ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №2, 2003 Механика

УДК 539.3

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Геворкян Г.А.

Գ. Ա. Գևորգյան
Առաձգական սալերի լուծման վերջավոր տարրերի մոդիֆիկացված մեթոդ

Առաջարկվում է վերջավոր տարրերի մոդիֆիկացված մեթոդ, որում երկչափ առաձգական սալերի լուծումը հանգեցվում է քառակուսային ծրագրավորման խնդիրների: Բերվում է նրանց լուծման ալգորիթմը:

G. A. Gevorgyan
A Modified Finite Elements Method for Elastic Plates

Предлагается модифицированный метод конечных элементов, при котором решения двумерных упругих пластин сводятся к задачам квадратичного программирования. Приведен алгоритм их решения.

1.Метод конечных элементов треугольной формы для двумерных упругих пластин.

Рассмотрим пластинку единичной толщины, внутри которой выделен s-ый конечный элемент треугольной формы с узлами i, j, m.

Перемещения i-ого узла зададим вектором $\delta_i = (u_i, \mathrm{v}_i)^T$, при котором вектор узловых перемещений треугольного элемента представится в виде

$$\delta_s = (u_i, \mathrm{v}_i, u_j, \mathrm{v}_j, u_m, \mathrm{v}_m)^T$$

Вектор перемещения $f = (u, \mathrm{v})^T$ внутри элемента задается формулой [3]

$$f = (IN_i, IN_j, IN_m)\delta_s \tag{1}$$

где

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta \tag{2}$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = x_m - x_j \tag{3}$$

Δ – площадь треугольника; ijm; I – единичная матрица второго порядка.

Остальные величины, входящие в соотношение (1), можно получить циклической перестановкой индексов ijm в выражениях (2) и (3).

Деформация в некоторой точке элемента определяется вектором

$$\varepsilon = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})^T = \left\| B_i^s, \quad B_j^s, \quad B_m^s \right\| \delta_s$$

где

$$B_r^s = \frac{1}{2\Delta}\begin{Vmatrix} b_r, & 0 \\ 0, & c_r \\ c_r, & b_r \end{Vmatrix} \quad r = \{i,\ j,\ m\}. \tag{4}$$

В соответствии с законом Гука для плоского напряженного состояния и изотропного материала имеем

$$\sigma = \tilde{D}\varepsilon = \frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{Vmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\upsilon}{2} \end{Vmatrix}\varepsilon \tag{5}$$

Здесь $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$ – вектор напряжения, $\tilde{D}$ – матрица упругости, E – модуль упругости, а ν – коэффициент Пуассона.

Для определения матрицы жесткости $k_s = \left\|k_{rq}^s\right\|$ элемента ijm имеем [3]

$$k_s = (B_s)^T \tilde{D} B_s \Delta t \tag{6}$$

где матрица $B_s = \left\|B_i^s,\quad B_j^s,\quad B_m^s\right\|$; t – толщина элемента.

Обозначим через $F_s = (F_{i,x}^s, F_{i,y}^s, F_{j,x}^s, F_{j,y}^s, F_{m,x}^s, F_{m,y}^s)^T$ вектор узловых сил, а через $P_s = (P_{i,x}^s, P_{i,y}^s, P_{j,x}^s, P_{j,y}^s, P_{m,x}^s, P_{m,x}^s)^T$ – вектор нагрузок. Здесь индексами x и y показаны проекции сил на соответствующие координатные оси.

Векторы F_s и P_s связаны соотношением [3]

$$F_s = k_s \delta_s - P_s \tag{7}$$

2. Модифицированный метод конечных элементов треугольной формы для двумерных упругих пластин.

Примем в качестве обобщенных сил и обобщенных перемещений соответственно узловые усилия F_s и перемещения δ_s, тогда, согласно теореме Клапейрона потенциальная энергия s-ого конечного элемента равна

$$\Omega_s = \frac{1}{2}(\delta_s)^T F_s \tag{8}$$

откуда, с учетом связей (7) имеем

$$\Omega_s = \frac{1}{2}[(\delta_s)^T k_s \delta_s - (\delta_s)^T P_s] \tag{9}$$

Если рассматриваемая область представлена в виде совокупности m конечных элементов, то потенциальная энергия для всей конструкции будет

$$\Omega=\sum_{s=1}^{m}\Omega_s \tag{10}$$

Пусть n – общее число узлов конструкции,

$\delta=(u_1,v_1,u_2,v_2,...,u_n,v_n)^T$ – вектор узловых перемещений,

$F=(F_1^x,F_1^y,F_2^x,F_2^y,...,F_n^x,F_n^y)^T$ – вектор узловых сил,

$P=(P_1^x,P_1^y,P_2^x,P_2^y,...,P_n^x,P_n^y)^T$ – вектор нагрузок,

$K=\|K_{ij}\|$ – матрица жесткости для всей конструкции.

Тогда, как следует из соотношения (10),

$$P_i^x=\sum_s P_{i,x}^s\ ,\ P_i^y=\sum_s P_{i,y}^s\ ,\ i\in N=\{1,2,...n\} \tag{11}$$

и, кроме этого, матрица K имеет $n\times n$ компонентов квадратной подматрицы второго порядка

$$\overline{K}_{ij}=\sum_s k_{ij}^s\ , i\in N\ , j\in N \tag{12}$$

В формулах (11) и (12) знак суммы распространяется на все соединяемые в узле сторон конечных элементов.

Из соотношения (9) и (10) находим

$$\Omega=\frac{1}{2}(\delta^T K\delta-\delta^T P) \tag{13}$$

которая является однородной функцией второй степени узловых перемещений.

Если исходить из принципа минимума потенциальной энергии системы [4], то определение искомого вектора δ сводится к следующей задаче квадратичного программирования:

$\min\{0{,}5(\delta^T K\delta-\delta^T P)$,

условия совместности деформаций,

кинематические краевые условия$\}$ (14)

Если i-ый узел s-ого конечного элемента жестко защемлен, то кинематические граничные условия соответственно будут

$$u_i^s=0 \text{ и } v_i^s=0 \tag{15}$$

если же шарнирно оперт, то имеем

$$u_i^s=0 \text{ или } v_i^s=0 \tag{16}$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{array}{c} u_1+K_{12}^{(0)}\mathrm{v}_1+K_{13}^{(0)}u_2+K_{14}^{(0)}\mathrm{v}_2+\ldots+K_{1(2n-1)}^{(0)}u_n+K_{1(2n)}^{(0)}\mathrm{v}_n=z_1 \\ \mathrm{v}_1+K_{23}^{(1)}u_2+K_{24}^{(1)}\mathrm{v}_2+\ldots+K_{2(2n-1)}^{(1)}u_n+K_{2(2n)}^{(1)}\mathrm{v}_n=z_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n+K_{(2n-1)2n}^{(2n-2)}\mathrm{v}_n=z_{2n-1} \end{array}\right\} \quad (17)$$

Найдем произведение узловых перемещений и, подставив их в выражение потенциальной энергии (9), определим

$$\Omega=0{,}5(\delta^T\hat{D}\delta+z^T\bar{I}z-\delta^T P) \quad (18)$$

где $\hat{D}=\left\|\hat{d}_{ij}\right\|$ – диагональная матрица порядка $2n$; $\bar{I}$ – единичная матрица порядка $2n-1$; $z=(z_1,z_2,\ldots,z_{2n-1})^T$

$$\left.\begin{array}{c} K_{ii}^{(0)}=K_{ii}, i\in\{1,2,\ldots,2n\}; K_{1j}^{(0)}=K_{1j}, j\in\{2,3,\ldots,2n\} \\ K_{ij}^{(r)}=K_{ij}^{(r-1)}-K_{i(j-1)}^{(r-1)}K_{ij}^{(r-1)}, r\in\{1,2,\ldots,2n-1\}, i\in\{r,\ldots,2n\}, j\in\{r+1,\ldots,2n\} \end{array}\right\} \quad (19)$$

$$\hat{d}_{ii}=K_{ii}^{(0)}-\sum_{s=1}^{i-1}(K_{si}^{(s)})^2-1, i\in\{1,2,\ldots,2n-1\}; \quad \hat{d}_{(2n)2n}=K_{(2n)2n}^{(0)}-\sum_{i=1}^{2n-1}(K_{i(2n)}^{(2n)})^2 \quad (20)$$

Пусть $X=\begin{pmatrix}\delta\\ z\end{pmatrix}$ и $C=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}P\\ 0\end{pmatrix}$ – векторы-столбцы порядка $4n-1$; $D=\left\|d_{ij}\right\|=\begin{Vmatrix}\hat{D} & 0\\ 0 & \bar{I}\end{Vmatrix}$ – диагональная матрица порядка $4n-1$, тогда выражение (18) примет вид

$$\Omega=\frac{1}{2}X^TDX+C^TX \quad (21)$$

В обозначениях (17) компоненты вектора z переведем в левую сторону и перепишем его в виде систем уравнений

$$AX=0 \quad (22)$$

Здесь через $A=(A_1,A_2,\ldots,A_{4n-1})$ обозначена матрица коэффициентов полученной системы уравнений, где $A_j=(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{2n-1})^T$.

Принимая во внимание, что условия совместности деформаций автоматически выполняются[3] с учетом связей (21) и (22), взамен задачи (14) получим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min\{C^TX+\frac{1}{2}X^TDX \mid AX=0, \text{кинематические краевые условия}\} \quad (23)$$

3.Алгоритм решения.

Для решения задачи (23) используем алгоритм решения задач квадратичного программирования [1]. Так как в задаче (23) отсутствуют условия неотрицательности искомых переменных, то ее решение сводится к определению обратной матрицы $G^{-1} = \| g_{ij} \|$, где

$$G = AD^{-1}A^T \qquad (24)$$

Зная обратную матрицу G^{-1}, последовательно находим векторы

$$B = AD^{-1}C \qquad (25)$$

$$Z = G^{-1}B \qquad (26)$$

Тогда искомые компоненты вектора X определяем по формуле

$$X = D^{-1}(A^T Z - C) \qquad (27)$$

Приведем алгоритм нахождения обратной матрицы G^{-1} для данной задачи.

Нулевой шаг. В качестве базисных переменных примем компоненты вектора Z, тогда, легко увидеть, что $G_0 = \bar{I}$. Очевидно, что обратная матрица G_0^{-1} также единичная и $G_0^{-1} = \bar{I}$.

В дальнейшем вычисления аналогичны вычислениям в k-ом шаге. Поэтому перейдем непосредственно к рассмотрению k-ого шага. Зафиксируем некоторый элемент $p \in M = \{1,2,...,2n\}$, в соответствии с которым последовательно находим вектор Q_p и матрицу $G_{k,p}^{-1}$ по формулам[1]:

$$Q_p = G_k^{-1} d_{pp}^{-1} Ap \qquad (28)$$

$$g_{ij}^{(k,p)} = g_{ij}^{(k)} - \frac{Q_p^i Q_p^j}{1 + A_p^T Q_p}, i \in M \setminus \{2n\}, j \in M \setminus \{2n\} \qquad (29)$$

Эту процедуру повторим $2n$ раз для всех векторов $A_j, j \in M$. Ясно, что при $p = 2n$ получим

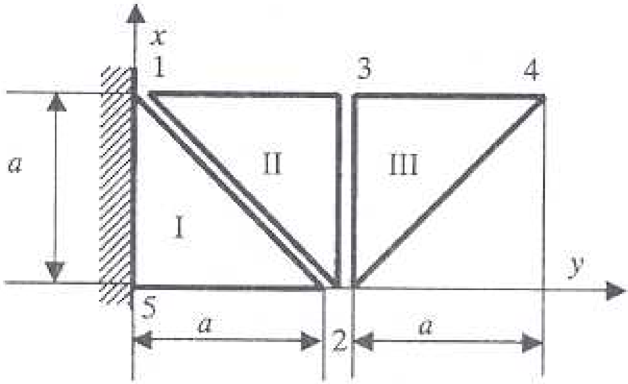
$$G^{-1} = G_{2n}^{-1} \qquad (30)$$

Отметим, что по сравнению с ранее существующими методами данный подход потребует почти одинаковое количество действий умножения (деления). Однако программный пакет реализации вышеприведенного алгоритма малообъемен и прост в применении.

4. Пример.

Рассмотрим расчет пластинки [2], представленной на фиг. 1, на которую действует равномерно распределенная по всей поверхности нагрузка с интенсивностью q.

Разобьем пластинку на ряд треугольников (фиг.1). Составим таблицу координат вершин треугольников и поочередно рассмотрим элементы I, II и III. По формулам (3) и (4) найдем матрицы



Фиг. 1

$$B_2^I = B_4^{III} = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix},\ B_2^{II} = B_2^{III} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ -a & 0 \end{Vmatrix},\ B_3^{II} = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \\ a & a \end{Vmatrix},\ B_3^{III} = \begin{Vmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \\ a & -a \end{Vmatrix}$$

Учитывая, что площадь конечного элемента равна $\Delta = a^2/2$, и, принимая $\nu = 0{,}3$, для элементов I, II и III определяем векторы нагрузок и матрицы жесткостей (6). Исходя из соотношений (12) и (11), находим подматрицы жесткостей и компоненты вектора нагрузок. На основе этих величин формируем вектор C и матрицу жесткости для всей конструкции . Имеем

$$C = qa^2(0,\ 0{,}5,\ 0,\ 0{,}33333,\ 0,\ 0{,}16667,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^T$$

$$K = \frac{Et}{1{,}82}\begin{vmatrix} 1{,}7 & 0 & -0{,}7 & 0{,}05 & 0 & -0{,}35 \\ 0 & 2{,}35 & 0 & -2 & -0{,}3 & 0 \\ -0{,}7 & 0 & 2{,}7 & 0 & -1 & 0{,}35 \\ 0{,}05 & -2 & 0 & 2{,}7 & 0{,}3 & -0{,}35 \\ 0 & -0{,}3 & -1 & 0{,}3 & 1 & 0 \\ -0{,}35 & 0 & 0{,}35 & -0{,}35 & 0 & 0{,}35 \end{vmatrix}$$

Используя формулы (19), (20) и обозначения (17), находим матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -0{,}7 & 0{,}05 & 0 & -0{,}35 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -0{,}3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}035 & -1 & 0{,}105 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}265 & -0{,}336175 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}0159136 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

и целевую функцию

$$\Omega = \frac{1{,}82qa^2}{Et}\left(0{,}7u_2^2 + 1{,}35\mathrm{v}_2^2 + 1{,}21u_3^2 - 2{,}3\mathrm{v}_3^2 - 1{,}16u_4^2 + \right.$$
$$\left. + 0{,}103\mathrm{v}_4^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2\right)$$

Используя вышеприведенный алгоритм, вычисляем обратную матрицу

$$G^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}286449 & -0{,}265257 & 0{,}0893936 & -0{,}0455973 & 0{,}0967714 \\ -0{,}265257 & -1{,}8969 & 0{,}334242 & 1{,}29098 & -0{,}322129 \\ 0{,}0893936 & 0{,}334242 & -0{,}207506 & -0{,}446221 & 1{,}27638 \\ -0{,}0455993 & 1{,}29098 & -0{,}446221 & -0{,}226627 & 0{,}679938 \\ 0{,}0967714 & -0{,}322129 & 1{,}27638 & 0{,}679938 & -1{,}08372 \end{Vmatrix}$$

и поочередно находим (формулы (24) – (26)) векторы

$$B = (-0{,}57245,\quad 0{,}65975,\quad 0{,}1645,\quad -0{,}68758,\quad 0{,}025699)^T$$

$$Z = (-0{,}29044,\quad -1{,}94059,\quad 0{,}47482,\quad 0{,}97773,\quad -0{,}55332)^T$$

$$\delta = \frac{1{,}82qa}{Et}(-0{,}4149,\quad -1{,}8078,\quad 0{,}5604,\quad -1{,}9653,\quad 0{,}6076,\quad -3{,}4168)^T$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян Г. А. Механические модели и алгоритмы решения задач математического программирования. Ереван: Изд. АН Армянской ССР, 1987. 184 с.
2. Дарков А. В., Клейн Г. К., Кузнецов В. И., Лужкин О. В., Рекач В. Г., Синельников В. В., Шапиро Г. С. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1976. 600 с.
3. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра, 1974. 240 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
5. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1977. 280 с.

Ереванский государственный
Университет Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
02.09.2002