ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №2, 2003 Механика

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКЕ

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան

Առաձգամածուցիկ գլանային թաղանթի կայունության մասին շարժվող բեռի դեպքում

Դիտարկվում է օրթոտրոպ նյութից գլանային թաղանթի կայունությունը շարժվող բեռի դեպքում: Նյութը առաձգամածուցիկ հատկություն է ցուցաբերում միայն սահքի դեֆորմացիայի նկատմամբ: Բեռի շարժման արագությունը այնքան փոքր է, որ իներցիոն ուժերը կարելի է արհամարհել: Բացի ակնթարթային և երկարատև կրիտիկական բեռներից մտցվում է նաև կրիտիկական ժամանակի գաղափարը:

L.A. Movsisyan, G.G. Nersisyan

On Stability of Viscoelastic Cylindrical Shell under Moving Load

Изучается устойчивость цилиндрической оболочки из композита, когда нормальное давление движется с одного конца в другой. Движение настолько медленное, что инерционными членами в уравнениях движения можно пренебречь и в то же время вязкие свойства играют заметную роль. Для обсуждаемых систем, помимо мгновенной и длительной критических нагрузок, есть наобходимость также введения критического момента времени потери устойчивости. Аналогичная задача для разномодульного стержня рассмотрена в [1].

1.Как известно, многие композиты, связующим материалом которых являются полимеры, в большинстве своем, вязкие свойства проявляют по отношению к сдвиговым деформациям [2], т.е. для таких материалов определяющий закон имеет вид

$$\sigma_x = A_{11}e_x + A_{12}e_y$$
$$\sigma_y = A_{12}e_x + A_{22}e_y \tag{1.1}$$
$$\sigma_{xy} = \tilde{A}_{66}e_{xy} = A_{66}\left(1 - \Gamma^*\right)e_{xy}$$

Оператор Γ^* характеризует вязкое свойство материала.

В предположении, что движущаяся нагрузка создает кольцевое усилие, (1.1) соответствуют следующие уравнения устойчивости в перемещениях:

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{C}_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(C_{12} + \tilde{C}_{66}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R}C_{12}\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\left(C_{12} + \tilde{C}_{66}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \tilde{C}_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R}C_{22}\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{R}\left[C_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R}\right)\right]+D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+$$

$$+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_1^0\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0$$

Как уже было отмечено в введении, задача рассматривается в квазистатическом приближении.

Будем рассматривать случай, когда на концах оболочки осуществляется условие свободного опирания, тогда, представив перемещения в виде

$$\begin{aligned}
u &= \cos\mu_n y\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(t)\cos\lambda_m x\\
v &= \sin\mu_n y\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m(t)\sin\lambda_m x\\
w &= \cos\mu_n y\sum_{m=1}^{\infty}f_m(t)\sin\lambda_m x,\quad \mu_n=\frac{n}{R},\quad \lambda_m=\frac{m\pi}{l}
\end{aligned}\tag{1.3}$$

граничные условия будут удовлетворены. Для получения системы относительно φ_m,ψ_m и f_m, необходимо ещё начальное кольцевое усилие также представить в виде ряда

$$T_2^0=R\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos\lambda_k x\tag{1.4}$$

Подставляя (1.3) и (1.4) в (1.2) и исключая φ_m и ψ_m, для f_m получим бесконечную систему однородных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
&\left[Y_1-Y_2\Gamma^*+K_m\frac{1-\Gamma^*}{x_1-x_2\Gamma^*}\right]f_m=\\
&=\frac{R\mu_n^2}{2}\left[\sum_{p=1}^{m}a_{m-p}f_p+\sum_{p=m}^{\infty}a_{p-m}f_p-\sum_{p=1}^{\infty}a_{p+m}f_p\right]
\end{aligned}\tag{1.5}$$

Здесь

$$Y_1=D_{11}\lambda_m^4+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\lambda_m^2\mu_n^2+D_{22}\mu_n^4$$

$$Y_2=4D_{66}\lambda_m^2\mu_n^2$$

$$X_1=C_{11}C_{66}\lambda_m^4+\left(C_{11}C_{22}-C_{12}^2-2C_{12}C_{66}\right)\lambda_m^2\mu_n^2+C_{22}C_{66}\mu_n^4$$

$$X_2=C_{66}\left(C_{11}\lambda_m^4-2C_{12}\lambda_m^2\mu_n^2+C_{22}\mu_n^2\right)$$

$$K_m=\frac{1}{R^2}C_{66}\lambda_m^4\left(C_{11}C_{22}-C_{12}^2\right)$$

2. В качестве примеров рассмотрим два случая:

а) равномерное внешнее давление $\left(q = q_0 \quad \text{при} \quad x \leq ct\right)$ с одного конца движется в другой с постоянной скоростью c. Тогда для коэффициентов a_k будем иметь

$$a_0 = q_0 t, \quad a_k = \frac{2q_0}{k\pi}\sin k\pi\tau \tag{2.1}$$

Здесь $\tau = ct/l$ — безразмерное время, и $\tau = 1$ соответствует времени, когда нагрузка доходит до второго конца.

б) гидростатическое давление распространяется с постоянной скоростью

$$q = q_0\left(1 - \frac{x}{ct}\right), \quad 0 \leq x \leq ct \tag{2.2}$$

$$a_0 = \frac{q_0\tau}{2}, \quad a_k = \frac{2q_0}{(k\pi)^2\tau}\left(1 - \cos k\pi\tau\right)$$

Материал оболочки берется такой, для которого наследственное свойство характеризуется моделью Максвелла—Томпсона

$$\Gamma^* u = A\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} u(\tau)\,d\tau \tag{2.3}$$

Критическая нагрузка или критическое время потери устойчивости определяются из системы (1.5). Если принять нагрузку не движущейся, то для каждого фиксированного положения (на интервале действующей нагрузки), можно определить мгновенную и длительную критические нагрузки, как обычно делается для вязкоупругих систем [3]. Но при движущейся нагрузке, естественно, имеются ещё промежуточные значения критических параметров. Таковым, в частности, является критическое время. Понятие последнего — в некоторой степени произвольное и различное при толковании различных авторов. Мы будем пользоваться понятием, использованным в [1,4].

Если в (1.5) $\int_0^t \Gamma^*(t-\tau) f_m d\tau$ заменить на $f_m \int_0^t \Gamma(t-\tau)d\tau$, то вместо системы интегральных уравнений будем иметь алгебраическую систему с переменными коэффициентами от времени. Вот из условия разрешимости этой системы и определяется критическое время. Такое понятие относительно критического времени помимо того, что дает значения мгновенных и длительных критических величин, имеет еще ясный физический смысл: критическое время — это время, при котором, для вывода системы из начального состояния, необходимо наименьшее внешнее воздействие, чем в другой момент времени.

3. Произведем числовой эксперимент. В качестве материалов для оболочки брались ортогонально армированные ($\pm 45^0$) [5]:

а) стеклопластик с данными –

$$E_1 = E_2 = 17 \text{ ГПа}, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = 0, \quad G_{12} = 12.5 \text{ ГПа} \tag{3.1}$$

б) углепластик –

$$E_1 = 8.2 \text{ ГПа}, \quad E_2 = 7.6 \text{ ГПа}, \quad \nu_{12} = 0.89; \tag{3.2}$$

$$\nu_{21} = 0.87; \quad G_{12} = 20 \text{ ГПа}$$

$$A_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad A_{12} = \nu_{21}A_{11}, \quad A_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad A_{66} = G_{12} \tag{3.3}$$

Некоторые результаты вычислений приведены в таблицах. В табл.1 положены значения $qR^3/A_{11}h^3$, при которых потеря устойчивости происходит для одного момента времени для первой задачи, а в табл.2 – для второй. В первых строках каждой клетки помещены эти значения для $\frac{h}{A} = 2\cdot10^{-3}$, а во вторых – $\frac{h}{R} = 1\cdot10^{-3}$, при этом $\pi R = 0.5l$ (то, что числа первых строк меньше вторых, не должно смущать, т.к. в выражении $\frac{q}{A_{11}}\frac{R^3}{h^3}$ существует второй множитель).

Таблица 1

	Стеклопластик				Углепластик			
β / $\tau_{кр}$	0	3	6	15	0	3	6	15
0.2	34.78 48.40	34.29 47.91	33.92 47.54	33.41 47.02	37.04 50.54	36.49 50.01	36.16 49.68	35.78 49.30
0.4	8.001 11.16	7.895 11.05	7.848 11.00	7.824 10.98	8.415 11.55	8.226 11.36	8.166 11.30	8.138 11.27
0.6	4.278 5.985	4.222 5.931	4.210 5.919	4.208 5.917	4.483 6.182	4.361 6.063	4.341 6.043	4.337 6.039
0.8	3.284 4.602	3.244 4.563	3.238 4.557	3.238 4.557	3.439 4.752	3.337 4.652	3.329 4.642	3.327 4.640
1	3.132 4.389	3.092 4.349	3.088 4.347	3.088 4.347	3.280 4.533	3.180 4.431	3.174 4.427	3.174 4.427

Для длительного коэффициента модуля сдвига принималось значение половины его мгновенного значения –

$$A_{66}^{\infty} = A_{66}\left(1 - \Gamma^{*}\cdot 1\right) = 0.5\,A_{66} \qquad (\text{в } (2.3)\ 2A = \alpha) \tag{3.4}$$

В первых строках таблиц заданы значения

$$\beta = \frac{\alpha l}{c} = 0;\ 3;\ 6;\ 15 \tag{3.5}$$

(β^{-1} – безразмерное время релаксации).

Случай $\beta=0$ соответствует упругой постановке задачи – мгновенная критическая нагрузка, а $\beta=15$ уже можно трактовать как случай длительной нагрузки $(1-e^{-5}\approx1)$.

Таблица 2

	Стеклопластик				Углепластик			
β / $\tau_{кр}$	0	3	6	15	0	3	6	15
0.2	122.6 155.1	120.5 155.1	118.9 155.1	116.6 155.1	131.5 155.1	129.5 155.1	128.3 155.1	126.8 155.1
0.4	25.10 34.93	24.67 34.50	24.48 34.31	24.38 34.20	26.48 36.23	25.88 35.64	25.68 35.44	25.58 35.35
0.6	11.80 16.47	11.61 16.28	11.57 16.24	19.56 16.23	12.39 17.04	12.06 16.70	11.99 16.64	11.98 16.63
0.8	7.752 10.84	7.638 10.73	7.624 10.72	7.623 10.71	8.125 11.20	7.885 10.96	7.864 10.94	7.862 10.94
1	6.096 8.537	6.011 8.451	6.005 8.445	6.005 8.445	6.385 8.816	6.190 8.621	6.180 8.611	6.178 8.611

Как видно из приведенных таблиц, разница между мгновенными и длительными нагрузками не очень большая. Оно и понятно, ведь вязким свойством обладает только коэффициент сдвига (возможно, не самый главный для подобных задач), как и следовало ожидать, критическое время для промежуточных состояний находится между значениями мгновенного и длительного.

С другой стороны, чем толще и чем короче оболочка, тем больше относительное критическое давление $\left(q(\tau_{кр})/q(\tau=0)\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. Об устойчивости вязкоупругого разномодульного стержня при движущейся нагрузке. //Изв.АН РФ. МТТ. 1994. №4. С.171-175.
2. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Изд. "Зинатне", 1980. 571 с.
3. Потапов В.Д. Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1986. 312 с.
4. Мовсисян Л.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. //Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т.44. №4. С.3-12.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
19.12.2002