ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №1, 2003 Механика

УДК 539.3

ДВЕ ЗАДАЧИ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա. Մովսիսյան
Խառը եզրային պայմաններով գլանային թաղանթի կայունության երկու խնդիր արտաքին ճնշման դեպքում

Դիտարկվում է գլանային թաղանթի կայունությունն արտաքին ճնշման դեպքում, երբ եզրերից մեկում տրված են խառը պայմաններ: Ուսումնասիրված է երկու դեպք: Կրիտիկական ճնշման արժեքները որոշվում են հանրահաշվական անվերջ համակարգերի լուծելիության պայմանից: Բերված է թվային արդյունքներ:

L.A.Movsisyan
Two problems of stability for cylindrical shell with mixed boundary conditions under external pressure

Исследуется устойчивость круговой цилиндрической оболочки под внешним давлением, когда на одном торце заданы смешанные граничные условия. Рассматриваются две такие задачи.

То, что изменение тангенциальных граничных условий (соответствующие плоской задаче, а не изгибу) оказывает существенное влияние на значения критических параметров потери устойчивости для цилиндрических оболочек при внешнем давлении, было получено в [1,2], а для осевого сжатия – в [3].

В работе [4] была изучена устойчивость круговой цилиндрической оболочки под внешним равномерным давлением, когда на ее торцах заданы смешанные граничные условия – заделка и свободное опирание, симметричные относительно срединного сечения.

В данной статье рассматривается устойчивость оболочки под внешним давлением для двух вариантов граничных условий. В обоих случаях один торец свободно оперт, а на другом заданы смешанные условия относительно усилий и перемещений. Исследование ведется на основании полубезмоментной теории оболочек [1,2,4].

1.На основании полубезмоментной теории уравнение устойчивости оболочки под равномерным внешним q в безразмерных координатах через потенциальную функцию записывается

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+A\frac{\partial^8\Phi}{\partial\varphi^8}+Bq\frac{\partial^6\Phi}{\partial\varphi^6}=0$$

$$A=\frac{h^2l^4}{12(1-\nu^2)R^6},\qquad \mathrm{B}=\frac{l^4}{EhR^3} \tag{1.1}$$

Тангенциальные величины, относительно которых ставятся граничные условия, через функцию Φ выражаются следующим образом:

$$u=-\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial\varphi^2},\qquad \mathrm{v}=\frac{\partial^3\Phi}{\partial\varphi^3} \tag{1.2}$$

$$T_1=-\frac{Eh}{R}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial\varphi^2},\quad S=\frac{Eh}{R}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial\varphi}$$

Решение (1.1) будем искать в виде

$$\Phi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\Phi_n^{(1)}\cos n\varphi+\Phi_n^{(2)}\sin n\varphi\right) \tag{1.3}$$

В зависимости от величины q для $\Phi_n^{(i)}$ будем иметь

$$\frac{d^4\Phi_n^{(i)}}{dx^4}-\lambda_n^4\Phi_n^{(i)}=0,\qquad n=1,2,\ldots,n_0 \tag{1.4}$$

$$\frac{d^4\Phi_n^{(i)}}{dx^4}+4\mu_n^4\Phi_n^{(i)}=0,\qquad n>n_0$$

Здесь $\lambda_n^4=n^6\left(Q\delta-An^2\right)$, $\mu_n^4=-\lambda_n^4$, $Q=\dfrac{l^4q_0}{EhR^3}$, $\delta=\dfrac{q}{q_0}$, $Q\delta-An_0^2>0$,

q_0 – критическое давление для случая, когда на торцах оболочки заданы условия свободного опирания: $T_1=\mathrm{v}=0$ при $x=0$ и $x=1$

$$q_0=\frac{\pi\sqrt{6}}{9(1-\nu^2)^{3/4}}E\frac{R}{l}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \tag{1.5}$$

при этом количество волн определяется

$$n_{kp}=\sqrt[8]{36(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{\pi R}{l}}\sqrt[4]{\frac{R}{h}}$$

Решениями уравнений (1.4) будут

$$\Phi_n^{(i)}=A_n^{(i)}\sin\lambda_nx+B_n^{(i)}\cos\lambda_nx+C_n^{(i)}\operatorname{sh}\lambda_nx+D_n^{(i)}\operatorname{ch}\lambda_nx,\quad n\le n_0$$

$$\Phi_n^{(i)}=A_n^{(i)}\sin\mu_nx\operatorname{ch}\mu_nx+B_n^{(i)}\sin\mu_nxs\operatorname{sh}\mu_nx+C_n^{(i)}\cos\mu_nx\operatorname{ch}\mu_nx+ \tag{1.6}$$

$$+D_n^{(i)}\cos\mu_nx\operatorname{sh}\mu_nx;\qquad n>n_0$$

Решение, соответствующее $n=0$, не записывается, так как оно при определении критических параметров роли не сыграет.

Постоянные интегрирования должны быть определены после удовлетворения граничным условиям.

2. Рассмотрим такой случай. На одном конце оболочка свободно оперта

$$T_1 = v = 0 \quad \text{при } x = 0 \tag{2.1}$$

а на $x = 1$ заданы смешанные условия:

$$v = 0 \quad \text{при } -\pi \le \varphi \le \pi \tag{2.2}$$

$$u = 0 \quad \text{при } |\varphi| \le \varphi_0$$

$$T_1 = 0 \quad \text{при } |\varphi| \le \pi - \varphi_0 \tag{2.3}$$

Случай $\varphi_0 = 0$ соответствует условиям свободного опирания и при этом $\delta = 1$, а $\varphi_0 = \pi$ – защемлению и при этом $\delta = 1.25$ [2].

По (1.2) и (1.6), вычисляя соответствующие величины и удовлетворяя условиям (2.1), получим

$$B_n^{(i)} = D_n^{(i)} = 0$$

а условие (2.2) дает

$$\begin{aligned} C_n^{(i)} &= -A_n^{(i)} \frac{\sin\lambda_n}{\operatorname{sh}\lambda_n}, \quad n \le n_0 \\ C_n^{(i)} &= -A_n^{(i)} \operatorname{tg}\mu_n \operatorname{cth}\mu_n, \quad n > n_0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Смешанные условия дают

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(i)} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} = 0 \qquad |\varphi| \le \pi - \varphi_0 \\ &\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n^{(i)} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} = 0 \qquad |\varphi| \le \varphi_0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$X_n^{(i)} = \begin{cases} -n^2\lambda_n^2 \sin\lambda_n A_n^{(i)}, & n \le n_0 \\ n^2\mu_n^2 \dfrac{\sin^2\mu_n + \operatorname{sh}^2\mu_n}{\cos\mu_n \operatorname{sh}\mu_n}, & n > n_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{\lambda_n}\left(\operatorname{cth}\lambda_n - \operatorname{ctg}\lambda_n\right), & n \le n_0 \\ \dfrac{n^2}{\mu_n} \dfrac{\sin 2\mu_n - \sin 2\mu_n}{\operatorname{ch} 2\mu_n - \cos 2\mu_n}, & n > n_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Система (2.5) сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений [4]

$$X_m^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}^{(i)} X_n^{(i)}, \quad (i = 1,2) \tag{2.8}$$

$$c_{mn}^{(i)} = b_{mn}^{(i)}(1 - a_n)$$

$$b_{mn}^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left(\varphi_0 \pm \dfrac{1}{2m}\sin 2m\varphi_0\right), & m = n \\ \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\sin(m-n)\varphi_0}{m-n} \pm \dfrac{\sin(m+n)\varphi_0}{m+n}\right], & m \neq n \end{cases} \tag{2.9}$$

В последнем выражении верхний знак относится к $i = 1$, а нижний – к $i = 2$.

Итак, критическое давление определяется из условия разрешимости системы (2.8) – условие равенства нулю определителя.

3. Теперь рассмотрим случай, когда на конце $x = 0$ условия такие же, как в (2.1), но на $x = 1$ заданы

$$u = 0 \text{ при } -\pi \le \varphi \le \pi \tag{3.1}$$

$$\text{v} = 0 \text{ при } |\varphi| \le \varphi_0$$

$$S = 0 \text{ при } |\varphi| < \pi - \varphi_0 \tag{3.2}$$

В этом случае при $\varphi_0 = 0 \quad \delta = 0.5$, а при $\varphi_0 = \pi \quad \delta = 1.25$.

Здесь из условия (3.1) будем иметь

$$C_n^{(i)} = -A_n^{(i)} \frac{\cos\lambda_n}{\operatorname{ch}\lambda_n}, \quad n \le n_0 \tag{3.3}$$

$$C_n^{(i)} = -A_n^{(i)} \frac{\cos\mu_n \operatorname{ch}\mu_n + \sin\mu_n \operatorname{sh}\mu_n}{\cos\mu_n \operatorname{ch}\mu_n - \sin\mu_n \operatorname{sh}\mu_n}, \quad n > n_0$$

Бесконечная система будет такая же, как (2.8), только с новыми a_n –

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n^4}{\lambda_n^3}(\operatorname{th}\lambda_n - \operatorname{tg}\lambda_n), & n \le n_0 \\ \dfrac{n^4}{2\mu_n^3} \dfrac{\sin 2\mu_n - \operatorname{sh} 2\mu_n}{\cos 2\mu_n + \operatorname{ch} 2\mu_n}, & n > n_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

4. Для конкретных геометрических данных оболочки для обеих задач был проведен числовой эксперимент. Данные приведены в таблицах: первая соответствует первой задаче, а вторая – второй. В первом столбце помещены относительные критические значения $\delta_{кр}$ для различных $\alpha = R/h \ (\alpha_1 = 500, \alpha_2 = 600, \alpha_3 = 700)$ и $\beta = l/R$

$(\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2,\ \beta_3 = 3)$. В соответствующих клетках помещены значения φ_0 (в градусах), при которых достигается данное значение $\delta_{кр}$.

Таблица 1

$\delta_{кр}$	β_1			β_2			β_3		
	α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3
1.05	3	53	58	11	13	106	2	71	73
1.10	41	97	100	57	60	139	22	119	121
1.15	72	120	122	90	94	155	49	142	143
1.20	96	133	135	109	113	162	75	151	153
1.25	113	146	149	127	133	179	87	170	177

Таблица 2

$\delta_{кр}$	β_1			β_2			β_3		
	α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3
0.60	20	29	35	4	23	35	33	51	67
0.70	26	44	50	7	47	61	43	90	104
0.80	34	55	65	35	49	86	47	102	113
0.90	41	56	78	36	78	119	65	112	142
1.00	50	70	84	74	80	143	83	137	166
1.10	70	76	89	104	115	147	97	139	181
1.20	70	88	107	108	147	154	110	156	181

Сходимость процессов при определении $\delta_{кр}$ обеспечивалась численно – из бесконечного детерминанта сначала брался конечный $(m = 10)$, а потом, увеличивая порядок, добивались желаемой точности.

Сходимость процесса можно доказать и аналитически. Для этого надо доказать, что [5]

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |c_{mn}| < c = \text{const} \tag{4.1}$$

Возьмем для примера случай (2.7). Если принять

$$X_m = mY_m \tag{4.2}$$

то на основании (2.8) и (2.9) получим

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n}{m} |(1 - a_n) b_{mn}| \tag{4.3}$$

Сначала произведем суммирование по m

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} |b_{mn}| < c_1 \frac{\ln n}{n} \quad (c_1 = \text{const}) \tag{4.4}$$

далее для $n > n_0$

$$1-a_n<\left[1-\frac{n^2}{\mu_n^2}\left(1-c_2e^{-2\mu_n}\right)\right],\quad c_2<\frac{3}{1-e^{-3/2}} \tag{4.5}$$

Учитывая все вышеприведенное, найдем

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|c_{mn}\right|<\sum_{n=1}^{n_0}c_1\ln n\left[1-\frac{n^2}{\lambda_n}\left(\operatorname{cth}\lambda_n-\operatorname{ctg}\lambda_n\right)\right]+$$
$$+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}c_1\ln n\left(\frac{a}{n^2}+c_2e^{-2\mu_n}\right)<c \tag{4.6}$$

Из приведенных числовых данных можно сделать некоторые выводы.

1.Чем тоньше оболочка, для достижения одного и того же относительного критического давления угол защемленности должен быть большим. Этого нельзя сказать относительно изменения длины.

2.Сильное изменение критического $\delta_{кр}$ происходит при малых углах защемленности $(\varphi_0<\pi/2)$.

Числовые данные получены Г. Нерсисяном, за что приношу благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саченков А.В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольных краевых условиях под действием равномерного поперечного давления //Изв.Казан.филиала АН СССР. Сер.физ.-мат. наук. 1958. №12. С.127-132.
2. Алфутов Н.А. О зависимости значения верхнего критического давления цилиндрической оболочки от граничных условий для касательных составляющих перемещений. Теория оболочек и пластин. Ереван: Изд.АН Арм.ССР. 1964. С.193-198.
3. Хофф Н. Низкие критические напряжения для круговой цилиндрической оболочки конечной длины, находящейся под действием осевого сжатия./Тр. амер. о-ва инж.-механиков //ПМ. 1965. Т.32. №3. С.60-69.
4. Мовсисян Л.А. Об устойчивости цилиндрической оболочки со смешанными граничными условиями //ПМ. 1978. Т.14. №10. С.52-57.
5. Канторович Л.В. и Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
4.12.2002