ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика
УДК 531.36: 534.2

УСЛОВИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫНУЖДЕННОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Матвийчук К.С.

Փոփոխական կառուցվածքով ավտոմատ ղեկավարման ոչ ստացիոնար համակարգերի հարկադրական շարժումների տեխնիկական կայունության պայմանները
Կ.Ս. Մատվիյչուկ

Հետազոտվում են փոփոխական կառուցվածքով ոչ ստացիոնար համակարգերի դինամիկական վիճակների տեխնիկական կայունության պայմանները արտաքին գրգռման պայմաններում [1-6]. Նախապես տրված բազմությունից, բոլոր հնարավոր սկզբնական վիճակներով ոչ ստացիոնար, փոփոխական կառուցվածքով և արտաքին գրգռման պայմաններում գտնվող դինամիկ պրոցեսների համար ստացված են տեխնիկական կայունության բավարար պայմաններ:

Conditions of Technical Stability of the Compelled Movement of Non-Stationary Systems of Automatic Control with Variable Structure
K.S. Matvijchuk

Исследуются свойства технической устойчивости динамических состояний нестационарных систем переменной структуры при наличии внешних воздействий [1-6]. Нестационарные внутренние параметры рассматриваемых систем изменяются непрерывно в заданных диапазонах при выбранных параметрах разрывных законов управления процессами с регулированием по координате рассогласования, выходной координате исполнительного устройства и их производных конечного порядка [2]. Получены достаточные условия технической устойчивости по мере заданных нестационарных, внешне возмущенных динамических процессов переменной структуры при всех возможных начальных распределениях значений из заранее заданного относительно меры множества начальных состояний [5,6].

1. Формулировка задачи. Рассматривается нестационарная динамическая система регулирования с переменной структурой в условиях действия внешних возмущений и в предположении, что зависимые от времени внутренние непрерывные параметры процесса изменяются в области заданных диапазонов. Движение заданной системы описывается системой уравнений вида [2]

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \quad i = 1,\dots,n-1 \tag{1}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} a_i(t)x_i - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^{\gamma} x_i + \sum_{i=0}^{m-1}\left(d_i(t)+\psi_i^{\gamma}\right)\frac{d^i F(t)}{dt^i} + \frac{d^m F(t)}{dt^m}, \quad t \in T \subset I$$

где функция $F(t)$ имеет следующее представление:

$$F(t) = F_1(t) + \frac{d^{n-m} f_0(t)}{dt^{n-m}} + \sum_{j=0}^{n-m-1} b_j(t)\frac{d^j f_0(t)}{dt^j}, \ t \in T \subset I \tag{2}$$

T–ограниченный заданный интервал времени, $I=[t_0,+\infty)$, $t_0\ge 0$; $F_1(t)$–функция времени $t\in T$, характеризует приведенное ко входу системы возмущающее воздействие и является линейной комбинацией функций внешних, произвольно приложенных к процессу возмущений $f_1(t),...,f_n(t)$ и их производных. Предполагается, что заданная система обеспечивает непрерывное воспроизведение задающего воздействия $f_0(t)$ процесса выходной координатой $\varphi(t)$ с точностью до затухающей переходной составляющей; x_1–координата рассогласования: $x_1=f_0(t)-\varphi(t)$. Считаем, что $F_1(t)$ непрерывно дифференцируема до порядка m включительно, $m<n$, функции $\varphi(t), f_0(t)$ непрерывно дифференцируемы до порядка n включительно. С помощью непрерывных параметров объекта управления $b_i(t)$ характеризуется [2] связь между величинами $d^i\varphi(t)/dt^i$ $(i=0,1,...,n-m)$, y, $F_1(t)$, y–выходная координата исполнительного устройства; по предположению $b_i(t)$ дифференцируемы до порядка $m<n$ включительно и удовлетворяют условиям

$$b_{i\ \min}^{(j)}\le\frac{d^j b_i(t)}{dt^j}\le b_{i\ \max}^{(j)},\quad i=0,1,...,n-m,\quad j=0,1,...,m$$

$$b_{i\ \min}^{(j)},b_{i\ \max}^{(j)}=\text{const},\quad t\in T \tag{3}$$

Параметры $d_i(t)$ исполнительного устройства непрерывны, заданы в известных диапазонах

$$d_{i\min}\le d_i(t)\le d_{i\max},\quad d_{i\min},d_{i\max}=\text{const},\quad i=0,1,...,m-1,\quad t\in T \tag{4}$$

и характеризуют [2] связь управления u с функциями $d^i y/dt^i$. Полагаем, что управление u в системе зависит от воздействий по координатам $x_1,...,x_n,y,dy/dt,...,d^{m-1}y/dt^{m-1}$ и имеет представление $u=\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i^x x_i-\sum_{i=0}^{m-1}\psi_i^y\frac{d^i y}{dt^i}$, коэффициенты воздействия ψ_i^x и ψ_i^y принимают [1,2] одно из двух значений: α_i^x или β_i^x и α_i^y или β_i^y. Коэффициенты $a_i(t)$ в (1) линейно зависят от величин $d^j b_i(t)/dt^j$, $d_i(t)$, ψ_i^y [2]. Сформируем функцию переключения в пространстве переменных $(x_1,...,x_n)$ вида

$$s=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i,\quad c_i=\text{const},\quad c_n=1 \tag{5}$$

Пусть с помощью (5) задан закон изменения коэффициентов ψ_i^x, ψ_i^y:

$$\psi_i^x=2^{-1}\{\alpha_i^x[1+\text{sign}(x_i s)]+\beta_i^x[1-\text{sign}(x_i s)]\},\ i=1,...,n-1,\ \alpha_i^x,\beta_i^x=\text{const} \tag{6}$$

$$\psi_i^y=2^{-1}\left\{\alpha_i^y\left[1+\text{sign}\left(\frac{d^i F}{dt^i}s\right)\right]+\beta_i^y\left[1-\text{sign}\left(\frac{d^i F}{dt^i}s\right)\right]\right\},\ i=0,1,...,m-1$$

$$\alpha_i^\gamma, \beta_i^\gamma = \text{const} \tag{7}$$

Рассмотрим класс F_m – множество функций $F(t)$ со свойством [2]

$$\left|\frac{d^m F(t)}{dt^m}\right| / \left|\sum_{i=0}^{m-1} \frac{d^i F(t)}{dt^i}\right| \le A, \quad A = \text{const} > 0 \tag{8}$$

Если внешние воздействия $F_1(t)$ недоступны измерению, то, используя из [2] связь между $f_0(t), y, x_i$, при $R_i \equiv \dfrac{d^i y}{dt^i} + \sum\limits_{j=1}^{n-m+i+1} r_{ij}(t) x_j$ имеем

$$\psi_i^\gamma = 2^{-1}\left\{\alpha_i^\gamma[1 + \text{sign}(R_i s)] + \beta_i^\gamma[1 - \text{sign}(R_i s)]\right\}, \quad i = 0,1,\ldots,m-1 \tag{9}$$

Имеем частный логический закон для ψ_i^γ вида

$$\psi_i^\gamma = 2^{-1}\left\{\alpha_i^\gamma\left[1 + \text{sign}\left(\frac{d^i y}{dt^i} s\right)\right] + \beta_i^\gamma\left[1 - \text{sign}\left(\frac{d^i y}{dt^i} s\right)\right]\right\}, \ i = 0,1,\ldots,m-1 \tag{10}$$

Пусть процесс (1) – (8) (либо (1) – (5), (9), (8)) определен при условиях

$$x_i(t_0) = x_i^0, \ \ i = 1,\ldots,n, \ \ \forall x_0 = \left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right) \in \Omega_0 \tag{11}$$

Задачу Коши (1) – (8), (11) рассматриваем в области

$$T \times D, \ T = \left[t_0, \ \ N\mu^{-1}\right], \ D = \left\{x = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n : \ |x_i| < h_i, \ \ i = \overline{1,n}\right\},$$

где $T \subset I$, $\mu \in (0,1)$, $N = \text{const} > 0$, $h_i = \text{const} > 0$ – заданные величины. Пусть задача (1) – (8), (11) удовлетворяет [4] достаточным условиям существования вида:

$$|f(t,x)| \le m(t),$$

$$f(t,x) \equiv -\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i + \sum_{i=1}^{m-1}\left(d_i(t) + \psi_i^\gamma\right)\frac{d^i F(t)}{dt^i} + \frac{d^m F(t)}{dt^m}, \ \ t \in T \subset I,$$

где $m(t)$–суммируемая функция при $t \in T \subset I$ [4]. Обозначим $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$ решение задачи (1)–(8), (11). Зададим меру $\rho = \rho[x] \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$. Пусть заданы: область начальных состояний для системы (1)–(8), (11): $\Omega_0 = \{x : \ \rho \le \gamma, \ \ \gamma > 0\}$ и область допустимых текущих состояний этой системы: $\Omega(t) = \{x : \ \rho \le \eta(t), \ \ \eta(t) > 0\}$, где γ, $\eta(t)$ – заданные число и непрерывная в $T \subset I$ функция, при этом $\gamma \le \eta(t_0)$, $\Omega_0 \subset \Omega(t_0)$, $\eta(t) \le k$, $\forall t \in T$, $k = \text{const} > 0$.

Для системы (1) – (8),(11) определим нормированную функцию Ляпунова $V(t,x)$ аналогично [5], предполагая, что автономные состояния исходной системы описываются линейной устойчивой системой дифференциальных уравнений без управления и с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i, \ \ i = 1,\ldots,n-1, \ \frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i x_i, \ \ \bar{a}_i = \text{const} \tag{12}$$

[П]усть функция Ляпунова $V(t,x)$ имеет представление

$$V(t,x)=\exp[\beta_1(t)]W_1(x),\ \ W_1(x)\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{ij}}{\theta}x_ix_j\,,\ \ \theta=\varepsilon_n\Lambda\,,\ \ \varepsilon_n>1,\ \ \Lambda>1 \quad (13)$$

[гд]е для собственных значений $\mu_i(i=\overline{1,n})$ формы $W_1(x)$ справедливо [св]ойство

$$<\exp[\beta(t)]\mu_n\le 1,\ \forall t\in T,\ \ \mu_n=\max\{\mu_i(i=\overline{1,n})\}\ \text{и}\ \mu_1=\min\{\mu_i(i=\overline{1,n})\} \quad (14)$$

2. Достаточные условия технической устойчивости вынужденной [н]естационарной системы с переменной структурой. Обозначим на [р]ешениях системы (1) – (8), (11) соотношения:

$$\Phi(t,x(t))\equiv\frac{d\beta(t)}{dt}V(t)+\frac{1}{\theta}\exp[\beta(t)]W(t)$$

$$\Phi_1(t,x(t),u,F)\equiv\frac{1}{\theta}\exp[\beta(t)]\left[\sum_{i=1}^{n}(\overline{a}_i-a_i(t))\kappa_i(t)-\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i^x x_i(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\left(d_i(t)+\psi_i^y\right)\frac{d^iF(t)}{dt^i}+\frac{d^mF(t)}{dt^m}\right]\sum_{i=1}^{n}b_{in}x_i(t)$$

$$V(t)\equiv V(t,x(t)),\quad W(t)\equiv-\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)$$

Пусть в области $\overline{K}=\{t,\ \ V:t\in T,\ \ |V|<+\infty\}$ задана непрерывная [ф]ункция $Z(t,V)$ с условием при $V=0$: $Z(t,0)=0$ и пусть справедливо [н]еравенство $z_0\ge V_0$, $V_0=\max\limits_{x_0\in\Omega_0}\{\exp[\beta(t_0)]V_1(x_0)\}$, $z_0=\text{const}>0$,

$V_1(x_0)\equiv\frac{1}{\theta}\overline{V}_1(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, $\overline{V}_1(x_1^0,\ldots,x_n^0)\equiv\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_i^0x_j^0$. Предполагаем [с]уществование задачи Коши сравнения [5,6]

$$\frac{dz}{dt}=Z(t,z+\sigma(t)),\ \ t\in T\,,\ \ \sigma(t)=M\int_{t_0}^{t}\omega(\tau)d\tau$$

($M=\text{const}>0$ – заданная величина) (15)

$$z(t_0)=z_0\ge V_0\,,\ \ 0<z_0\le b\,,\ \ b=\text{const}>0 \quad (16)$$

[гд]е z_0, b –заданные константы, $\omega(t)$ –заданная интегрируемая функция по t [в] области T.

Теорема. Пусть справедливы условия: 1. Внутренние переменные [п]араметры нестационарного процесса (1) – (8), (11) существуют в заданных [д]иапазонах областей (3), (4). 2. Для динамической нестационарной системы с [п]еременной структурой (1)– (8), (11) при вынужденных движениях, [х]арактеризуемых функциями вида (2) из класса F_m (8), выполнены [д]остаточные условия существования решения. 3. Характеристическое [у]равнение порождающей системы (12) имеет n корней с отрицательными [д]ействительными частями. 4. Существует положительно-определенная функция V (13), в которой собственные значения $\mu_i (i=\overline{1,n})$ соответствующей квадратичной формы W_1 удовлетворяют условию (14). 5. При разрывных логических законах (6), (7) изменения параметров ψ_i^x, ψ_i^y процесса на решениях исходной системы (1) – (8), (11) при $\forall x_0 \in \Omega_0$ справедливы условия: 1) заданная функция $Z(t,V)$ удовлетворяет неравенству $\Phi(t,x(t)) \le Z(t,V(t))$, $\forall t \in T$; 2) в $T \subset I$ существует неотрицательная ограниченная функция $\omega(t)$, удовлетворяющая оценке $|\Phi_1(t,x(t),F)| \le M\omega(t)$, $\forall t \in T$. 6. Существует ограниченное верхнее решение $\bar{z}(t)=\bar{z}(t,t_0,z_0)$ задачи Коши сравнения (15), (16), которое при заданных функции $\sigma(t)$ (15), значении V_0 (16) и условиях $0 < z_0 \le b$, $b = \text{const} > 0$, удовлетворяет в области T свойству $[\,\bar{z}(t)+\sigma(t)]\mu_1^{-1} \le \eta(t)$, $t \in T$. 7. Множества $C_{z_0} = \{x : V(t,x) \le z_0\}$, Ω_0 удовлетворяют условию $\Omega_0 \subset C_{z_0}$ при $t = t_0$.

Тогда справедливы утверждения: 1. При всех значениях внутренних параметров из диапазонов областей (3), (4), разрывных законах изменения коэффициентов ψ_i^x, ψ_i^y (6), (7), возмущающих воздействиях из класса F_m и при $\forall x_0 \in \Omega_0$ (16) исходный вынужденный нестационарный динамический процесс (1) – (8), (11) является технически устойчивым по мере ρ на заданном ограниченном промежутке времени $T \subset I$. 2. Пусть нестационарная задача Коши (1) – (8), (11) обладает заданными выше свойствами ее правых частей в любом промежутке времени $T \subseteq I$. Тогда процесс (1) – (8), (11) технически устойчив по мере ρ на бесконечном интервале I, если условия 1–7 теоремы выполняются на любом промежутке $T \subseteq I$. 3. Если дополнительно справедливо условие $\bar{z}(t)+\sigma(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то процесс (1) – (8), (11) асимптотически технически устойчив по мере ρ.

Доказательство. Для полной производной dV/dt функции (13) в силу (1) на решениях исходного процесса получаем

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d\beta(t)}{dt}V(t) + \exp[\beta(t)]\frac{1}{\theta}W(t) + \exp[\beta(t)]\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} b_m x_i(t) \times$$
$$\times\left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{a}_i - a_i(t))x_i(t) - \sum_{i=1}^{n}\psi_i^x x_i(t) + \sum_{i=0}^{m-1}\left(d_i(t)+\psi_i^y\right)\frac{d^i F(t)}{dt^i} + \frac{d^m F(t)}{dt^m}\right] \tag{17}$$

Из условий теоремы для (17) вдоль решений процесса (1) – (8), (11) имеем $dV(t)/dt \le Z(t,V(t)) + M\omega(t)$, $t \in T$. Используя функцию $k(t) = V(t) - \sigma(t)$, определяем неравенство

$$dk(t)/dt \le Z(t,k(t)+\sigma(t)) \tag{18}$$

Из (18) следует система сравнения (15), (16), которая в области T имеет [5,6] ограниченное верхнее решение $\bar{z}(t)$. Находим $k(t) \le \bar{z}(t)$, $t \in T$. Отсюда, учитывая (18), получаем

$$V(t) \le \bar{z}(t) + \sigma(t), \quad t \in T \tag{19}$$

Так как имеем свойство: $\bar{z}(t) + \sigma(t) \le \mu_1^{-1}\left[\bar{z}(t) + \sigma(t)\right]$ при $\forall t \in T \subset I$, то из (19) при (16) находим последовательность неравенств [3,5,6]

$$V(t) \le P(t) \le \eta(t), \quad t \in T, \quad P(t) \equiv \bar{z}(t) + \sigma(t) \tag{20}$$

$$V_0 \le b, \quad t_0 \in T \tag{21}$$

вдоль решений системы (1)–(8), (11). Из (19)–(21) получаем свойство включения множеств

$$C_{P(t)} \subset \Omega(t), \quad C_{P(t)} = \{x : V(t,x) \le P(t), \quad \forall t \in T, \ P(t) \equiv \bar{z}(t) + \sigma(t)\} \tag{22}$$

Следовательно, при условиях 7 теоремы в соответствии с (22) свойство технической устойчивости для решений процесса (1) - (8), (11) имеет место по отношению к мере $\rho[x]$ и функции Ляпунова $V(t,x)$ (13), т.е. при условиях теоремы и справедливости включения (22) исходный процесс (1) - (8), (11 технически устойчив по заданных мере $\rho[x]$ и функции Ляпунова $V(t,x)$ (13). Для V (13) при любых ограниченных значениях x и $\forall t \in T$ справедливы оценки $\mu_1 \rho(x) \le V(t,x) \le \mu_n \rho(x) \le \rho(x)$ при произвольном радиусе меры $\rho(x)$ и, следовательно, при переменном радиусе, удовлетворяющем условию: $\rho(x) \le \eta(t)$. Отсюда, используя вдоль решений процесса (1) – (8), (11) свойства (19) и неравенство $\mu_1 \rho[x(t)] \le V(t, x(t))$, находим на решениях $\rho[x(t)] \le \eta(t)$, $\forall t \in T$. Отсюда и из условий 7 теоремы окончательно получаем утверждение 1 теоремы при всех $x_0 \in \Omega_0$ (16) и при всех значениях параметров из диапазонов (3), (4).

Пусть при $t \to +\infty$ справедливо мажорирование $P(t) \le \eta(t)$. Тогда на любом интервале времени $T \subseteq I$ и $\forall x_0 \in \Omega_0$ получаем утверждение 2 и при условии $z(t) + \sigma(t) \to 0$, $t \to +\infty$ утверждение 3 теоремы. Исходная система (1) – (8), (11) будет неустойчива в T или в I по мере ρ, когда $P(t) \to +\infty$ при $t \in T$ или $t \in I$. При $\chi \ge 1$ теорема будет справедлива при замене в условиях величины $\chi\mu_1$ на μ_1.

Предположим, в области I при каждом значении параметров в диапазонах (4), (5) справедливы неравенства:

$$\frac{d\beta(t)}{dt}\bar{V}_1(x) + W(x) \le 0$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{a}_i - a_i(t))x_i - \sum_{i=1}^{n}\psi_i^x x_i + \sum_{i=0}^{m-1}\left(d_i(t) + \psi_i^y\right)\frac{d^i F(t)}{dt^i} + \frac{d^m F(t)}{dt^m}\right]\sum_{i=1}^{n} b_{in} x_i \le 0$$

$t \in I$. Тогда процесс (1) – (8), (11) устойчив по Ляпунову по мере ρ при параметрах из областей (3), (4).

Используя результаты из [2], убедимся, что в заданной нестационарной системе с переменной структурой (1) – (8), (11) возможен скользящий режим в случае $F=0$ и $F \neq 0$ при дополнительных условиях вида (5.123)-(5.130) из [2], налагаемых на величину скалярного произведения вектора фазовой скорости на нормаль к гиперплоскости S ($\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$):

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} N_i x_i + \sum_{i=0}^{m-1} \left(d_i(t) + \psi_i^y\right) \frac{d^i F(t)}{dt^i} + \frac{d^m F(t)}{dt^m}$$

$$N_i = c_{i-1} - a_i - \psi_i^x - c_{n-1} c_i + a_i c_i, \;\; c_0 = 0.$$

После попадания фазовой точки x процесса (1) – (8), (11) в область $_{HP(t)} \subset \Omega(t)$ (22) в соответствии с (20), (21) выходная координата $\varphi(t)$ системы будет отслеживать [1,2,5] задающее воздействие $f_0(t)$ с требуемой точностью по мере ρ на заданном интервале времени T или в I. Теорема доказана.

3. Техническая устойчивость вынужденных движений в нестационарной системе с переменной структурой второго порядка. Рассматривается нестационарная динамическая система с переменной структурой второго порядка [2]

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \;\; t \in T$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b_1(t)\psi^x x_1 + \left[d_1(t) + b_1(t)\psi^y\right]F(t) + d_2(t)\frac{dF(t)}{dt} \quad (23)$$

$$u = \psi^x x_1 - \psi^y y \quad (24)$$

$$\psi^x = 2^{-1}\left\{\alpha^x\left[1 + \operatorname{sign}(x_1 s)\right] + \beta^x\left[1 - \operatorname{sign}(x_1 s)\right]\right\}, \; \alpha^x > 0, \; \beta^x < 0, \; s = x_2 + cx_1$$

$$\alpha^x, \beta^x, c = \text{const}; \; c > 0 \quad (25)$$

$$\psi^y = 2^{-1}\left\{\alpha^y\left[1 + \operatorname{sign}(sH)\right] + \beta^y\left[1 - \operatorname{sign}(sH)\right]\right., \;\; H \equiv y + a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2$$

$$\alpha^y, \beta^y = \text{const} \quad (26)$$

$$\alpha^y < -Aa_{21}(t) - a_{22}(t), \;\; \beta^y > Aa_{21}(t) - a_{22}(t) \quad (27)$$

$$a_1(t) = \frac{\dot a_{11}(t)a_{21}(t) + a_{11}(t)a_{22}(t) + \psi^y a_{11}(t)}{a_{12}(t)a_{21}(t)}$$

$$a_2(t) = \frac{a_{12}(t)\psi^y + a_{12}(t)a_{22}(t) + a_{11}(t)a_{21}(t) + \dot a_{12}(t)a_{21}(t)}{a_{12}(t)a_{21}(t)}; \; \dot a_{11}(t) = \frac{da_{11}(t)}{dt}$$

$$\dot a_{12}(t) = \frac{da_{12}(t)}{dt}; \; b_1(t) = \frac{1}{a_{21}(t)a_{12}(t)}; \; \mathrm{d}_1(t) = \frac{a_{22}(t)}{a_{21}(t)a_{12}(t)}, \; \mathrm{d}_2(t) = \frac{1}{a_{21}(t)}$$

Здесь имеем: $F = a_{11}(t)g(t) + a_{12}(t)\dot g(t) + f(t)$, $\dot g = dg(t)/dt$, $d\varphi(t)/dt = y - f(t)$, где $f(t)$–внешнее возмущающее воздействие. В случае возможности измерения $f_0(t)$ будем полагать, что закон для ψ^y в (23) имеет вид [2]

$$\psi^y = 2^{-1}\{\alpha^y[1+\operatorname{sign}(Fs)]+\beta^y[1-\operatorname{sign}(Fs)]\} \qquad (28)$$

Постоянный коэффициент A в (27) характеризует класс входных возмущающих и задающих воздействий, которые должны удовлетворять условию $|dF(t)/dt|/|F(t)|\le A$, $A=\text{const}>0$. Пусть $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \dot a_{11}, \dot a_{12}$ удовлетворяют условиям:

$$a_{11\min}\le a_{11}(t)\le a_{11\max},\ \ a'_{11\min}\le\frac{da_{11}(t)}{dt}\le a'_{11\max},\ \ 0<a_{12\min}\le a_{12}(t)\le a_{12\max} \qquad (29)$$

$$a'_{12\min}\le\frac{da_{12}(t)}{dt}\le a'_{12\max},\ \ 0<a_{21\min}\le a_{21}(t)\le a_{21\max},\ \ a_{22\min}\le a_{22}(t)\le a_{22\max}$$

где

$a_{11\min}, a_{11\max}, a_{12\min}, a_{12\max}, a_{21\min}, a_{21\max}, a_{22\min}, a_{22\max}, a'_{11\min}, a'_{11\max}, a'_{12\min}, a'_{12\max}$ –известные константы. Процесс (23) – (29) исследуется при заданных начальных условиях

$$x_1(t)=x_1^0,\ \ x_2(t)=x_2^0,\ \ \forall x_0=(x_1^0,x_2^0)\in\Omega_0 \qquad (30)$$

Имеем частный случай логического закона для ψ^y вида

$$\psi^y = 2^{-1}\{\alpha^y[1+\operatorname{sign}(ys)]+\beta^y[1-\operatorname{sign}(ys)]\} \qquad (31)$$

Для системы (23) – (30) используем функцию Ляпунова

$$V(t,x)=\exp[\beta_1(t)]\left[\frac{b_{11}}{2\theta_1}x_1^2+\frac{b_{12}}{\theta_1}x_1x_2+\frac{b_{22}}{2\theta_1}x_2^2\right],\theta_1=\varepsilon_2\Lambda,\ \Lambda=\max_{t\in T}\{\exp[\beta_1(t)]\}$$

$$b_{11}>0,\ \ b_{11}b_{12}-b_{12}^2>0,\ \ D_1=(b_{11}-b_{22})^2+4b_{12}^2 \qquad (32)$$

$$\varepsilon_1=\left(b_{11}+b_{12}-\sqrt{D_1}\right)/4,\ \ \varepsilon_2=\left(b_{11}+b_{12}+\sqrt{D_1}\right)/4,\ \ \varepsilon_1>1,\ \ \varepsilon_2>1,\ \ \varepsilon_2>\varepsilon_1$$

$$0<\mu_2\exp[\beta_1(t)]\le 1,\ \ \forall t\in T,\ \ \mu_2=\varepsilon_2/\theta$$

Для $\forall x_0\in\Omega_0$ имеем: $V(t,x)\le r_1^2\equiv\gamma$, $\gamma=\text{const}>0$, $t\ge t_0$. В силу системы (23) определяем

$$\frac{dV(t,x)}{dt}=\frac{d\beta(t)}{dt}V(t,x)+\exp[\beta(t)]\frac{1}{\theta_1}\left[-x_1^2-x_2^2-Q_1(t)x_1x_2-(Q_1(t)x_1^2+\right.$$

$$\left.+Q_2(t)x_2^2+Q_4(t)x_1x_2)+Q_5(t,x)\right],\ Q_1(t)=b_{12}a_1(t)+b_{12}b_1(t)\psi^x-1$$

$$Q_2(t)=b_{22}a_2(t)-b_{11}-1,\ \ Q_3(t)=b_{12}a_2(t)+b_{22}a_1(t)-b_{11}$$

$$Q_4(t)=1+(b_{22}-b_{12})b_1(t)\psi^x-b_{11}$$

$$Q_5(t,x)=(b_{12}x_1+b_{22}x_2)\left[(d_1(t)+b_1(t)\psi^y)F(t)+d_2(t)(dF(t)/dt)\right],$$

$$\Phi(t,x)\equiv\frac{d\beta(t)}{dt}V(t,x)-\exp[\beta(t)]\frac{1}{\theta_1}\left(x_1^2+x_2^2+Q_1(t)x_1x_2\right)$$

$$\Phi_1(t,x,F)\equiv Q_5(t,x)-\left[Q_1(t)x_1^2+Q_2(t)x_2^2+(Q_3(t)+Q_4(t))x_1x_2\right].$$

Пусть в T задана ограниченная функция $\eta(t)$: $\eta(t)=e^{-\left(t^2-t_0^2\right)}\left[b+\overline{M}e^{-t_0^2}\int_{t_0}^{t}e^{\tau^2}\overline{\omega}_1(\tau)d\tau\right]$ и выполняются условия

$\Phi(t, x(t)) \leq -tV(t, x(t))$, $t \in T$, $|\Phi_1(t, x(t), F)| \leq M\overline{\omega}_1(t)$, $t \in T$,

$M = \text{const} > 0$, $\mu_1^{-1} M \leq \overline{M}$; $z(t_0) = z_0 \geq V_0 \equiv \max\limits_{x_0 \in \Omega_0} V(t_0, x_0)$, $\quad 0 < z_0 \mu_1^{-1} \leq b$,

$t_0 \in T$.

Вдоль решений исходной системы (23) – (30) имеем последовательность неравенств

$$V(t) \leq P(t) \leq \eta(t),\ P(t) \equiv \bar{z}(t) + \sigma(t),\ t \in T \subset I$$

$$\bar{z}(t) = z_0 e^{-\left(t^2 - t_0^2\right)} + Me^{-\left(t^2 - t_0^2\right)} \int_{t_0}^{t} e^{\left(t^2 - t_0^2\right)} \overline{\omega}_1(\tau) d\tau - \sigma(t)$$

а также оценку относительно меры: $\rho[x(t)] \leq \eta(t), t \in T \subset I$. Следовательно, исходный нестационарный процесс (23) – (30) при $\forall x_0 \in \Omega_0$ технически устойчив в области $T \subset I$ по мере $\widetilde{\rho}$. При $t \to +\infty$ имеем $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 0$, если интеграл $\int_{t_0}^{t} e^{\tau^2} \overline{\omega}_1(\tau) d\tau$ – ограниченная величина в области I, т.е. в этом случае процесс (23) – (30) технически устойчив по мере ρ в области I и, более того, асимптотически технически устойчив по мере ρ. При условиях $0 < Q_1(t) < 2$, $Q_1 Q_2 - Q_3 Q_4 > 0$, $\dfrac{d\beta(t)}{dt} \overline{V}_1(x) + Q_5(t, x) \leq 0$ система (23) – (30) устойчива по Ляпунову относительно меры ρ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука, 1987.– 226 с.
2. Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А. и др. Теория систем с переменной структурой. М: Наука, 1970. 592 с.
3. Абгарян К.А. Устойчивость движения на конечном интервале // Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1976.– Т. 3.– С.43 – 127. (Итоги науки и техники).
4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.
   М.: Наука, 1985.– 224 с.
5. Matviychuk K.S. On technical stability of forsed automatic control systems with variable structure. – Int. Appl. Mech., 2001, v. 37, N 3, p. 544 – 557.
6. Matviychuk K.S. Technical stability of disconnected control systems with a continual set of initial perturbations. – Int. Appl. Mech., 2000, v. 36, N 11, p. 1142 – 1155.

Институт механики им. С.П.Тимошенко
НАН Украины, г. Киев, Украина

Поступила в редакцию
17.01.2002