ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 534.1: 539.1

О ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ БАЛКИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Габриелян М.С., Мовсисян Л.А.

Մ.Ս. Գաբրիելյան, Լ.Ա. Մովսիսյան
Հեծանի շարժման ուշացումով ստաբիլիզացման և ղեկավարման մասին

Առաձգական հեծանի օրինակի վրա ուսումնասիրվում են համակարգի շարժման ստաբիլիզացիայի և ղեկավարման խնդիրները, երբ ժամանակի տվյալ մոմենտին ազդող ղեկավարումը օբյեկտին է հասնում որոշ ուշացումով, բայց որում, վերջինս միշտ մնում է հաստատուն: Երկու խնդիրների համար էլ որպես մինիմիզացվող ֆունկցիոնալներ ընդունված են դասական դեպքերը:
Դիտարկված օրինակում ցույց է տրված տարբեր դրվագների տարբերությունը:

M.S. Gabrielyan, L.A. Movsisyan
On Stabilization and Control With Lagging of Motion of Beam

На примере упругой балки исследуются задачи стабилизации и управления движением системы, когда внешнее воздействие до объекта доходит с некоторым опозданием, при этом оно не меняется со временем. В качестве минимизируемых функционалов берутся обычные классические случаи. На примере системы с одной степенью свободы показано различие выражений управляющих сил при различных постановках задачи.

Обычно стабилизация и управление движением осуществляется с самого начала движения [1]. Аналогичным образом поступают и для подобных задач для упругих систем [2,3 и др.]. Однако, как следует из характера подобных задач, с момента времени наблюдения движением и до того как реакция дойдет до объекта, необходимо некоторое время, т.е. „сигнал" доходит с некоторым запаздыванием. В настоящей статье управление и стабилизация рассматриваются с этой точки зрения. Следует отметить, что существуют различные постановки задач управления и стабилизации с запаздыванием. Настоящая постановка, наверное, самая простая, когда запаздывание входит только в управляющее воздействие, причем оно одинаковое для всех моментов времени. По существу, управлять или стабилизировать систему, начиная с какого-то момента времени, или условие, при котором действующая сила доходит до объекта с запаздыванием, имеют одинаковый эффект. Возможно, в плане математики нового здесь немного. А разве это так важно? Думается, что с точки зрения практики роль такой постановки бессомненна. Для конкретности изложение проводится для упругой балки.

1. Уравнение движения балки запишем в виде

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F(x,t-t_1) \tag{1.1}$$

с соответствующими краевыми и начальными условиями

$$w\big|_{t=0}=a(x),\quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=b(x) \tag{1.2}$$

Предполагается, что время запаздывания t_1 одинаковое для всех моментов и входит в выражение действующей нагрузки (1.1), при этом $F(x,t-t_1)=0$ при $t<t_1$.

Перейдем к безразмерным величинам:

$$u=\frac{w}{\sqrt{S}},\quad y=\frac{x}{l},\quad \tau=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\frac{t}{l},\quad \Phi=\frac{F}{E\sqrt{S}} \tag{1.3}$$

тогда (1.1) превратится

$$i^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}=\Phi(y,\tau-\tau_1) \tag{1.4}$$

Здесь $i=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{I}{S}}$, i^{-1} – гибкость стержня $\tau_1=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\frac{t_1}{l}$, S – площадь поперечного сечения, l – длина стержня.

Если искать решение (1.4) в виде

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}f_m(\tau)X_m(y)$$

где $X_m(y)$ – собственные функции, удовлетворяющие сответственным краевым условиям, то для $f_m(\tau)$ получим

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2}+\omega_m^2 f_m=\varphi_m(\tau-\tau_1) \tag{1.6}$$

Здесь $\omega_m=i\lambda_m^2$ – собственные частоты, λ_m – соответствующие собственные значения для заданных краевых условий,

$$\varphi_m=\frac{1}{Q_m}\int_0^1\Phi(y,\tau-\tau_1)X_m(y)dy,\quad Q_m=\int_0^1 X_m^2(y)dy \tag{1.7}$$

Начальными условиями для (1.6) по (1.2) будут

$$f_m(0)=a_m,\quad \dot{f}_m(0)=b_m \tag{1.8}$$

В дальнейшем, если нет необходимости подчеркивать номер гармоники и если не создается путаница, для краткости индекс m опустим.

2. Сначала рассмотрим задачу стабилизации. Систему (1.6) в отдельности изучим для $\tau\le\tau_1$ и $\tau>\tau_1$. Итак, для $\tau\le\tau_1$

$$f = a\cos\omega\tau + \frac{b}{\omega}\sin\omega\tau \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \omega^2 f = \Psi(\xi), \quad \xi = \tau - \tau_1, \quad \Psi(\xi) = \varphi(\tau - \tau_1) \tag{2.2}$$

с начальными условиями

$$f(0) = \bar{a} = a\cos\omega\tau_1 + \frac{b}{\omega}\sin\omega\tau_1$$

$$\dot{f}(0) = \bar{b} = -a\omega\sin\omega\tau_1 + b\cos\omega\tau_1 \tag{2.3}$$

Постановка задачи и условие оптимальности обычные [4], т.е. стабилизировать движение (2.2), (2.3) при минимуме функционала

$$I^{(1)} = \int_0^1\int_0^\infty [\,Э + \Psi^2(y,\xi)]\,d\xi\,dy \tag{2.4}$$

Под Э понимается безразмерная полная энергия,

$$Э = \frac{1}{2}\left[\left(i\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right] \tag{2.5}$$

На основании (1.5) минимум (2.4) равносильно минимуму каждой гармоники, т.е.

$$I_m^{(1)} = \int_0^\infty \left[\gamma_m f_m^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{f}_m\right)^2 + \psi_m^2(\xi)\right] d\xi \tag{2.6}$$

$$\gamma_m = \frac{1}{2}\int_0^1 [X''_m(y)]^2 dy \Big/ \int_0^1 X_m^2(y)\,dy$$

Искомый ψ ищется в виде

$$\psi = A_{11} f^2 + 2A_{12} f \dot{f} + A_{22}\dot{f}^2 \tag{2.7}$$

с условиями $A_{11} > 0$, $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$. Уравнение Ляпунова-Беллмана будет [4]

$$\begin{aligned} &\left(A_{11} f + A_{12}\dot{f}\right)\dot{f} + \left(A_{12} f + A_{22}\dot{f}\right)\left(\psi - \omega^2 f\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma f^2 + \frac{1}{2}\dot{f}^2 + \psi^2\right) = 0 \\ &\psi + \left(A_{12} f + A_{22}\dot{f}\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Подставляя последнее в первое уравнение и требуя, чтобы в полученной квадратичной форме коэффициенты были нулями, получим

$$A_{11} = \Omega\sqrt{\Omega - \gamma}, \quad A_{12} = \Omega - \omega^2$$

$$A_{22} = \sqrt{\frac{1}{2} + \Omega - \omega^2}, \quad \Omega = \sqrt{\omega^4 + \gamma} \tag{2.9}$$

Легко видеть, что условия $A_{11} > 0$ и $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$ выполняются, следовательно, $\psi > 0$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi} < 0$ и стабилизирующая функция будет

$$\psi = -A_{12}f - A_{22}\dot{f} \tag{2.10}$$

коэффициенты которой определяются выражениями по (2.9), при этом

$$f = \exp(-p_1\xi)(c_1 \sin p_2\xi + c_2 \cos p_2\xi)$$
$$\dot{f} = \exp(-p_1\xi)[(p_2c_1 - p_1c_2)\cos p_2\xi - (c_1p_1 + c_2p_2)\sin p_2\xi] \tag{2.11}$$

где

$$p_1 = \frac{1}{2}A_{22}, \quad p_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3\Omega + \omega^2 - \frac{1}{2}}$$

Постоянные c_i согласно (2.3) определяются

$$c_1 = \frac{\bar{b} + \bar{a}p_1}{p_2}, \quad c_2 = \bar{a} \tag{2.12}$$

Искомая оптимальная функция получится из (2.10) заменой на $\tau - \tau_1$, а

$$\Phi(y, \tau - \tau_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(\tau - \tau_1)X_m(y) \tag{2.13}$$

3. Задача оптимального управления также ставится обычным образом. Решение системы (1.6), удовлетворяющее начальным условиям (1.8), будет

$$f = a\cos\omega\tau + \frac{b}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{1}{\omega}\int_{\tau_1}^{\tau}\varphi(\vartheta - \tau_1)\sin\omega(\tau - \vartheta)d\vartheta \tag{3.1}$$

Требуется, чтобы в определенный момент времени $\tau = T$ прогиб и скорость балки принимали определенные значения

$$u(y, T) = u_1(y) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m X_m(y)$$
$$\frac{\partial u(y, T)}{\partial\tau} = u_2(y) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m X_m(y) \tag{3.2}$$

при этом, минимизируя некоторый функционал. Согласно (1.5), (3.1) и (3.2) имеем

$$Z_1 = Y_1 \sin\omega T_1 + Y_2 \cos\omega T_1$$
$$Z_2 = Y_2 \sin\omega T_1 - Y_1 \cos\omega T_1 \tag{3.3}$$

Здесь приняты обозначения

$$Z_1 = \int_0^{T_1}\psi(\xi)\cos\omega\xi d\xi, \quad Z_2 = \int_0^{T_1}\psi(\xi)\sin\omega\xi d\xi, \quad T_1 = T - \tau_1 \tag{3.4}$$

$$Y_1 = \omega\left(c - a\cos\omega\tau - \frac{b}{\omega}\sin\omega\tau\right)$$

$$Y_2 = d + a\omega\sin\omega\tau - b\cos\omega\tau$$

В качестве минимизируемых функционалов будем изучать два случая. Если критерий качества брать

$$I^{(2)}(y,\tau)=\int_0^1\int_{\tau_1}^{T}\Phi^2(\tau-\tau_1)d\tau\, dy \tag{3.5}$$

то в конечном счете он сводится к минимуму

$$I_m^{(2)}=\int_0^{T_1}\psi_m^2(\xi)d\xi \tag{3.6}$$

и поставленная задача сводится к нахождению минимума (3.6) при условиях (3.4). Такую задачу можно решать как типичную изопериметрическую задачу (такой способ будет применен в следующем пункте). Однако для общности она будет изучена при помощи проблемы моментов [4], тем более, что при другом критерии качества, который будет использован ниже, только таким способом можно добиться результата.

Решение поставленной задачи ищется обычным способом [5] и оно есть

$$\psi(\xi)=\mu_1\cos\omega\xi+\mu_2\sin\omega\xi \tag{3.7}$$

$$\mu_1=\frac{Z_1B_{22}-Z_2B_{12}}{\Delta},\qquad \mu_2=\frac{Z_2B_{11}-Z_1B_{12}}{\Delta}$$

$$B_{11}=\frac{1}{2}T_1-\frac{1}{4\omega}\sin 2\omega\tau_1,\qquad B_{21}=\frac{1}{2\omega}\sin^2\omega\tau_1$$

$$B_{22}=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2\omega}\sin^2\omega T_1$$

$$\Delta=B_{11}Z_2^2-2B_{12}Z_1Z_2+B_{22}Z_1^2$$

Искомая управляющая нагрузка определится по (2.13), но уже с новыми (3.7)

$$\varphi_m(\tau-\tau_1)=\psi_m(\xi).$$

Теперь рассмотрим другой функционал качества:

$$I^{(3)}=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{T_1}|\psi_m(\xi)|d\xi \tag{3.8}$$

Условие минимума (3.8) эквивалентно условию минимума

$$I_m^{(3)}=\int_0^{T_1}|\psi_m|d\xi \tag{3.9}$$

и управление осуществляется через сосредоточенные силы следующим образом: минимальное значение нормы $r_m(h)=\max\limits_{0\le\xi\le T_1}|h_m(\xi)|$ определяется, как

$$r_m^0 = \min_{\sum_{i=1}^{2} n_i Z_i} \max_{0\le\xi\le T_1} \left|\alpha_m \cos\omega_m \xi + \beta_m \sin\omega_m \xi\right| > 0 \tag{3.10}$$

так как $\cos\omega_m\xi$ и $\sin\omega_m\xi$ независимые. Пусть указанный максимум достигается в точках $\xi_k^0 \in [0, T_1]$ ($k = 1, 2, ..., s$, число s конечное, так как функция $\alpha\cos\omega\xi + \beta\sin\omega\xi$ аналитическая). Тогда,

$$\psi^0(\xi) = \sum_{k=1}^{s} P_k \delta(\xi - \xi_k) \tag{3.11}$$

где $\delta(\cdot)$ – функция Дирака. Числа P_k должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^{s} P_k \cos\omega\xi_k = Z_1, \quad \sum_{k=1}^{s} P_k \sin\omega\xi_k = Z_2 \tag{3.12}$$

Следует отметить, что всегда существуют числа P_k, удовлетворяющие условиям (3.12), но они не всегда определяются единственным образом.

4. Представляет еще определенный интерес также задача следующего типа. В заданный момент времени привести какую-нибудь точку в заданное положение. На примере предыдущей задачи это выглядит так (точка $y = y_0$ в момент $\tau = T$):

$$u(y_0, T) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(T) X_m(y_0) = u_0 \tag{4.1}$$

Учитывая выражение (3.1), соотношение (4.1) можно переписать

$$\int_0^{T_1} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(\xi)}{\omega_m} \sin\omega_m (T_1 - \xi) X_m(y_0) \right] d\xi = h \tag{4.2}$$

$$h = u_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\omega_m T + \frac{b_m}{\omega_m} \sin\omega_m T \right) X_m(y_0)$$

Если в качестве минимизируемого функционала брать (3.5) при условии (4.2), то подобную задачу можно рассматривать как изопериметрическую. Тогда

$$\psi_m(\xi) = \frac{2h X_m(y) \sin\omega_m (T_1 - \xi)}{\omega_m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(y_0)}{\omega_n^2} \left[T_1 - \frac{\sin 2\omega_n T_1}{2\omega_n} \right]} \tag{4.3}$$

суммарная оптимальная нагрузка будет по (2.13) с новыми (4.3).

5. На одном простом примере покажем разницу в выражениях управляющей нагрузки при различных подходах, когда осуществляется управление. Пусть системе с одной степенью свободы сообщается начальное отклонение (для балки отклонение по одной полуволне). В

момент времени $t = \frac{2\pi}{\omega} = T$ (период колебания) отклонение будет x_0.

Теперь потребуем, чтобы при $t = T$ отклонение было нулевым.

Вот выражения управляющих сил при различных постановках:

а) управление начинается с самого начала движения –

$$\varphi(t) = \frac{x_0\omega^2}{\pi}\sin\omega t, \quad 0 \le t \le T \tag{5.1}$$

б) сила действует с момента $t = 0$, но доходит до объекта через $t = T/4$, или действует, начиная с момента $t = T/4$. Тогда,

$$f\left(t - \frac{T}{4}\right) = \frac{4x_0\omega^2}{3\pi}\cos\omega\left(t - \frac{T}{4}\right), \text{ или}$$

$$\psi(\xi) = \frac{4x_0\omega^2}{3\pi}\cos\omega\xi, \quad 0 \le \xi \le \frac{3T}{4} \tag{5.2}$$

Интересно, что в обоих случаях суммарная сила $\int\limits_0^T \varphi(t)dt$ одинаковая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян М.С. Об оптимальной стабилизации механических систем мощности котинуума // Уч. записки ЕГУ. 1975. №2. С. 49-57.
2. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. Возвращение к вопросу управления движением упругой балки // Изв. НАН Армении. Механика. 1998. Т.51. №3. С. 23-27.
3. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению движением упругих систем // Изв. РАН. МТТ. 1999. №6. С.146-152.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.
5. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // I-IV, – Автоматика и телемеханика. 1960. Т.21. №№4,5,6; 1961. Т.22. №4; 1962. Т.23. №11.

Ереванский государственный университет
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
12.12.2001