ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №1, 2003 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Геворкян Г.З

Գ.Զ. Գևորգյան

Փոփոխական հաստության ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալերի լայնական տատանումների սեփական հաճախությունների որոշման խնդիրը ընդլայնական սահքերի և պտտման իներցիայի հաշվառմամբ

Դիտարկվում է սալերի ազատ լայնական տատանումների խնդիրը , երբ հաշվի են առնվում ընդլայնական սահքերը և պտտման իներցիան: Սեփական հաճախությունների մոտավոր որոշման համար օգտագործված է Ռիտցի մեթոդը: Որոշված են փոփոխական հաստության ուղղանկյուն սալերի ազատ տատանումների առաջին հաճախությունները՝ եզրերի հոդակապորեն հենման դեպքում: Կատարվել է ստացված արդյունքների վերլուծություն:

G.Z. Gevorgyan

On Determination of Frequences of Free Transversal Vibrations of Rectangular Orthotropic Plates of Variable Thickness with taking into Account the Transversal Shears and Inertia of Rotation

Рассматривается задача свободных поперечных колебаний пластин при учете поперечных сдвигов и инерции вращения. Для определения собственных частот пластины применяется метод Ритца. Определены первые частоты свободных поперечных колебаний шарнирно опертой пластины линейно-переменной толщины.

1. В работе [3] на основе теории [2] получены разрешающие уравнения задачи свободных поперечных колебаний ортотропных прямоугольных пластин переменной толщины, учитывающие влияние как деформаций поперечных сдвигов, так и инерции вращения.

Система разрешающих уравнений задачи определения частот поперечных колебаний пластины, толщина которой от планарных координат зависит линейно, в безразмерном виде будет:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\frac{1}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\frac{2}{H}\left(\gamma_1\varphi+\gamma_2\psi\right)+$$

$$+\frac{s\Omega^2}{8}\left\{12f+H\left[\left(k_1 s\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}-k_2\chi\varphi\right)s\gamma_1+\left(k_1\frac{s}{m}\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}-k_2\beta\chi\psi\right)s\gamma_2\right]\right\}\equiv L_1\left(f,\varphi,\psi\right)=0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^3}+\frac{\alpha_{12}+2\alpha_{66}}{m^2}\frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}^2}+\frac{2}{H}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\alpha_{12}}{m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2}\right)\gamma_1+2\frac{\alpha_{66}\gamma_2}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}}\right]-$$

$$-\frac{\chi}{s}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\alpha_{66}}{m^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{y}^2}+\frac{\beta}{m}\left(\alpha_{12}+\alpha_{66}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}}\right]-\frac{2\chi}{Hs}\left[\gamma_1\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}+\alpha_{66}\frac{\gamma_2}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}}+\right.$$

$$\left.+\beta\left(\alpha_{12}\frac{\gamma_1}{m}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}+\alpha_{66}\gamma_2\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}}\right)\right]+\frac{8}{H^2 s^3}\varphi+\frac{\Omega^2}{s}\left(k_1 s\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}-k_2\chi\varphi\right)\equiv L_2(f,\varphi,\psi)=0$$

$$\frac{\alpha_{22}}{m^3}\frac{\partial^3 f}{\partial \bar{y}^3}+\frac{\alpha_{12}+2\alpha_{66}}{m}\frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^2\partial \bar{y}}+\frac{2}{H}\left[\left(\alpha_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\alpha_{22}}{m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2}\right)\gamma_2+2\frac{\alpha_{66}\gamma_1}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}}\right]- \qquad (1)$$

$$-\frac{\chi}{s}\left[\beta\left(\frac{\alpha_{22}}{m^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2}+\alpha_{66}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}^2}\right)+\frac{\alpha_{12}+\alpha_{66}}{m}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}}\right]-\frac{2\chi}{Hs}\left[\alpha_{12}\gamma_2\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}+\alpha_{66}\frac{\gamma_1}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}}+\right.$$

$$\left.+\beta\left(\alpha_{22}\frac{\gamma_2}{m}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}+\alpha_{66}\gamma_1\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}}\right)\right]+\frac{8}{H^2 s^3}\psi+\frac{\Omega^2}{s}\left(k_1\frac{s}{m}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}-k_2\beta\chi\psi\right)\equiv L_3(f,\varphi,\psi)=0$$

где приняты обозначения

$$x=a\bar{x},\ y=b\bar{y}=ma\bar{y},\ (b=ma),\ h=h_0H,\ B_{ij}=\alpha_{ij}B_{11},\ a_{44}=\beta a_{55}$$

$$a_{55}B_{11}=\chi,\ \omega^2=B_{11}\Omega^2/\rho a^2,\ w=h_0 f\cos\omega t,\ \varphi_1=B_{11}\varphi\cos\omega t \qquad (2)$$

$$\psi_1=B_{11}\psi\cos\omega t,\ s=h_0/a,\ \gamma_1=h_1/s,\ \gamma_2=h_2/s,\ H=1+\gamma_1\bar{x}+\gamma_2 m\bar{y}$$

a и b – длины сторон пластины, h – толщина, w – прогиб, φ_1 и ψ_1 – функции, характеризующие распределение поперечных сдвигов, ρ – плотность, a_{ij}, B_{ij} – общепринятые обозначения упругих характеристик материала [1], ω – круговая частота, t – время. При $k_1=1$ учитывается инерция вращения, обусловленная классическим изгибом пластинки, а при $k_1=0$ – пренебрегается. Аналогично, при учете инерции вращения от сдвиговых деформаций, следует положить $k_2=1$, а в случае ее пренебрежения – $k_2=0$.

Граничные условия для ортотропной пластины линейно-переменной толщины при шарнирном опираний ее кромок, берем в виде:

$$\text{при } x=0,1\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-a_{55}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0\ (M_x=0)\ \ \psi=0\ \ (u_y=0),\ f=0\ \ (w=0)$$

$$\text{при } y=0,1\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-a_{44}\frac{\partial \psi}{\partial y}=0\ \ (M_y=0)\ \ \varphi=0\ \ (u_x=0),\ f=0\ (w=0) \qquad (3)$$

Решение системы уравнений (1) с граничными условиями (3) ищем в виде рядов:

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}A_{ij}f_{ij}(\overline{x},\overline{y}),\ \varphi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}B_{ij}\varphi_{ij}(\overline{x},\overline{y}),\ \psi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}C_{ij}\psi_{ij}(\overline{x},\overline{y}) \qquad (4)$$

$$f_{ij}=\sin i\pi x\sin j\pi y,\quad \varphi_{ij}=\cos i\pi x\sin j\pi y,\ \psi_{ij}=\sin i\pi x\cos j\pi y$$

Здесь A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} – произвольные постоянные.

Функции (4) удовлетворяют граничным условиям (3), но не удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1). Следуя методу Ритца, приравним нулю работу фиктивных нагрузок и перерезывающих сил на соответствующих виртуальных прогибах и деформациях:

$$\int_0^1\int_0^1 L_1(f,\varphi,\psi)f_{ij}d\overline{x}d\overline{y}=0,\qquad \int_0^1\int_0^1 L_2(f,\varphi,\psi)\varphi_{ij}d\overline{x}d\overline{y}=0$$
$$\int_0^1\int_0^1 L_3(f,\varphi,\psi)\psi_{ij}d\overline{x}d\overline{y}=0,\quad i=1,2,..n,\quad j=1,2,..k \qquad (5)$$

Уравнения (5) образуют систему однородных алгебраических линейных уравнений относительно A_{ij}, B_{ij} и C_{ij}. Значения собственных частот поперечных колебаний пластины можно определить из условия равенства нулю ее определителя. Нетрудно заметить, что учет влияния инерции вращения от сдвиговых деформаций $(k_2=1)$ повышает степень частотного уравнения. Это приводит к появлению двух новых частот собственных колебаний пластины для каждой пары n и k. Обозначим их Ω_{nk}^{l} $(l=1,2,3)$. Исследование отношений B_{ij}/A_{ij}, C_{ij}/A_{ij} коэффициентов рядов (4) при найденных частотах позволяет судить о характере колебаний для данной частоты.

Во всех таблицах принято $\beta=1,\ \alpha_{12}=1/3,\ \alpha_{22}=1,\ \alpha_{66}=3/8,\ s=0.1.$ $\chi=3$ соответствует изотропному материалу. В табл. 1 приведены значения первой безразмерной частоты Ω_{11}^{1} при $n=k=1$ $m=1,\ k_1=0,\ k_2=0$ для различных значений γ_1, γ_2 и χ.

Таблица1

γ_1,γ_2	χ			
	0	3	5	10
0, 0	0.5816	0.5604	0.5475	0.5187
1, 0	0.8857	0.8157	0.7777	0.7010
1, 1	1.183	1.030	0.9559	0.8236

В табл. 2 приведены значения Ω_{11}^{l} $(l=1,2,3)$ при $n=k=1,\ \gamma_1=1,\ \gamma_2=0{,}5,\ m=2,\ k_1=k_2=1$ для различных значений χ.

В скобках приведены значения Ω_{11}^{1}, когда не учитывается инерция вращения, т.е. $k_1 = k_2 = 0$. В табл. 3 приведены значения $\Omega_{11}^{l}\ (l = 1,2,3)$ при $n = k = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \chi = 3$, $k_1 = k_2 = 1$ для различных значений m. В табл. 4 приведены значения $\Omega_{11}^{l}\ (l = 1,2,3)$ при $n = k = 1, \gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0, \chi = 3$, $k_1 = k_2 = 1$ для различных значений m.

Под каждым значением Ω_{11}^{1} приведены значения отношений $B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}$ для данной частоты.

Таблица 2

	l	1		2		3	
$\chi = 0$	Ω_{11}^{l}	0.7169 (0.7318)		–		–	
$\chi = 3$	Ω_{11}^{l}	0.6597 (0.6693)		8.262		8.874	
	$B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}$	0.0164	0.0087	42.63	-78.58	3.048	1.648
$\chi = 5$	Ω_{11}^{l}	0.6281 (0.6356)		6.532		7.220	
	$B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}$	0.0149	0.0079	24.16	-44.13	2.020	1.102
$\chi = 10$	Ω_{11}^{l}	0.5652 (0.5694)		4.844		5.674	
	$B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}$	0.012	0.0064	12.32	-22.33	1.256	0.6904

Таблица 3

	l	1		2		3	
m=1	Ω_{11}^{l}	0.5564 (0.5603)		16.53		17.07	
	$B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}$	0.0074	0.0074	1.6×10^{-14}	1.6×10^{-14}	6.954	6.954
m=2	Ω_{11}^{l}	0.3509 (0.3526)		16.46		16.79	
	$B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}$	0.0046	0.0024	240.8	-455.7	10.65	5.624
m=5	Ω_{11}^{l}	0.2905 (0.2916)		16.45		16.71	
	$B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}$	0.00386	0.00083	55.33	-712.1	12.77	2.784
m=10	Ω_{11}^{l}	0.2816 (0.2827)		16.44		16.70	
	$B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}$	0.0037	0.0004	145.9	-1330.1	13.16	1.443
m=100	Ω_{11}^{l}	0.2787 (0.2798)		16.44		16.69	
	$B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}$	0.0037	0.00004	142.9	-13001.6	13.30	0.146
$m=10^3$	Ω_{11}^{l}	0.2787 (0.2798)		16.44		16.69	
	$B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}$	0.0037	4×10^{-6}	142.9	-129986	13.30	0.0146

Данные таблиц приводят к следующим заключениям:

1. Учет инерции вращения приводит к незначительному (меньше 3%) уменьшению первой (основной) частоты.

2. Для первой частоты коэффициент при w на два порядка выше, чем при φ, ψ, т. е. основная форма колебаний поперечная.
3. Для второй частоты основная форма колебаний сдвиговая.
4. Для третьей частоты амплитуды поперечных и сдвиговых форм колебаний имеют одинаковый порядок.
5. Две новые частоты $(l = 2,3)$, появившиеся в результате учета инерции вращения от сдвиговых деформаций $(k_2 = 1)$, на порядок превосходят первую частоту пластины.

Таблица 4

	l	1		2		3	
m=1	Ω_{11}^l	0.8049 (0.8157)		10.97		11.78	
	B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}	0.0154	0.0155	26.63	-19.68	2.842	3.933
m=2	Ω_{11}^l	0.5154 (0.5202)		10.93		11.33	
	B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}	0.010	0.0053	13.51	-14.40	4.282	4.101
m=5	Ω_{11}^l	0.4274 (0.4309)		10.96		11.15	
	B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}	0.0083	0.0018	9.688	-17.56	5.570	3.135
m=10	Ω_{11}^l	0.4144 (0.4178)		10.98		11.12	
	B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}	0.0081	0.0009	8.936	-27.78	5.979	1.963
m=100	Ω_{11}^l	0.4101 (0.4134)		10.98		11.10	
	B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}	0.0080	0.00009	8.638	-248.5	6.166	0.2187
$m=10^3$	Ω_{11}^l	0.4101 (0.4134)		10.98		11.10	
	B_{11}/A_{11}, C_{11}/A_{11}	0.00808	9×10^{-6}	8.635	-2481	6.168	0.0219

При $m \to \infty$ третье уравнение системы (1) отделяется. Оно относится только к ψ и его корень соответствует второй частоте $(l = 2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. "Гитутюн" НАН РА, 2000. 122с.
3. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов и инерции вращения.//В сб.: посв. 80-летию акад. НАН Армении С.А. Амбарцумяна.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.12.2002