ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №2, 2003 Механика

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ, НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ КОРОТКИХ ВОЛН

Багдоев А.Г.

Ա.Գ. Բագդոև
Կարճ ալիքների հավասարումներով նկարագրվող ոչ գծային ոչ ստացիոնար դիֆրակցիոն խնդիրների լուծման ալգորիթմի մշակումը:

Դիտարկվում է հարթ խնդիրը ճնշման թափանցելիության սեղմելի հեղուկի մեջ և բարակ կոնի թափանցելիությունը հեղուկ կիսատարածության մեջ: Երկու խնդիրներում հետազոտվում է ալիքների շփման կետի շրջակայքը գծային և ոչ գծային դրվածքով:

A.G. Bagdoev
Elaboration of algorithm of solution of non-linear unsteady diffraction problems, described by short waves equations

Рассматриваются типичные дифракционные волновые задачи: плоская задача о проникании давления в сжимаемую жидкость, занимающую полупространство и задача о проникании узкого конуса в жидкое полупространство. В обеих задачах исследуется окрестность точки касания распространяющейся волны с точечной волной. Находятся линейное и точное нелинейное решения впереди точечной волны, а затем формулируется задача численного решения нелинейных уравнений коротких волн позади точечной волны с определением висячей ударной волны.

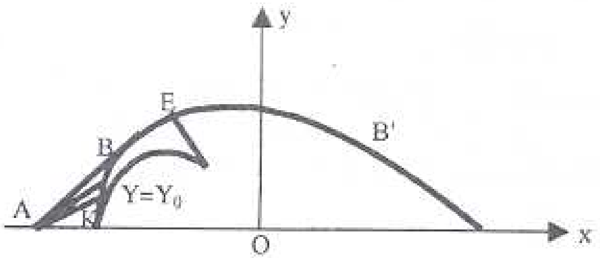
1. Плоская задача о проникании отрицательного избыточного давления в жидкость или положительного в упругую полуплоскость.

Для определенности рассмотрим задачу о движении сжимаемой жидкости под действием давления, возникающего в начальный момент $t=0$ в точке O на поверхности и движущегося по границе жидкости по закону

$$p=\begin{cases} p_1 f\left(\dfrac{x}{vt}\right), & |x|<vt \\ 0, & |x|>vt \end{cases} \qquad (1)$$

где $f(1)=1$, $p_1<0$, $v>a$ — постоянные, координата x отсчитывается по границе жидкости, a — скорость звука невозмущенной жидкости.

Ставится задача определить нелинейное решение в окрестности точки B касания волн AB и BB' фиг. 1. В случае $p_1>0$ эта задача решена аналитически в [1], при этом ABB' является ударной волной и определено распределение давления вдоль BB'. При этом условия на ударной волне удовлетворяются с достаточной точностью. В случае $p_1<0$ ABB' является непрерывной волной [2], при этом имеется висячая ударная волна BK фиг.1, на которой получено аналитически нелинейное решение, которое удовлетворяет не столь точно условиям на BK [1]. Поэтому следует рассмотреть постановку задачи численного счета нелинейных уравнений для определения точного решения в окрестности B фиг. 1.



Фиг. 1

Пусть r,θ есть полярные координаты, $\tilde{\varphi}$ — потенциал движения. Тогда можно в случае $p_1 < 0$ ввести переменные [2]

$$\gamma = -\frac{p_1}{\rho_0 a^2},\ \ \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r} = a\gamma\mu,\ \ \frac{\partial\tilde{\varphi}}{r\partial\theta} = a\gamma^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{k+1}{2}}\nu$$

$$r = at\left(1+\frac{n+1}{2}\gamma\delta\right),\ \ \theta-\theta_0 = \gamma^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{n+1}{2}}Y \tag{2}$$

где ρ_0 — начальная плотность, n — показатель адиабаты. Тогда из уравнения для $\tilde{\varphi}$ в нелинейной задаче в первом порядке по γ получится уравнение коротких волн [2]

$$\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial\delta},\ \ \nu = \frac{\partial\varphi}{\partial Y}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}-\delta\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\delta^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} = 0 \tag{3}$$

В упругой среде для нормальной скорости продольной волны [1] $c_n = a + \Gamma u$, где $u = \partial\tilde{\varphi}/\partial r$ есть нормальная к волне скорость частицы, $\Gamma < 0$ и в (2) следует заменять $(n+1)\gamma/2$ на $-\Gamma a^0$, где a^0 — начальная скорость частицы в точке O, причем

$$a^0 = \frac{p_1}{b^2\rho_0}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{\nu^2}\right)\frac{1}{F(\nu^{-1})},\quad F(\nu^{-1}) = \left(2\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{4}{\nu^2}\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\nu^2}}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\nu}}$$

a — скорость продольных, b — скорость поперечных волн, $p_1 > 0$.

Впереди точечной волны BK имеет место точное нелинейное решение [2], получаемое методом характеристик

$$\mu_1 = \delta - \frac{Y^2}{2}, \quad \nu_1 = -\mu_1 Y \tag{4}$$

или для потенциала

$$\varphi_1 = \frac{\delta^2}{2} - \frac{1}{2}Y^2\delta + \frac{Y^4}{8} \tag{5}$$

Решение (4), (5) имеет место до нижней характеристики фиг. 1, где $Y = Y_0$, после которой имеется постоянный поток

$$\mu_1 = -1, \quad \nu_1 = Y, \quad \varphi_1 = -\delta + \frac{Y^2}{2} - \frac{1}{2} \tag{6}$$

Решения (4)-(6) имеют место впереди ударной волны KB, причем (5) имеет место для $0 > Y > Y_0$, а (6) – для $Y_0 > Y > -2$, где при $Y = Y_0$, $\mu_1 = -1$, $\varphi_1 = -\frac{1}{2}$.

Здесь для определенности выбрана граничная точка K, для которой $Y = -2$. Координаты точки B [2]

$$Y = 0, \quad \delta = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \varphi = 0 \tag{7}$$

Считая, что на ударной волне BK $Y < 0$, получим дифференциальные уравнения BK

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu - \mu_1}, \quad 0 > Y > Y_0 \tag{8}$$

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu + 1}, \quad Y_0 > Y > -2$$

На точечной волне BE фиг. 1 имеет место

$$\delta = 0, \quad \varphi = 0 \tag{9}$$

Формулируется граничная задача в области $KBEMK$ фиг.1, где введен дополнительный контур KME, на котором ставится условие перехода в частное точное решение уравнения (3), полученное в [2]

$$\delta = -\frac{1}{2}Y^2 \mathrm{tg}^2 \mu\pi + \mu + \frac{1}{2\pi}\sin 2\mu\pi \tag{10}$$

Поскольку решение этого уравнения для определения $\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial\delta}$ затруднительно, можно вместо него брать линейное решение [2]

$$\mu = \mu_0, \quad \mu_0 = -\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{-2\delta}}{Y}$$

$$\varphi = \varphi^0(\delta, Y), \quad \varphi^0 = -\frac{Y}{2\pi}\sqrt{-2\delta} - \frac{1}{2\pi}\left(2\delta - Y^2\right)\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{-2\delta}}{Y} \tag{11}$$

Используя (10), (5), (6), (8), можно получить асимптотические решения на ударной волне KB для малых Y:

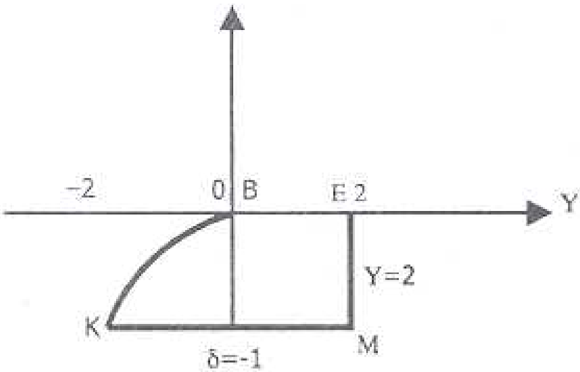
$$\delta=-\frac{1}{3}Y^2,\ \ \mu=-\frac{1}{6}Y^2,\ \ \mu_1=-\frac{5}{6}Y^2 \tag{12}$$

и для больших $-Y>0$:

$$\mu=-1+\frac{3}{\pi^2Y^2},\quad \delta=-1+\frac{3}{2\pi^2Y^2} \tag{13}$$

Уравнение вспомогательной дуги KE, на которой задается $\varphi=\varphi^0(\delta,Y)$ по (11), аппроксимируем в виде ломаной KME фиг.2:

для KM $\delta=-1,\ -2<Y<2$, для EM $Y=2,\ -1<\delta<0$ (14)



Фиг. 2

Решение (12) удовлетворяет с большой точностью условию на ударной волне BK вблизи точки B. Отсюда следует, что BK является ударной волной, что не согласуется с выводом работы [4], где решена аналогичная по математической постановке задача обтекания установившимся свехзвуковым потоком верха треугольного крыла, при этом расчет ведется не только вблизи B, но и во всей области возмущенного движения, причем утверждается, что расчеты показывают на отсутствие ударной волны KB вблизи B.

Вероятно, этот вывод получился в связи с тем, что там в нулевом приближении для KB бралась характеристика, на которой решение непрерывно, т.е. отсутствовала ударная волна.

Схема расчета задачи.

Запишем, следуя [4], [5], конечные разности для сетки $\delta=h_1i$, $Y=2+hk$, h – шаг, $i,k=1,2,3,...$

Тогда уравнение (3) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}\right)_{i,k}=\frac{1}{2h_1}\left(\varphi_{i+1,k}-\varphi_{i-1,k}\right) \tag{15}$$

$$\varphi_{ik} = \frac{\dfrac{h^2}{h_1^2}\left(\varphi_{i+1,k} + \varphi_{i-1,k}\right)\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \delta\right) + \dfrac{1}{2}\left(\varphi_{i,k+1} + \varphi_{i,k-1}\right) + \dfrac{h^2}{2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \delta}}{\dfrac{h^2}{h_1^2}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \delta} - \delta\right) + 1} \tag{16}$$

Решение задачи проводится методом итераций, когда в правую часть подставляется линейное решение (11) в качестве нулевого приближения. При этом учитываются в граничных узлах сетки условия (5), (11), которые имеют вид:

$\delta = 0,\ \ \varphi = 0$ на BE, $\ \delta = \delta^0(Y)$, $\ \varphi = \varphi_1$ из (5), (6) на KB,

$\varphi = \varphi^0(\delta, Y)$ на KME, даваемое (14) (17)

Для нулевого приближения уравнение ударной волны получается из (12), (13) в виде

$$\delta^0(Y) = -\frac{1}{3}Y^2 - \frac{1}{24}Y^3 \tag{18}$$

После указанных процедур мы получаем первое приближение $\varphi = \varphi^1(\delta, Y)$. По найденному φ^1 определяется вблизи ударной волны KB $\mu^1 = \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial \delta}$ по (15), и подставляя его в дифференциальные условия (8) и интегрируя их, начиная с точки $Y^0 = -0.2$, $\delta = -\dfrac{1}{3}\left(Y^0\right)^2$, можно получить уравнение KB в первом приближении $\delta = \delta^1(Y)$.

Далее берутся граничные условия (17) с заменой $\delta^0(Y)$ на $\delta^1(Y)$, подставляя в правую часть (16) $\varphi = \varphi^1(\delta, Y)$ с учетом (17), можно определить следующее приближение $\varphi = \varphi^2(\delta, Y)$. Потом в (8) заменяется μ^1 на $\mu^2 = \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial \delta}$ и интегрированием от точки $Y^0 = -0.2$ получается уравнение KB во втором приближении $\delta = \delta^2(Y)$ и т.д.

Расчет заканчивается, когда $\delta^{(n-1)}(Y) = \delta^n(Y)$, $\varphi^{(n-1)}(\delta, Y) = \varphi^n(\delta, Y)$ с нужной точностью. Поскольку $i, k = 1, 2, \ldots, 10$ шаг по Y $h = -0,4$, шаг по $\delta\, h_1 = -0,1$, для (8) шаг по $h = -0,2$.

В случае, когда нулевое приближение (18) приводит в некоторой итерации к мнимому уравнению ударной волны KB из (8), следует уравнения (8) отбросить и вместо них брать уравнение характеристики

KB [4], на которой решение непрерывно, т.е. $\mu = \mu_1$, причем из уравнения характеристики $\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2(\delta - \mu)}$ получится:

при $0 > Y > -1$, $\delta = -\frac{Y^2}{2}$, $\mu_1 = -Y^2$, $\mu = -Y^2$

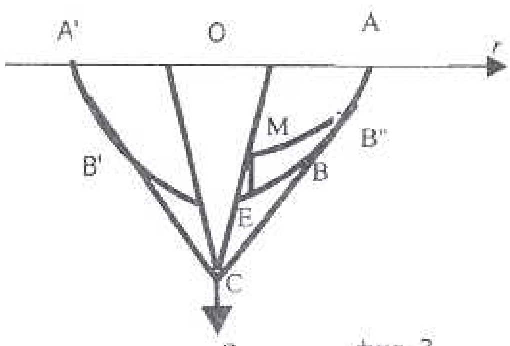
$$\text{при } Y_2 < Y < -1, \quad \mu_1 = -1, \quad \mu = -1, \quad \delta + 1 = \frac{1}{2}(Y+2)^2 \tag{18'}$$

причем $\varphi = \varphi_1$ дается (5), (6). При счете в качестве нулевого приближения во всем отрезке $[0, -2]$ для KB вместо (18) берется (18'), а в интервале от O до Y_2 равенства (18'), повидимому, имеют место для всех приближений [4].

Здесь $Y_2 < -1$ есть некоторая точка на KB, где решение на KB становится разрывным, расчет ударной волны KB в последующих приближениях ведется по формулам (8).

2. Движение узкого конуса в сжимаемой жидкости.

Картина движения в задаче проникания узкого конуса раствора 2β со сверхзвуковой скоростью V в сжимаемую жидкость, занимающую полупространство, дана фиг.3.



фиг. 3

Выберем ось Or по поверхности жидкости, ось Oz – вглубь.

Введем полярные координаты $r = r_1 \cos\varphi$, $z = r_1 \sin\varphi$. Методом замены в линейном решении [3], [6] характеристической координаты на нелинейную можно получить решение на ударной волне CB [2]

$$p = p', \quad \frac{p'}{\rho_0 a^2} = \frac{3}{2}(n+1)\beta^4 M^6 (M^2 - 1)^{-1}, \quad M = \frac{\mathrm{V}}{a} \tag{19}$$

Вводя в окрестности точки B фиг. 3 безразмерные переменные

$$\varphi - \varphi_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\gamma Y, \quad p = p'\mu, \quad \mathrm{v}_{r_1} = a\gamma\mu$$

$$r_1 = at + at\frac{n+1}{2}\gamma\delta, \quad \mathrm{v}_\varphi = a\sqrt{\frac{n+1}{2}}\gamma^{\frac{3}{2}}\nu, \quad \gamma = \frac{p'}{\rho_0 a^2} \tag{20}$$

где v_{r_1}, v_φ есть компоненты скорости частиц по r_1, φ, можно получить [2] линейное решение вблизи B позади точечной волны $BE\left(t-\frac{r_1}{a}>0\right)$

$$\mu = c\left(Y+\sqrt{Y^2-2\delta}\right),\ \ c=\frac{1}{\sqrt{12}} \tag{21}$$

Вводя потенциал ϕ по формуле $\mu=\frac{\partial\phi}{\partial\delta}$, интегрируя (21) при условии $\delta=0,\ \phi=0,$ можно получить в линейной задаче $\phi=\phi^0(\delta,Y)$, $\delta<0$,

$$\phi^0 = c\delta Y - c\left(Y^2-2\delta\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{3}+\frac{c}{3}|Y|^3 \tag{22}$$

В случае $\delta>0$, т.е. впереди волны BE линейное решение имеет вид [6], [2]

$$\mu = 2c\sqrt{Y^2-2\delta},\ \ v=-2c\sqrt{Y^2-2\delta}Y \tag{23}$$

Уравнения коротких волн в осесимметричном случае]6], [2]

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\delta}-\delta\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial\delta^2}+\frac{\partial\phi}{\partial\delta}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}=0 \tag{24}$$

Уравнение ударной волны BC вблизи точки B [1], [6]

$$\delta=\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{2} \tag{25}$$

Уравнение нелинейной параболической линии BE будет

$$\delta=\mu \tag{26}$$

Точка пересечения их B будет иметь координаты

$$Y_B=1,\ \ \mu_B=1,\ \ \delta_B=1 \tag{27}$$

Можно найти [1], [2] решение (24), которое для больших Y переходит в линейное (23), в виде $\delta>0$,

$$\delta=\frac{Y^2}{2}+2\mu_1-\frac{3}{2}\mu_1^2,\qquad v_1=-Y\mu_1,\qquad \mu_1=\frac{\partial\phi_1}{\partial\delta}$$

$$\phi_1=\frac{2}{3}\delta-\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{3}Y^2-\frac{2}{3}\delta\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{Y^2}{3}-\frac{8}{27} \tag{28}$$

где при определении ϕ_1 учтено, что на BC $\phi_1=0$.

На BC имеет место (25) и по (28) $\phi_1=0,\ \mu_1=1$, т.е. решение (28) удовлетворяет всем условиям на BC, и тем самым является точным.

Следует решать уравнение (24) методом конечных разностей в области $B''BEMB''$ фиг.3 с учетом граничных условий:

на $$BE \quad \mu_1 = \delta, \quad \delta = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}Y^2}, \quad \phi = \phi_1 \tag{29}$$

в точке B'' $Y = -2,\ \delta \approx 0$, в точке E $Y = 2,\ \delta \approx 1.5$, поэтому уравнение $B''E$ можно взять в виде ломаной $B''ME$

$$\text{для } B''M \ \delta = 0, \ -2 < Y < 2; \text{для } ME \ Y = 2, \ 0 < \delta < 1.5 \tag{30}$$

на которой ϕ берется в виде (22), на ударной волне BB''

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu}, \quad \phi = 0, \quad \mu = \frac{\partial \phi}{\partial \delta} \tag{31}$$

Как в задаче п.1 сначала задается ударная волна BB'' $\delta = \delta^0(Y)$, и из условий в точке $B: Y = 1,\ \delta = 1$ и в точке B'':

$Y = -2,\ \delta = 0$, можно взять

$$\delta^0(Y) = \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{18}(Y-1)^2 \tag{32}$$

и решается (16), где заменены φ на ϕ, $\frac{h^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \delta}$ на $h^2 \frac{\partial \phi}{\partial \delta}$ и в правую часть подставляется линейное решение (22) с учетом граничных условий (29)-(32). Таким образом, находится первое приближение $\phi^1(\delta, Y)$, далее из (31) находится ударная волна BB'' $\delta = \delta^1(Y)$ и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Машурян Г.М., Сафарян Ю.С. К расчету ударных волн в дифракционных задачах газодинамики и нелинейной динамической упругости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т. 56. №1. С.37-42.
2. Багдоев А.Г., Гургенян А.А. Приближенное решение ряда нелинейных задач. // Изв. АН Арм ССР. Механика. Т.XXI. №1. 1968. С.39-56.
3. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван: 1981. 303с.
4. Бабаев Д.А. Численное решение задачи обтекания верхней поверхности треугольного крыла. // Журнал выш. мат. и мат. физики. 1962. Т.2. №2. С.278-289.
5. Булах Б.М. Нелинейные конические течения газа. М.: Наука, 1970. 343с.
6. Багдоев А.Г. Движение конуса в сжимаемой жидкости // Докл. АН Арм ССР. Механика. 1967. T.XLV. №3. С.101-106.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
1.08.2003