ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №1, 2003 Механика

УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Вирабян Е.Г., Геворкян Р.С.

Ե.Գ. Վիրաբյան, Ռ.Ս. Գևորգյան
Շրջանային օղակաձև սալի հարկադրական տատանումները

Առաձգականության տեսության դինամիկական հավասարումների ասիմպտոտիկական ինտեգրման միջոցով ստացվել են սեղմելի և անսեղմելի նյութերից պատրաստված սալերի լարումների տենզորի և տեղափոխումների վեկտորների բաղադրիչները որոշելու համար ռեկուրենտ բանաձևեր, երբ նրանց երեսնային մակերևույթների վրա տրված են առաձգականության տեսության դինամիկական խնդրի եզրային պայմաններ: Արտածված են հարկադրական տատանումների ամպլիտուդները հաշվելու բանաձևեր և համասեռ կինեմատիկական ու խառը եզրային պայմանների դեպքում հաստատված են ռեզոնանս առաջացնող սալի սեփական տատանումների հաճախությունների գլխավոր արժեքները: Ապացուցված է սեղմելի նյութից պատրաստված սալում երկու տեսակի ալիքների առկայությունը և ի հայտ է բերված անսեղմելի նյութից պատրաստված սալի առանձնահատկությունները:

Ye.G. Virabyan, R.S. Gevorgyan
Constrained Vibrations of Round Circular Plates

Путем асимптотического интегрирования динамических уравнений теории упругости выведены рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения круговых кольцевых пластин из сжимаемого и несжимаемого материалов, когда на их лицевых поверхностях заданы граничные условия динамической задачи теории упругости. Получены формулы для определения амплитуд вынужденных колебаний. При однородных кинематических и смешанных граничных условиях установлены главные значения частот собственных колебаний пластин, обуславливающих возникновение резонанса. Доказано наличие двух видов волн в пластине из сжимаемого материала и выявлена особенность пластины из несжимаемого материала.

1. Имеем круговую кольцевую пластину, занимающую область $\Omega = \{r, \varphi, z; R_0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, -h \le z \le h, h << l, l = \min\{R_0, R - R_0\}\}$. Требуется определить амплитуды вынужденных колебаний, если на лицевых поверхностях пластины заданы кинематические

а) $$\overline{u}_j(r, \varphi, \pm h, t) = u_j^{\pm} \exp(i\Omega t) \qquad j = r, \varphi, z \tag{1.1}$$

или смешанные

$$\bar{u}_j(r,\varphi,-h,t) = u_j^- \exp(i\Omega t) \qquad j = r,\varphi,z;$$

б) (1.2)

$$\bar{\sigma}_{jz}(r,\varphi,h,t) = \sigma_{jz}^+ \exp(i\Omega t) \qquad j = r,\varphi,z$$

$$\bar{u}_j(r,\varphi,-h,t) = u_j^- \exp(i\Omega t) \qquad j = r,\varphi,z;$$

в) $$\bar{u}_z(r,\varphi,h,t) = u_j^+ \exp(i\Omega t) \tag{1.3}$$

$$\bar{\sigma}_{jz}(r,\varphi,h,t) = \sigma_{jz}^+ \exp(i\Omega t) \qquad j = r,\varphi$$

г) $$\bar{u}_j(r,\varphi,\pm h,t) = u_j^\pm \exp(i\Omega t) \qquad j = r,\varphi, \tag{1.4}$$

$$\bar{u}_z(r,\varphi,-h,t) = u_z^- \exp(i\Omega t), \quad \bar{\sigma}_{zz}(r,\varphi,h,t) = \sigma_{zz}^+ \exp(i\Omega t)$$

условия, т.е. требуется найти решение уравнений динамической задачи теории упругости, удовлетворяющее на лицевых поверхностях пластины одной из групп граничных условий (1.1)-(1.4).

Для решения поставленной краевой задачи в динамических уравнениях теории упругости в цилиндрических координатах [1] перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi = r/l, \ \eta = \varphi, \ \zeta = z/h, \ \varepsilon = h/l, \ \bar{u} = u_r/l, \ \bar{\upsilon} = u_\varphi/l, \ \bar{w} = u_z/l \tag{1.5}$$

Одновременно все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения представим в виде [2]

$$\bar{Q} = Q\exp(i\Omega t) \tag{1.6}$$

получим

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial\zeta} + \frac{1}{\xi}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \varepsilon^{-2}\omega^2 u = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\zeta} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{\xi} + \varepsilon^{-2}\omega^2 \upsilon = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial\zeta} + \frac{\sigma_{rz}}{\xi} + \varepsilon^{-2}\omega^2 w = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = \frac{1}{2(1+\nu)G}\left[\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})\right]$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta} + \frac{1}{\xi}u = \frac{1}{2(1+\nu)G}\left[\sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})\right] \tag{1.7}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial\zeta} = \frac{1}{2(1+\nu)G}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr})\right]$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{\partial\upsilon}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\upsilon = \frac{1}{G}\sigma_{r\varphi}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{1}{G}\sigma_{rz}$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \upsilon}{\partial \zeta} = \frac{1}{G}\sigma_{\varphi z} \qquad \omega^2 = \rho h^2 \Omega^2 .$$

Система уравнений (1.7) сингулярно возмущена геометрическим малым параметром ε, поэтому ее решение ищем в виде асимптотического разложения

$$Q = \varepsilon^{\chi}\sum_{s=1}^{S}\varepsilon^{s} Q^{(s)} \tag{1.8}$$

$\chi_{\sigma} = -1$ для напряжений, $\chi_{u} = 0$ для перемещений [3].

Подставив (1.8) в (1.7) и приравняв коэффициенты при ε^{S} в левых и правых частях, получим непротиворечивую систему

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\omega^2}{G}u^{(s)} = R_u^{(s)} \qquad (u, \upsilon)$$

$$\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\omega^2(1-2\nu)}{2(1-\nu)G}w^{(s)} = R_w^{(s)} \tag{1.9}$$

$$\sigma_{rr}^{(s)} = \frac{2\nu G}{1-2\nu}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} + R_{rr}^{(s)} \qquad (r, \varphi)$$

$$\sigma_{zz}^{(s)} = \frac{2\nu(1-\nu)G}{1-2\nu}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} + R_{zz}^{(s)}$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(s)} = G\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \upsilon^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\upsilon^{(s-1)}}{\xi}\right) \tag{1.10}$$

$$\sigma_{rz}^{(s)} = G\left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)$$

$$\sigma_{\varphi z}^{(s)} = G\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \upsilon^{(s)}}{\partial \zeta}\right)$$

$$R_{rz}^{(s)} = -\frac{\partial \sigma_{rr}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{1}{\xi}\left(\sigma_{rr}^{(s-1)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(s-1)}\right)$$

$$R_{\varphi z}^{(s)} = -\frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{2\sigma_{r\varphi}^{(s-1)}}{\xi}$$

$$R_{rr}^{(s)} = \frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{2\nu G}{1-2\nu}\left(\frac{u^{(s-1)}}{\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \upsilon^{(s-1)}}{\partial \eta}\right)$$

$$R_{\varphi\varphi}^{(s)}=\frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\upsilon^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{u^{(s-1)}}{\xi}\right)+\frac{2\nu G}{1-2\nu}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}$$

$$R_{zz}^{(s)}=\frac{2\nu G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\upsilon^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{u^{(s-1)}}{\xi}\right)$$

$$R_{u}^{(s)}=\frac{1}{G}R_{rz}^{(s)}-\frac{\partial^2 w^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}$$

$$R_{\upsilon}^{(s)}=\frac{1}{G}R_{\varphi z}^{(s)}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial^2 w^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} \tag{1.11}$$

$$R_{w}^{(s)}=-\frac{1-2\nu}{2\nu(1-\nu)G}\left(\frac{\partial R_{zz}^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\sigma_{rz}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\sigma_{rz}^{(s-1)}}{\xi}\right)$$

Очевидно, что общее решение системы (1.9) имеет вид

$$u^{(s)}=A_u^{(s)}\cos\alpha_u\zeta+B_u^{(s)}\sin\alpha_u\zeta+J_u^{(s-1)}\quad(u,\upsilon)$$

$$w^{(s)}=A_w^{(s)}\cos\alpha_w\zeta+B_w^{(s)}\sin\alpha_w\zeta+J_w^{(s-1)} \tag{1.12}$$

$$\alpha_u=\alpha_\upsilon=\frac{\omega}{\sqrt{G}},\quad \alpha_w=\omega\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G}}$$

где $A_u^{(s)},B_u^{(s)}$ (u,υ,w) - неизвестные пока функции интегрирования, а $J_u^{(s-1)},J_\upsilon^{(s-1)},J_w^{(s-1)}$ $s\geq 1$ - частные решения неоднородных уравнений (1.9), которые имеют вид

$$J_u^{(s-1)}=\frac{1}{\alpha_u}\int_0^\zeta R_u^{(s)}\sin\alpha_u(\zeta-\tau)d\tau,\qquad (u,\upsilon,w) \tag{1.13}$$

Рекуррентные формулы (1.8), (1.10)-(1.13) позволяют вычислить компоненты тензора напряжений и вектора перемещения пластины из сжимаемого материала, когда на ее лицевой поверхности заданы граничные условия вида (1.1)-(1.4).

а) Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим значения амплитуд вынужденных колебаний пластины, когда на лицевых поверхностях заданы кинематические условия

$$A_u^{(s)}=\frac{1}{2\cos\alpha_u}\left[u^{+(s)}+u^{-(s)}-J_u^{(s-1)}(\zeta=1)-J_u^{(s-1)}(\zeta=-1)\right]$$

$$B_u^{(s)}=\frac{1}{2\sin\alpha_u}\left[u^{+(s)}-u^{-(s)}-J_u^{(s-1)}(\zeta=1)+J_u^{(s-1)}(\zeta=-1)\right] \tag{1.14}$$

$$\sin 2\alpha_u\neq 0,\qquad (u,\upsilon,w)$$

$$u^{\pm(0)} = u_r^{\pm} / l, \quad u^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (r, \varphi, z; u, \upsilon, w).$$

б) когда на лицевых поверхностях заданы граничные условия (1.2), получаем

$$A_u^{(s)} = \frac{1}{\cos 2\alpha_u}\left[\left(u^{-(s)} - J_u^{(s-1)}(\zeta = -1)\right)\cos\alpha_u + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\alpha_u}{\alpha_u}\left(\frac{\sigma_{rz}^{+}}{G} - \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\zeta}J_u^{(s-1)}(\zeta = 1)\right)\right]$$

$$B_u^{(s)} = \frac{1}{\cos 2\alpha_u}\left[\left(u^{-(s)} - J_u^{(s-1)}(\zeta = -1)\right)\sin\alpha_u + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\alpha_u}{\alpha_u}\left(\frac{\sigma_{rz}^{+}}{G} - \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\zeta}J_u^{(s-1)}(\zeta = 1)\right)\right]$$

$$\left(r, \varphi, z; u, \upsilon, w; \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\xi}, \frac{1}{\xi}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\eta}, 0\right) \tag{1.15}$$

$$\cos 2\alpha_u \neq 0 \quad (u, \upsilon, w)$$

в) когда на лицевых поверхностях заданы смешанные граничные условия (1.3), амплитуды $A_u^{(s)}, B_u^{(s)}, A_\upsilon^{(s)}, B_\upsilon^{(s)}$ определяются по формулам (1.15), а $A_w^{(s)}, B_w^{(s)}$ - по формулам (1.14).

г) При граничных условиях (1.4) решения (1.14), (1.15) справедливы, если $\sin 2\alpha_u \neq 0, \ \cos 2\alpha_u \neq 0 \quad (u, \upsilon, w)$. Если же эти условия не выполняются, то происходит резонанс и амплитуды вынужденных колебаний резко возрастают. Значения частоты вынуждающего воздействия Ω, при которых $\sin 2\alpha_u = 0, \cos 2\alpha_w = 0$, совпадают с главными значениями частот собственных колебаний пластины [4]. Эти значения можно определить тем же методом.

Удовлетворив на лицевой поверхности пластины $z = \pm h$ однородным граничным условиям жесткого закрепления или однородным смешанным условиям (1.2)-(1.4), при $s = 0$, используя (1.10), (1.12), получим дисперсионные уравнения

$$\sin 2\alpha_u = 0, \ \cos 2\alpha_u = 0 \quad (u, \upsilon, w) \tag{1.16}$$

откуда определяются главные значения собственных частот:

а) когда лицевые поверхности пластины жестко закреплены

$\Omega_{u,\upsilon} = \dfrac{\pi}{2h}k\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ для сдвиговых поперечных колебаний,

$$\Omega_w = \frac{\pi}{2h} k \sqrt{\frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)\rho}} \quad \text{для продольных колебаний.} \qquad (1.17)$$

б) когда одна лицевая поверхность пластины жестко закреплена, а противоположная поверхность свободна от нагрузки, то

$$\Omega_{u,\upsilon} = \frac{\pi}{4h}(2k+1)\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$\Omega_w = \frac{\pi}{4h}(2k+1)\sqrt{\frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)\rho}}, \quad k \in N \qquad (1.18)$$

Таким образом, в пластине из сжимаемого материала в основном (с точностью $O(\varepsilon^0)$) возникают, независимые друг от друга, два вида собственных колебаний: поперечная и продольная, и каждая из них имеет свою собственную главную частоту.

2. Заметим, что для пластин из несжимаемых материалов (при $\nu = \frac{1}{2}$) в формулах (1.12)-(1.18) амплитуды вынужденных и частоты собственных продольных колебаний имеют особенность $(\Omega_w \to \infty)$, следовательно, полученные решения поставленных задач для пластин из несжимаемых материалов непригодны.

Для того, чтобы решить поставленные краевые задачи для круглых кольцевых пластин из несжимаемого материала, к преобразованной системе (1.7) присоединим условие несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}u + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \qquad (2.1)$$

и решение полученной сингулярно возмущенной системы представим в виде разложения (1.8). Для определения коэффициентов $Q^{(s)}$ получим непротиворечивую систему лишь при [5]

$$\chi_{\sigma_{rr}} = \chi_{\sigma_{zz}} = \chi_{\sigma_{\varphi\varphi}} = -3,\ \chi_{\sigma_{r\varphi}} = \chi_{\sigma_{rz}} = \chi_{\sigma_{\varphi z}} = -2,\ \chi_u = \chi_\upsilon = -1, \chi_w = 0 \qquad (2.2)$$

Подставив (1.8), (2.2) в (1.7), (2.1), известным способом найдем рекуррентные формулы для определения коэффициентов разложения (1.8)

$$\sigma_{jj}^{e(s)} = \sigma_{zz0}^{e(s)} + \sigma_{jj*}^{e(s)} \qquad j = r, \varphi, z$$

$$\sigma_{rz}^{e(s)} = G^e \frac{\partial u^{e(s)}}{\partial \zeta} + G^e \frac{\partial w^{e(s-2)}}{\partial \xi}$$

$$\sigma_{\varphi z}^{e(s)} = G^e \frac{\partial \upsilon^{e(s)}}{\partial \zeta} + G^e \frac{1}{\xi}\frac{\partial w^{e(s-2)}}{\partial \eta}$$

$$\sigma_{r\varphi}^{e(s)} = G^e\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial u^{e(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial \upsilon^{e(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\upsilon^{e(s-1)}}{\xi}\right) \qquad (2.3)$$

$$u^{e(s)} = A^{e(s)}\cos\beta\zeta + B^{e(s)}\sin\beta\zeta -$$

$$-\frac{1}{\Omega^2 h^2\rho}\frac{\partial\sigma_{zz0}^{e(s)}}{\partial\xi} + \frac{1}{\beta}\int_0^\zeta R_u^{e(s)}\sin\beta(\zeta-\tau)d\tau,$$

$$\upsilon^{e(s)} = C^{e(s)}\cos\beta\zeta + D^{e(s)}\sin\beta\zeta -$$

$$-\frac{1}{\Omega^2 h^2\rho}\frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{zz0}^{e(s)}}{\partial\eta} + \frac{1}{\beta}\int_0^\zeta R_\upsilon^{e(s)}\sin\beta(\zeta-\tau)d\tau,$$

$$w^{e(s)} = w_0^{e(s)} + \zeta\frac{1}{\Omega^2 h^2\rho}\nabla^2\sigma_{zz0}^{e(s)} + w_*^{e(s)}(\xi,\eta,\zeta) -$$

$$-\frac{\sqrt{G}}{\Omega h\sqrt{\rho}}\sin\beta\zeta\left(\frac{\partial A^{e(s)}}{\partial\xi} + \frac{A^{e(s)}}{\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial C^{e(s)}}{\partial\eta}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{G}}{\Omega h\sqrt{\rho}}\cos\beta\zeta\left(\frac{\partial B^{e(s)}}{\partial\xi} + \frac{B^{e(s)}}{\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial D^{e(s)}}{\partial\eta}\right),$$

$$R_u = -\frac{1}{G^e}\left(\frac{\partial\sigma_{rr*}^{e(s)}}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{e(s-2)}}{\partial\eta} + \frac{\sigma_{rr*}^{e(s)} - \sigma_{\varphi\varphi*}^{e(s)}}{\xi}\right)$$

$$R_\upsilon = -\frac{1}{G^e}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi*}^{e(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{e(s-2)}}{\partial\xi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}^{e(s-2)}}{\xi}\right)$$

$$\sigma_{zz*}^{e(s)} = -\int_0^\zeta\left(\frac{\partial\sigma_{rz}^{e(s-2)}}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}^{e(s-2)}}{\partial\eta} + \frac{\sigma_{rz}^{e(s-2)}}{\xi} + \Omega^2 h^2\rho w^{e(s-2)}\right)d\zeta$$

$$\sigma_{rr*}^{e(s)} = \sigma_{zz*}^{e(s)} + \frac{4G^e}{9}\frac{\partial u^{e(s-2)}}{\partial\xi} + \frac{2G^e}{9}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\upsilon^{e(s-2)}}{\partial\eta} + \frac{u^{e(s-2)}}{\xi}\right) \qquad (2.4)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi*}^{e(s)} = \sigma_{zz*}^{e(s)} + \frac{2G^e}{9}\frac{\partial u^{e(s-2)}}{\partial\xi} + \frac{4G^e}{9}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\upsilon^{e(s-2)}}{\partial\eta} + \frac{u^{e(s-2)}}{\xi}\right)$$

$$w_*^{e(s)} = -\frac{1}{\beta^2}\int_0^\zeta\left(\frac{\partial R_u^{e(s)}}{\partial\xi} + \frac{R_u^{e(s)}}{\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial R_\upsilon^{e(s)}}{\partial\eta}\right)[1-\cos\beta(\zeta-\tau)]d\tau$$

$$\beta = \Omega h\sqrt{\frac{\rho}{G^e}}$$

Рекуррентные формулы (1.8), (2.1)–(2.4) позволяют вычислить компоненты тензора напряжений и вектора перемещения круглой кольцевой пластины из несжимаемого материала с любой заранее заданной асимптотической точностью, когда на ее лицевых поверхностях заданы неоднородные граничные условия (1.1)–(1.4).

а) Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим

$$A^{e(s)} = \frac{1}{2\cos\beta}\left[\frac{2}{\Omega^2 h^2 \rho}\frac{\partial\sigma_{zz0}^{e(s)}}{\partial\xi} + J_u^{e(s)}(\zeta=1) + J_u^{e(s)}(\zeta=-1)\right]$$

$$B^{e(s)} = \frac{1}{2\sin\beta}\left[J_u^{e(s)}(\zeta=1) - J_u^{e(s)}(\zeta=-1)\right]$$

$$\left(A,B;B,D,u,\upsilon;\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

$$J_u^{e(s)}(\zeta=\pm1) = u_r^{\pm(s)} - \frac{1}{\beta}\int_0^{\pm1} R_u^{e(s)}\sin\beta(\pm1-\tau)d\tau,\ \beta=\Omega h\sqrt{\frac{\rho}{G^e}}\quad (r,\varphi;u,\upsilon)$$

$$u_r^{\pm(0)} = u_r^{\pm}/l,\quad u_r^{\pm(s)}=0\quad s\neq0\ (r,\varphi,z) \tag{2.5}$$

$$w_0^{e(s)} = \frac{1}{2}\left(u_z^{+(s)} + u_z^{-(s)} - w_*^{e(s)}(\zeta=1) - w_*^{e(s)}(\zeta=-1)\right) - \frac{1}{2\beta}\mathrm{ctg}\beta\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\right)\left(J_u^{e(s)}(\zeta=1) - J_u^{e(s)}(\zeta=-1)\right) + \frac{\partial}{\xi\partial\eta}\left(J_\upsilon^{e(s)}(\zeta=1) - J_\upsilon^{e(s)}(\zeta=-1)\right)\right]$$

$$\nabla^2\sigma_{zz0}^{e(s)} = \frac{\Omega^2 h^2\rho\beta}{2(\beta-tg\beta)}\left[u_z^{+(s)} - u_z^{-(s)} - w_*^{e(s)}(\zeta=1) + w_*^{e(s)}(\zeta=-1) + \frac{1}{\beta}\mathrm{tg}\beta\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\right)\left(J_u^{e(s)}(\zeta=1) + J_u^{e(s)}(\zeta=-1)\right) + \frac{\partial}{\xi\partial\eta}\left(J_\upsilon^{e(s)}(\zeta=1) + J_\upsilon^{e(s)}(\zeta=-1)\right)\right)\right]$$

$$\sin2\beta\neq0\quad \beta-\mathrm{tg}\beta\neq0$$

где $\sigma_{zz0}^{e(s)}$ определяется аналогично [3].

б) Из граничных условий (1.2) функции интегрирования определяются как

$$\sigma_{zz0}^{e(s)} = \sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{zz*}^{e(s)}(\zeta=1)$$

$$A^{e(s)} = \frac{\cos\beta}{\cos2\beta}\left[\frac{1}{\Omega^2 h^2\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{zz*}^{e(s)}(\zeta=1)\right) + J_u^{e(s)}(\zeta=-1)\right] +$$

$$+\frac{\sin\beta}{\beta\cos2\beta}\left(\frac{1}{G^e}\sigma_{rz}^{+(s)} - \int_0^\zeta R_u^{e(s)}\cos\beta(\zeta-\tau)d\tau - \frac{\partial w^{e(s-2)}}{\partial\xi}\right)$$

$$B^{e(s)} = \frac{\sin\beta}{\cos2\beta}\left[\frac{1}{\Omega^2 h^2\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{zz*}^{e(s)}(\zeta=1)\right) + J_u^{e(s)}(\zeta=-1)\right] +$$

$$+\frac{\cos\beta}{\beta\cos 2\beta}\left(\frac{1}{G^e}\sigma_{rz}^{+(s)}-\int_0^\zeta R_u^{e(s)}\cos\beta(\zeta-\tau)d\tau-\frac{\partial w^{e(s-2)}}{\partial\xi}\right)$$

$$\left(u,\upsilon;A,C;B,D;rz,\varphi z;\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\xi\partial\eta}\right) \qquad (2.6)$$

$$w_0^{e(s)}=u_z^{-(s)}+\frac{1}{\Omega^2h^2\rho}\nabla^2\left(\sigma_{zz}^{+(s)}-\sigma_{zz*}^{e(s)}(\zeta=1)\right)-w_*^{e(s)}(\zeta=-1)-$$

$$-\frac{\sin\beta}{\beta}\left(\frac{\partial A^{e(s)}}{\partial\xi}+\frac{A^{e(s)}}{\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial C^{e(s)}}{\partial\eta}\right)-\frac{\cos\beta}{\beta}\left(\frac{\partial B^{e(s)}}{\partial\xi}+\frac{B^{e(s)}}{\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial D^{e(s)}}{\partial\eta}\right)$$

$$\sigma_{jz}^{+(0)}=\sigma_{jz}^{+},\ \sigma_{jz}^{+(s)}=0\quad s\neq 0,\quad \cos 2\beta\neq 0.$$

Удовлетворив смешанным граничным условиям (1.3) и (1.4), получаем значения функций интегрирования соответственно:

в)

$$A^{e(s)}=\frac{\cos\beta}{\cos 2\beta}\frac{1}{\Omega^2h^2\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\sigma_{zz0}^{e(s)}+A_*^{e(s)}$$

$$B^{e(s)}=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\frac{1}{\Omega^2h^2\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\sigma_{zz0}^{e(s)}+B_*^{e(s)}$$

$$A_*^{e(s)}=\frac{\cos\beta}{\cos 2\beta}J_u^{e(s)}(\zeta=-1)+\frac{\sin\beta}{\beta\cos 2\beta}\left(\frac{1}{G^e}\sigma_{rz}^{+(s)}-\int_0^\zeta R_u^{e(s)}\cos\beta(\zeta-\tau)d\tau-\frac{\partial w^{e(s-2)}}{\partial\xi}\right)$$

$$B_*^{e(s)}=\frac{\sin\beta}{\cos 2\beta}J_u^{e(s)}(\zeta=-1)+\frac{\cos\beta}{\beta\cos 2\beta}\left(\frac{1}{G^e}\sigma_{rz}^{+(s)}-\int_0^\zeta R_u^{e(s)}\cos\beta(\zeta-\tau)d\tau-\frac{\partial w^{e(s-2)}}{\partial\xi}\right)$$

$$\left(u,\upsilon;A,C;B,D;rz,\varphi z;\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\xi\partial\eta}\right) \qquad (2.7)$$

$$w_0^{e(s)}=\frac{1}{2}\left[u_z^{+(s)}+u_z^{-(s)}-w_*^{e(s)}(\zeta=1)-w_*^{e(s)}(\zeta=-1)-\frac{1}{\beta}tg 2\beta\frac{1}{\Omega^2h^2\rho}\nabla^2\sigma\right]-$$

$$-\frac{\cos\beta}{\beta}\left(\frac{\partial B_*^{e(s)}}{\partial\xi}+\frac{B_*^{e(s)}}{\xi}+\frac{\partial D_*^{e(s)}}{\xi\partial\eta}\right)$$

$$\nabla^2\sigma_{zz0}^{e(s)}=\frac{\beta\Omega^2h^2\rho}{2\beta-tg 2\beta}\left[u_z^{+}-u_z^{-}-w_*^{e(s)}(\zeta=1)+w_*^{e(s)}(\zeta=-1)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\sin\beta}{\beta}\left(\frac{\partial A_*^{e(s)}}{\partial\xi}+\frac{A_*^{e(s)}}{\xi}+\frac{\partial C_*^{e(s)}}{\xi\partial\eta}\right)\right]$$

$$tg 2\beta-2\beta\neq 0,\qquad \cos 2\beta\neq 0.$$

г)

$$\sigma_{zz0}^{e(s)} = \sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{zz*}^{e(s)}(\zeta = 1)$$

$$A^{e(s)} = \frac{1}{2\cos\beta}\left[\frac{2}{\Omega^2 h^2 \rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{zz*}^{e(s)}(\zeta = 1)\right) + J_{*}^{e(s)}(\zeta = 1) + J_{*}^{e(s)}(\zeta = -1)\right]$$

$$B^{e(s)} = \frac{1}{2\sin\beta}\left[J_{*}^{e(s)}(\zeta = 1) - J_{*}^{e(s)}(\zeta = -1)\right]$$

$$\left(A, C; B, D, u, \upsilon; \frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\right) \tag{2.8}$$

$$w_0^{e(s)} = u_z^{+(s)} + \frac{1}{\Omega^2 h^2 \rho}\nabla^2\left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{zz*}^{e(s)}(\zeta = 1)\right) - w_{*}^{e(s)}(\zeta = -1) -$$

$$-\frac{\sin\beta}{\beta}\left(\frac{\partial A^{e(s)}}{\partial\xi} + \frac{A^{e(s)}}{\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial C^{e(s)}}{\partial\eta}\right) - \frac{\cos\beta}{\beta}\left(\frac{\partial B^{e(s)}}{\partial\xi} + \frac{B^{e(s)}}{\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial D^{e(s)}}{\partial\eta}\right)$$

$$\sin 2\beta \neq 0 \quad .$$

Значения амплитуд вынужденных колебаний $A^{e(s)}, B^{e(s)}, C^{e(s)}, D^{e(s)}$ пластин из несжимаемых материалов (2.1)-(2.4) получены при условиях $\sin 2\beta \neq 0$, $\cos 2\beta \neq 0$, $tg\beta \neq \beta$, $tg 2\beta \neq 2\beta$. Когда же эти условия не выполняются, возникает резонанс. Это происходит, когда частота Ω внешнего воздействия совпадает с главным значением частоты собственных колебаний. Учитывая это, можно получить главные значения частот собственных колебаний пластин из несжимаемых материалов при $s = 0$, принимая $u_j^{\pm(0)} = 0$, $\sigma_{jz}^{\pm(0)} = 0$. Такие кинематические и смешанные условия приводят к дисперсионным уравнениям

$$\sin 2\beta = 0, \ \cos 2\beta = 0, \ tg\beta = \beta, \ tg 2\beta = 2\beta \tag{2.9}$$

спектр собственных значений которых приводит к следующим главным значениям частот собственных колебаний

$$\Omega_k = \frac{\pi}{2h}k\sqrt{\frac{G^e}{\rho}}, \qquad \Omega_k = \frac{\pi}{4h}(2k+1)\sqrt{\frac{G^e}{\rho}}, \qquad k \in N$$

$$\Omega_1^{(a)} = \frac{4.49340946}{h}\sqrt{\frac{G^e}{\rho}}, \qquad \Omega_1^{(б)} = \frac{2.24670473}{h}\sqrt{\frac{G^e}{\rho}} \tag{2.10}$$

Анализ решений (2.1)-(2.10) показывает, что для пластин из несжимаемых материалов (в отличие от пластин из сжимаемых материалов) тангенциальные (сдвиговые) и продольные собственные колебания связаны с исходного шага итерации и имеют одинаковые частоты.

Эти результаты могут быть использованы в расчетах эластомерных сейсмоизоляторов [6].

Авторы выражают признательность Л.А.Агаловяну за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Теория упругости М.: ОНТИ, 1937.
2. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V. and Aghalovyan M.L. Asimptotics of Forced Vibrations of Bases, Foundations and Seismoisolators // Journal of Structural Control. 2001.Vol. 8. N2. PP. 249-263.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
4. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел // Прикладная механика НАН Украины. 2002. Т. 38. №7. С. 3-24.
5. Геворкян Р.С., Вирабян Е.Г. Асимптотические решения краевых задач теории упругости для круговой кольцевой пластины из несжимаемого материала // Докл.НАН Армении. 2001. N3. С. 237-244.
6. Kelly J.M. The influence of plate flexibility on the buckling load of elastometric isolators // Report N_0 UCB/EERC- 94/03. 1994. 59p

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
13.01.2003