ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №1, 2003 Механика

УДК 539.1

К РАСЧЕТУ УДАРНЫХ ВОЛН В ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ГАЗОДИНАМИКИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Багдоев А.Г., Машурян Г.М., Сафарян Ю.С.

Ա.Գ. Բաղդոև, Գ.Մ. Մաշուրյան, Յու.Ս. Սաֆարյան

Հարվածային ալիքների հաշվարկումը գազադինամիկայի և ոչ գծային դինամիկ առաձգական տեսության դիֆրակցիայի խնդիրներում

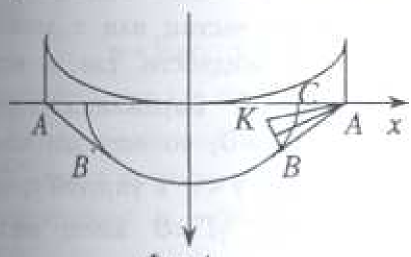
Դիտարկվում են հարվածային ալիքների հաշվարկման խնդիրները տարածվող և կետային ալիքների շոշափման կետի շրջակայքում հեղուկ և առաձգական ոչ գծային միջավայրերի համար: Հաշված է լուծումը այն դեպքի համար, երբ նշված ալիքները հարվածային են, երբ նրանք անընդհատ են և տեղի ունի կախված հարվածային ալիքը:

A.G. Bagdoev, G. M. Mashuryan, Ju. S. Safaryan

Calculation of shock waves in diffraction problems of gasodynamics and nonlinear dynamical elasticity

Рассматриваются задачи расчета ударных волн в окрестности точки касания распространяющейся волны и точечной волны для жидкой и упругой нелинейной среды. Сначала рассмотрен случай, когда распространяющиеся и точечные волны являются ударными. Получено нелинейное решение и рассчитана точечная ударная волна. Затем рассмотрен случай, когда распространяющиеся и точечные волны непрерывны и имеется висячая ударная волна. Получено нелинейное решение позади и впереди этой волны и рассчитано решение на ней.

Рассматривается задача определения нелинейного решения в окрестности точки B касания распространяющейся волны AB с точечной волной BB'. Эта задача возникает при распространении давления в глубь сжимаемой жидкости или упругого полупространства. В этих задачах предполагается, что скорость фронта давления по поверхности постоянна и больше скорости звука для жидкости, или скорости продольной волны теории упругости. Картина волн дается на фиг. 1.



Фиг. 1

Как показано в работах [1], [2] и [3], для случая жидкой, упругой и электромагнитной волн в безразмерных переменных задача приводится к системе уравнений

$$\frac{\partial\mu}{\partial\delta}(\mu-\delta)+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial\nu}{\partial\delta} \tag{1}$$

где μ и ν есть безразмерные радиальные и трансверсальные компоненты скорости частиц для жидкой и упругой сред, δ и y есть радиальные и угловые координаты относительно точечной волны BB'.

Линейное решение в окрестности точки B имеет вид [1], [2], [3].

$$\mu=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\delta}}{y} \tag{2}$$

$$\nu=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}(\mu\pi)-\mu\right)y \tag{3}$$

Соотношение (3) получено из линейного решения $\nu(\delta,y)$ исключением δ из (2) и предположено верным и в нелинейной задаче. Подставив (3) в (1) и интегрируя, можно найти нелинейное решение вблизи B [1]-[3]

$$\delta=-\frac{1}{2}y^2\operatorname{tg}^2(\mu\pi)+\mu+\frac{1}{2\pi}\sin(2\mu\pi)+B\sin^2(\mu\pi) \tag{4}$$

и (3). Постоянная B находится из сращивания (3), (4) с одномерным решением нелинейной задачи, причем [4] B равно 0. Как для жидкой, так и для упругой среды для малых значений параметра возмущения $\gamma=\frac{p_1}{\rho_0 a_0^2}$, где p_1 — максимальное давление на поверхности, ρ_0 — плотность, a_0 — скорость продольных жидких или упругих волн, можно получить формулу для нормальной скорости волны

$$c_n=a_0+\Gamma\cdot u \tag{5}$$

где u есть возмущенная нормальная скорость частиц или в данном случае радиальная скорость, $\Gamma=(n+1)/2$ для жидкости, где n есть показатель адиабаты, для упругой среды $\Gamma<0$ выражается через нелинейные упругие модули [2,4]. В случае $\gamma\Gamma>0$, то есть для волн сжатия $\gamma>0$ в жидкой среде или волн разрежения $\gamma<0$ в упругой среде имеет место ударная волна ABB', а в случае $\gamma\Gamma<0$ имеет место непрерывная волна ABB' разрежения в жидкости или сжатия в упругой среде, и имеется висячая ударная волна BC на фиг. 1. В случае $\gamma\Gamma>0$ уравнение ударной волны ABB' [1-3] имеет вид

$$\frac{d\delta}{dy}=-\sqrt{2\delta-\mu} \tag{6}$$

причем на ударной волне должно быть

$$\chi = 0, \quad \chi = \nu - \mu\sqrt{2\delta - \mu} \tag{7}$$

которое выражает равенство нулю касательной к волне скорости частицы в жидкой и упругой среде.

Подставляя (3) и (4) в (6) и(7), получим уравнение на ударной волне BB'

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{y\,\mathrm{tg}^2(\mu\pi) - \sqrt{-y^2\,\mathrm{tg}^2(\mu\pi) + \mu + \sin(2\mu\pi)/\pi + 2B\sin^2(\mu\pi)}}{-y^2\pi\,\mathrm{tg}(\mu\pi)\cos^{-2}(\mu\pi) + 1 + \cos(2\mu\pi) + B\pi\sin(2\mu\pi)} \tag{8}$$

где $B = 0$, которое следует решать при граничном условии в B $y = -1$, $\mu = 1$, получаемым решением уравнения ударной волны AB $\delta = (1 + y^2)/2$ [1-3] и уравнения BC $\delta = \mu$, $\mu = 1$. Кроме того, следует проверить малость χ, где по (7), (3), (4)

$$\chi = (\mathrm{tg}(\mu\pi)/\pi - \mu)y - \mu\sqrt{-y^2\,\mathrm{tg}^2(\mu\pi) + \mu + \sin(2\mu\pi)/\pi + 2B\sin^2(\mu\pi)} \tag{9}$$

Численный расчет уравнения (8) с шагом $\Delta y = 0.01$ приведен на фиг. 2, где даны графики функций $\mu(y)$ и $\chi(y)$. Как видно, функция $\chi(y)$ мала всюду. Как для жидкой, так и для упругой среды, обозначим через a^0 значение нормальной к волне скорости частиц на волне AB и введем безразмерный коэффициент $\gamma = a^0 / c_0$. Пусть нормальная скорость нелинейной волны имеет вид $c_n = c_0 + \Gamma u$, причем для жидкости $\Gamma > 0$ [1], а для упругой среды $\Gamma < 0$ [2]. В случае $\Gamma < 0, \gamma > 0$ или $\Gamma > 0, \gamma < 0$ имеется висячая ударная волна BC, причем получается $\overline{\Gamma} = -\Gamma$ или $\overline{\gamma} = -\gamma$, так что в обоих случаях $\overline{\Gamma}\gamma > 0$ или $\Gamma\overline{\gamma} > 0$ и положено $u = -\gamma\mu a_0$

$$\nu = -\gamma\sqrt{\overline{\Gamma}\gamma}t\nu', \ \theta - \theta_0 = \sqrt{\overline{\Gamma}\gamma}y, \ r - a_0 t = \overline{\Gamma}\gamma t\delta a_0 \tag{10}$$

или

$$u = \overline{\gamma}\mu a_0, \ \nu = \overline{\gamma}\sqrt{\Gamma\overline{\gamma}}t\nu' a_0, \ \theta - \theta_0 = \sqrt{\Gamma\overline{\gamma}}y, \ r - a_0 t = \Gamma\overline{\gamma}t\delta a_0 \tag{11}$$

соответственно для случаев $\Gamma < 0, \gamma > 0$ или $\Gamma > 0, \gamma < 0$.

Позади точечной волны с BB' решение имеет вид (3), (4), а впереди BC имеет место центрированная волна ABK, на каждой из характеристик которой $\mu_1 = \mathrm{const}$ и решение

$$\mu_1 = \delta - \frac{1}{2}y^2, \ \nu_1 = -\mu_1 y \tag{12}$$

Уравнение висячей ударной волны BC [1] – [3]

$$\frac{d\delta}{dy} = \pm\sqrt{2\delta - \mu - \mu_1} \tag{13}$$

что после подстановки в него (4) дает

$$\frac{d\mu}{dy}=\frac{y\,\mathrm{tg}^2(\mu\pi)\pm\sqrt{-y^2\,\mathrm{tg}^2(\mu\pi)/2+\sin(2\mu\pi)2\pi+B\sin^2(\mu\pi)+y^2/2}}{-\pi y^2\,\mathrm{tg}(\mu\pi)\cos^{-2}(\mu\pi)+1+\cos(2\mu\pi)+B\pi\sin(2\mu\pi)} \quad (14)$$

Безразмерная касательная составляющая скорости частиц к ВС непрерывна, т. е.

$$\kappa=0,\ \kappa=\nu-\nu_1\pm\sqrt{2\delta-\mu-\mu_1}(\mu-\mu_1) \quad (15)$$

Рассмотрим решение вблизи точки B, в основном порядке

$$\delta=2\mu,\ \nu=-y\mu^3\pi^2/3,\ \mu_1=2\mu-y^2/2$$
$$\mu=cy^2,\ c=-5/32,\ \nu_1=-y^3(2c-1/8) \quad (16)$$

считаем, что на BC $\mu<0,\ \delta<0$. Тогда знак приращения Δy будет ±. При этом

$\kappa=y^3\left(2c-\dfrac{1}{2}\right)\pm\left(-c+\dfrac{1}{2}\right)y^2|y|\sqrt{\dfrac{1}{2}+c}$ вблизи B. На начальном участке BC $\Delta y=y$. Пусть там $y>0$, тогда в силу (1) в κ будет нижний знак. При этом около B будет $\kappa=-y^3 1{,}2$, то есть κ мала. Тот же вывод будет при $y<0$, когда берется верхний знак.

Уравнение (14) следует решать при условиях $y=0,\mu=0$. Возможны следующие варианты: а) около B $\Delta y>0$ и в (14) берется нижний знак, для некоторого $y=y_1$, где y_1 мало, радикал в (14) обращается в нуль и далее следует при $y<y_1$ брать $\Delta y<0$ и верхний знак в (6); б) около B $\Delta y<0$ и в (14) берется верхний знак, для некоторого $y=y_2$ радикал в (14) обращается в нуль и далее следует брать $\Delta y>0$ и нижний знак в (14).

Кроме того, следует согласно (15) считать

$$\kappa=y\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{tg}(\mu\pi)-\mu\right)+y\left(-\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2(\mu\pi)y^2+\mu+\frac{1}{2\pi}\sin(2\mu\pi)\right)\pm$$
$$\pm\left(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2(\mu\pi)y^2-\frac{1}{2\pi}\sin(2\mu\pi)\right)\sqrt{\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2(\mu\pi)y^2+\frac{1}{2\pi}\sin(2\mu\pi)} \quad (17)$$

Результаты расчетов приведены на фиг. 3 для варианта а). При этом, кроме малой окрестности точки $\mu=-0.13,\ y=0$, получаются лучшие значения решения с точки зрения удовлетворения условия $\kappa=0$ на BC в случае $B=0$. Поскольку при некотором $\mu=-0.13,\ y(\mu_3)=1.1,\ \mu_1=-1$, далее следует считать ударную волну BC, учитывая, что впереди BC

имеется постоянное течение $\mu_1 = -1, \nu_1 = y$: Тогда уравнение на ударной волне BC будет

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{y\,\mathrm{tg}^2\,\mu\pi \pm \zeta'}{-\pi\,\mathrm{tg}\,\mu\pi y^2 \cos^{-2}\mu\pi + 1 + \cos 2\mu\pi + B\pi \sin 2\mu\pi} \tag{18}$$

$$\zeta' = \sqrt{-\mathrm{tg}^2\,\mu\pi y^2 + \mu + \frac{1}{\pi}\sin 2\mu\pi + 1 + 2B\sin^2\mu\pi}$$

которое решается при указанном условии $y(\mu_3) = y_3$ для $\mu < \mu_3$.

Кроме того, следует для $\mu < \mu_3$ рассчитать функцию

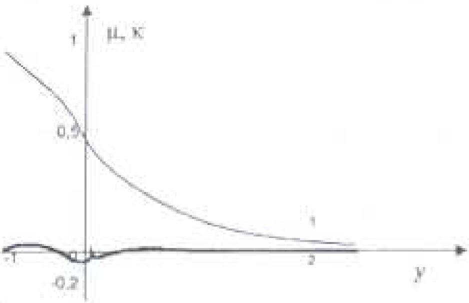
$$\mathrm{K} = \frac{y}{\pi}\mathrm{tg}\,\mu\pi - \mu y - y \pm \zeta'(\mu + 1) \tag{19}$$

где в (18) и (19) берется верхний знак. Полный расчет кривых $y(\mu), \kappa(\mu)$ дан на фиг. 3. При этом, как видно из фиг. 3, условие $\kappa = 0$ удовлетворяется на BC почти всюду и в случае а) лучше, чем в случае б). Поэтому в качестве окончательного решения на ударной волне BC берем случай а) и фиг. 3. Вдали от точки B для больших $|y|$ имеет место одномерное по δ решение, причем на ударной волне BC $\frac{d\delta}{dy} = 0$, $2\delta - \mu - \mu_1 = 0$, впереди BC берем вместо (12) постоянное течение $\mu_1 = -1$ и имеет место на BC

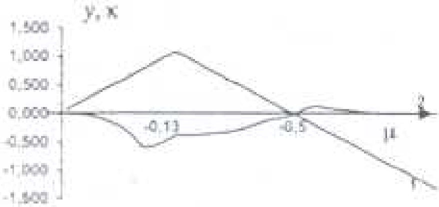
$$\mu = -1 + \frac{3}{\pi^2 y^2}, \quad \delta = -1 + \frac{3}{2\pi^2 y^2} \tag{20}$$

Таким образом, получено решение на висячей ударной волне BC, удовлетворяющее, как это принято в теории коротких волн в газодинамике [1], [7], условию непрерывности касательной к BC составляющей скорости частицы приближенно, интегрально. Это решение описывает ударную волну сжатия $(\gamma > 0)$ для упругой среды $(\Gamma < 0)$ или разрежения $(\gamma < 0)$ для жидкой среды $(\Gamma > 0)$.

Следует отметить, что график $y(\mu)$ на фиг. 3 согласуется качественно с экспериментальной кривой работы [8], относящейся к аналогичной по математической постановке задачи обтекания установившимся сверхзвуковым потоком газа верха треугольного крыла.



Фиг. 2. (1-μ(y), 2-κ(y))



Фиг. 3. (1-y(μ), 2-κ(μ))

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Гургенян А.А. Приближенное решение ряда нелинейных задач определения ударных волн в сжимаемой жидкости. // Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1968. Т. 21. №10. С. 39-56.
2. Сафарян Ю.С. Решение нелинейной дифракционной задачи для неоднородной упругой среды. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55, №1. С. 23-31.
3. Bagdoev A.G., Sahakyan S.G. "Solution of non-linear diffraction problem for inhomogeneous electrodinamic media. // Information technologies and management. 2001. №2. P. 10-16.
4. Зарембо Л.К, Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
5. Zahalak G. J., Myers M. K. Conical flow near singular rays. // Journ. Fluid Mechanics. 1974, Vol 64. №3. P. 537-561.
6. Багдоев А.Г., Даноян З.Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке // Журнал вычис. матем. и математ. физики. 1972. Т. 12. №6. С.1512-1529.
7. Рыжов О.С., Христианович С.А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. 1958. Т.22. №5. С.586-599.
8. Булах Б.Н. Нелинейные конические течения газа. М.: Наука. 1970. 343с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.03.2003