$ будет однозначным, если на этой поверхности провести следующие разрезы:

— При условии 1) на плоскости θ_1 разрез: $(-\theta_{r1}^{(m)}, +\theta_{r1}^{(m)})$, а на θ_2 — разрез: $(-\theta_{r2}^{(m)}, +\theta_{r2}^{(m)})$ (фиг.1 а, б, в, г);

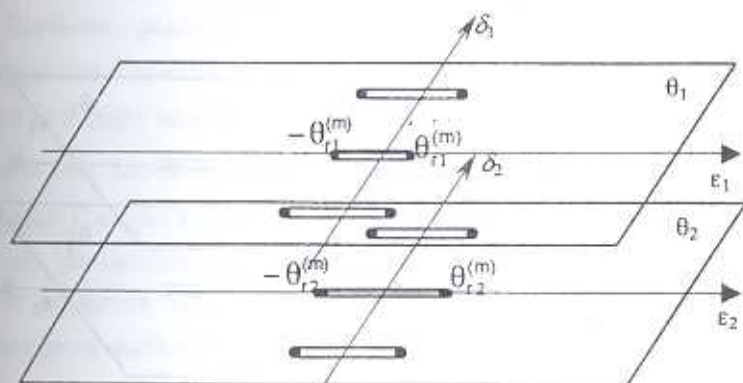
— При условии 2) и $D_m > 0$, $M_m > 0$ на плоскости θ_1 разрезы:

$(\mp\infty, \mp\theta_{q2}^{(m)})$, $(\mp\theta_{q1}^{(m)}, \mp\theta_{r2}^{(m)})$, $(-\theta_{r1}^{(m)}, +\theta_{r1}^{(m)})$, а на θ_2 — разрезы: $(\mp\infty, \mp\theta_{q2}^{(m)})$, $(-\theta_{q1}^{(m)}, +\theta_{q1}^{(m)})$, (Фиг.2);

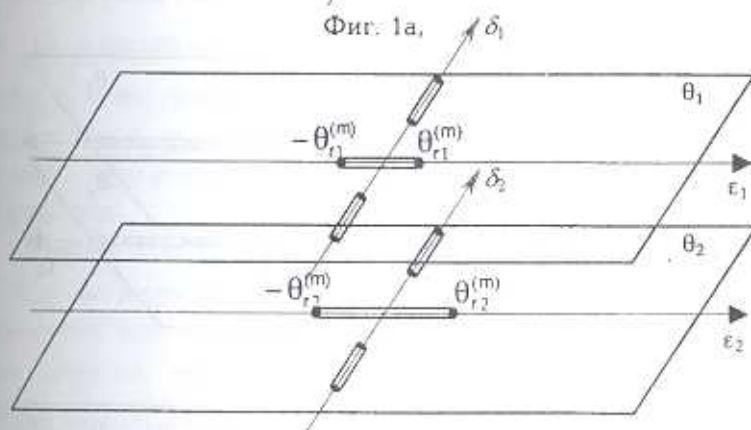
— При условии 2) и $D_m < 0$ на плоскости θ_1 разрезы: $(\mp\theta_{q1}^{(m)}, \mp\theta_{r2}^{(m)})$,

$(-\theta_{r1}^{(m)}, +\theta_{r1}^{(m)})$, а на θ_2 — разрез: $(-\theta_{q1}^{(m)}, +\theta_{q1}^{(m)})$, (Фиг.3).

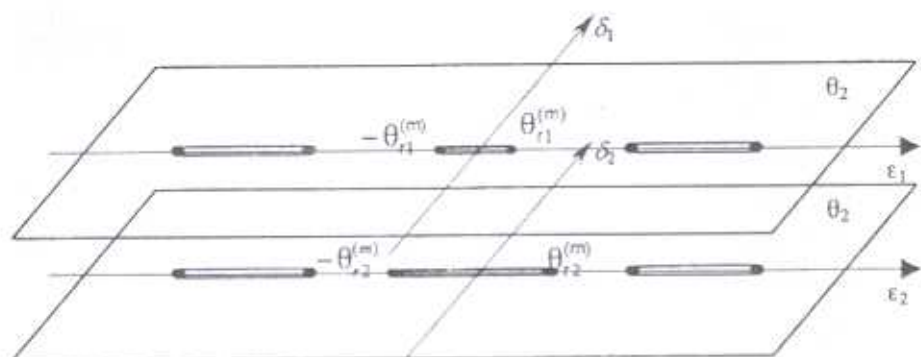
Случай 4) аналогичен случаю 2). Здесь взаиморасположение точек противоположно. Случай же 5) аналогичен случаю 1). В случае $S_m = 0$ или $K_m = 0$ являются предельными для вышеприведенных случаев.



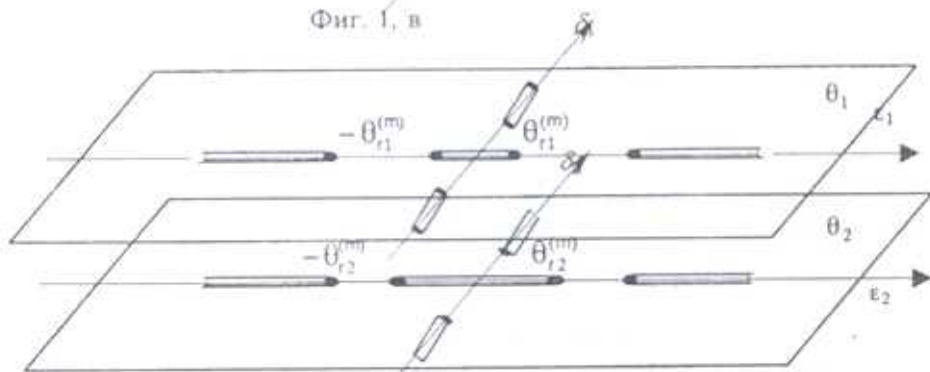
Фиг. 1а,



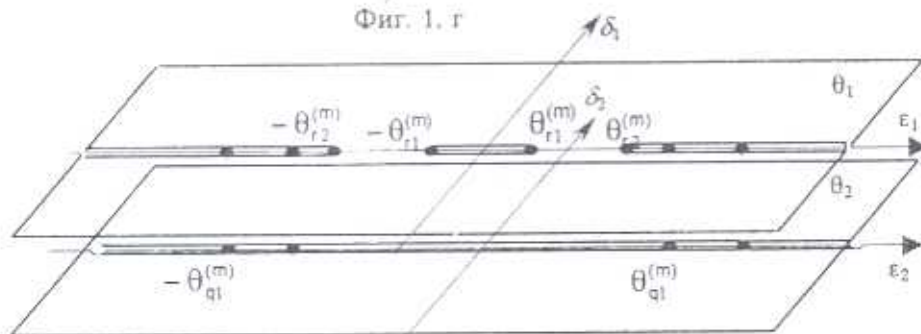
Фиг. 1, б



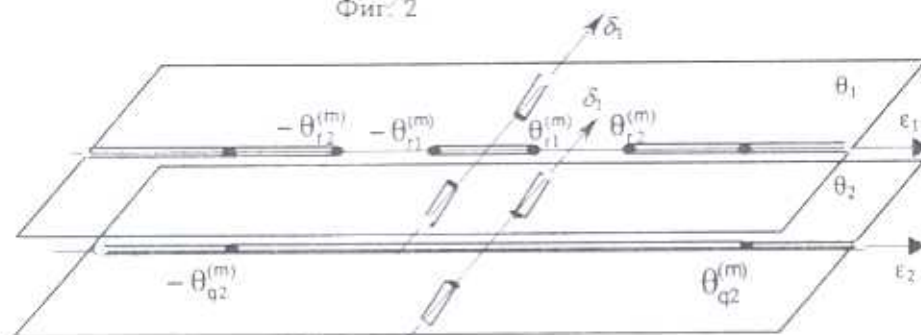
Фиг. 1, в



Фиг. 1, г



Фиг. 2



Фиг. 3

Для получения римановой поверхности функции $\lambda(\theta)$ следует брать два комплекта двулистной римановой поверхности функции $T(\theta)$ с одинаковыми разрезами, и склеить соответствующие берега этих разрезов, где функции λ_1 и $-\lambda_1$, λ_2 и $-\lambda_2$ принимают одинаковые значения, склеить друг с другом (берега разрезов двулистных поверхностной склеиваются крест-накрест). Ввиду сопряженности рассматриваемых функций относительно вещественных осей, решения можно найти, ограничиваясь рассмотрением двулистной римановой поверхности функции $T(\theta)$.

Значение радикала $\lambda(\theta) = \sqrt{T(\theta)}$ на вышеуказанной римановой поверхности с приведенными разрезами будем фиксировать условием так, чтобы оно было положительным при $\theta_1 = ib_1$, где точка ib_1 принадлежит мнимой оси плоскости θ_1 , причем b_1 — достаточно малая положительная величина. Следует отметить, что в случае, когда корни $\lambda_k(\theta)$ характеристического уравнения принадлежат первому типу [8], вышеприведенный выбор значения радикала $\lambda(\theta)$ на римановой поверхности равносильен следующему выбору: значение радикалов $\lambda_k(\theta)$ фиксируются условием, чтобы они были положительными при $\theta_1 = ib_1$ и $\theta_2 = ib_2$, где точки ib_1 и ib_2 (b_k — достаточно малые положительные величины) принадлежат соответственно плоскостям θ_1 и θ_2 ; если же корни $\lambda_k(\theta)$ принадлежат второму типу, то вышеуказанные выборы уже не равносильны (в этих случаях аналитические продолжения приводят к неодинаковым результатам).

Легко показать, что при вышеуказанном выборе ветвей $\lambda_k(\theta)$ каждая из них на противоположных берегах разрезов, где они вещественны, принимают противоположные значения. Отсюда следует, что на берегах этих разрезов ветви $\lambda_k(\theta)$ принимают все значения действительных корней характеристического уравнения ($\pm \lambda_1$ и $\pm \lambda_2$).

Магнитоупругие возмущения, исходящие из точки $x=0$, $y=0$ в момент времени $t=0$, будут в любой последующий момент времени $t>0$ находиться в плоскости Oxy внутри фронтов магнитоупругой волны, отделяющей возмущенную область от невозмущенной в момент времени t . В любой момент времени t фронт волны может быть получен как огибающая прямых (2.10) при вещественных значениях θ_k и $\pm \lambda_k(\theta_k)$.

Согласно вышеуказанному выбору ветвей $\lambda_k(\theta)$ фронт волны можно получить, как огибающую прямых (2.10) при $k=1$ и $k=2$, причем параметр θ должен меняться на обоих берегах разрезом:

$$\xi_k = -\frac{\lambda'_k(\theta)}{\lambda_k(\theta) - \theta_k \lambda'_k(\theta)}, \quad \eta_k = -\frac{1}{\lambda_k(\theta) - \theta_k \lambda'_k(\theta)} \quad (2.23)$$

Из вышеприведенных рассуждений следует, что решение системы (1.1), характеризующее волновые поля магнитоупругих волн, испущенных из точечного источника типа мгновенного импульса, имеет вид [6]:

$$u(x, y, t) = -\sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\theta_k}^{\theta_k} [e_m \zeta^2 + b_m \lambda_k^2 - 1 - c_m \zeta \lambda_k] W_k(\zeta) d\zeta \right\} \\ v(x, y, t) = \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\theta_k}^{\theta_k} [a_m \zeta^2 + d_m \lambda_k^2 - 1 - c_m \zeta \lambda_k] W_k(\zeta) d\zeta \right\} \quad (2.24)$$

где функцию W необходимо выбрать так, чтобы вещественные части ее ветвей W_k обращались в ноль на берегах разрезом римановой поверхности, где функции $\lambda_1(\theta)$ и $\lambda_2(\theta)$ вещественны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.А. Некоторые вопросы распространения колебаний. — В кн. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. — М.-Л.: ОНТИ, 1937, с. 468-617.
2. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела. //ПММ. 1961. Т.25. Вып. 5. С.885-896.
3. Осипов И.О. К методу функционально-инвариантных решений для задач динамической теории упругости анизотропных сред. // Изв. АН СССР, сер геофиз. 1963. №3. С. 391-396.
4. Осипов И.О. К методу комплексных решений динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред. // Изв. РАН. МТТ. 1999. №4. С.102-112.
5. Даноян З.Н. К плоской задаче распространения магнитоупругих волн в идеально-проводящих изотропных средах. //Изв. АН Арм.ССР, Механика. 1974, Т. 27. №5. С. 37-46.
6. Даноян З.Н. К плоской задаче распространения магнитоупругих колебаний от точечного источника. // Изв. АН Арм.ССР, Механика. 1975. Т. 28, №1. С. 20-33.

7. Даноян З.Н. О распространении магнитоупругих волн в идеально-проводящих изотропных средах с кубической симметрией. — В кн.: Исследования по мех. тв. деф. тела. Ереван: Изд. АН Арм.ССР. 1981. С. 104-109.
8. Даноян З.Н. К методу функционально-инвариантных решений для задачи магнитоупругости идеально-проводящих анизотропных сред. // Механика, уч. записки ЕГУ. 1984. №1. С. 52-61.
9. Багдоев А.Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитотермоупругости. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1974. Т.27. №2. С.13-23.
10. Григорян Э.Х. О колебании магнитоупругой среды, возбуждаемой сосредоточенной гармонической силой. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1978. Т.31. №5. С. 48-62.
11. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Плоская магнитоупругая задача Лэмба. — Механика, межвуз. сб. науч. трудов, вып.3, Ереван, 1984. С. 68-76.

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
09.06.2003