

УДК 539.3

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН  
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ  
СДВИГОВ И ОБЖАТИЯ<sup>1)</sup>

Киракосян Р.М.

Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի հիմնական հավասարումները ընդլայնական սահմանի և սեղմման հաշվառմամբ

Առաջարկվում է միջին հարթության նկատմամբ սխեմարիկ փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի հավասարումների մի տարբերակ, որը հաշվի է առնում ինչպես ընդլայնական սահմանի, այնպես էլ ընդլայնական սեղմման ազդեցությունը հաշվաչին մեծությունների վրա: Բերվում է հավասարաչափ բաշխված նորմալ թեղի ազդեցության տակ գտնվող գծայնորեն փոփոխական հաստության սալ-գույտու ծանց խնդրի լուծումը եզրերի հողակապորեն հեծման դեպքում: Կատարվում է ստացված արդյունքների վերլուծություն:

R.M. Kirakosyan

Fundamental Equations of Orthotropic Plates of Variable Thickness Taking into Account the Transversal Shears and Normal Compression

Вопросы учета поперечных сдвигов и обжатия для пластин постоянной толщины достаточно обстоятельно и полно рассмотрены в [1]. Аналогичные вопросы для многослойных оболочек переменной жесткости обсуждены в [2] и [3]. В [4] предложен один вариант учета поперечных сдвигов для ортотропных пластин переменной толщины. В настоящей работе делается попытка учитывать влияние как поперечных сдвигов, так и обжатия на напряженно-деформированное состояние ортотропных пластин переменной толщины.

1. Рассмотрим прямоугольную пластину переменной толщины  $h$  из прямолинейно-ортотропного линейно-упругого материала. Лицевые поверхности пластины симметричны относительно срединной плоскости. Пластину отнесем к системе декартовых координат  $x, y, z$ , оси которых параллельны главным направлениям ортотропии материала. Координатную плоскость  $xOy$  совместим со срединной плоскостью пластины. Пусть на пластину действуют поверхностные нагрузки, проекции интенсивностей которых на координатные оси, приведенные к единице площади срединной плоскости, составляют  $X^{\pm}, Y^{\pm}, Z^{\pm}$ . Знаками "+" и "-" будем отмечать величины, относящиеся к поверхностям пластины  $z = +h/2$  и  $z = -h/2$  соответственно. Условия опирания и нагружения краев пластины произвольны.

Попытаемся получить основные уравнения, способные учитывать влияние поперечных сдвигов и обжатия на напряженно-деформированное состояние рассматриваемой пластины.

Будем считать, что поперечные касательные напряжения  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  по толщине пластины изменяются по законам квадратных трехчленов

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3, \quad \tau_{yz} = \psi_1 + z\psi_2 + z^2\psi_3 \quad (1.1)$$

<sup>1)</sup> Работа доложена на международной конференции "ISAAC Conference on Complex Analysis, Differential Equations and related topics. September 17-21, 2002, Yerevan, Armenia"

где  $\Phi_i, \Psi_i$  — неизвестные функции координат  $x, y$ .

Из условия обеспечения корректности дифференциальных уравнений равновесия сплошной среды следует, что при (1.1) основные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  должны иметь линейное, а нормальное напряжение  $\sigma_z$  — кубическое распределение по толщине пластины. Проинтегрировав третье дифференциальное уравнение равновесия сплошной среды с учетом (1.1) и соответствующих поверхностных условий пластины, находим:

$$\sigma_z = Z_1 + \frac{h}{4} \left( \Phi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \Psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) - z \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) + \frac{h^2 - 4z^2}{8} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right) - \frac{z^3}{3} \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} \right), \quad Z_1 = \frac{Z^+ - Z^-}{2} \quad (1.2)$$

Из обобщенного закона Гука ортотропного тела [1] для основных напряжений получается:

$$\sigma_x = B_{11}\epsilon_x + B_{12}\epsilon_y - A_1\sigma_z, \quad \sigma_y = B_{12}\epsilon_x + B_{22}\epsilon_y - A_2\sigma_z, \quad \tau_{xy} = B_{66}\gamma_{xy} \quad (1.3)$$

Здесь

$$A_1 = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12}, \quad A_2 = a_{23}B_{22} + a_{13}B_{12} \quad (1.4)$$

$B_{ij}$  — параметры, которые выражаются через упругие постоянные материала  $a_{ij}$  по известным формулам [1].

Поскольку распределение напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  по толщине должно быть линейным, то в (1.3) для  $\sigma_z$  вместо (1.2) следует брать его первые три члена, то есть сохранить только главные вклады плоской задачи и задачи изгиба —

$$\sigma_z = Z_1 + \frac{h}{4} \left( \Phi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \Psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) - z \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) \quad (1.5)$$

Этому соответствует линейное распределение деформации  $\epsilon_z$ , а следовательно, квадратичное распределение нормального перемещения  $u_z$  —

$$u_z = w + zw_1 + z^2w_2 \quad (1.6)$$

Здесь  $w$  — прогиб срединной плоскости пластины, а  $w_1$  и  $w_2$  — функции координат  $x, y$ , подлежащие определению.

Поскольку тангенциальные перемещения по толщине пластины должны иметь линейное распределение, то с использованием (1.1), геометрических соотношений и обобщенного закона Гука [1] для них получим

$$u_x = u - z \left( \frac{\partial w}{\partial x} - a_{55}\Phi_1 \right), \quad u_y = v - z \left( \frac{\partial w}{\partial y} - a_{44}\Psi_1 \right) \quad (1.7)$$

Здесь  $u, v$  — перемещения срединной плоскости по осям  $x, y$ . Они представляют главный вклад плоской задачи, а члены с множителем  $z$  — главный вклад задачи изгиба пластины.

Важно отметить, что выражения (1.7) отнюдь не означают принятие гипотезы о линейном распределении тангенциальных перемещений по

толщине пластины. Они только означают, что с целью построения простейшей теории, для перемещений  $u_x$  и  $u_y$  следует брать только первые члены выражений  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ . Разумеется, что в рамках этой же теории для других величин необходимо будет брать другое количество членов. Забегая вперед, отметим, что в выражениях напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  участвуют функции  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\psi_1, \psi_2$ , фигурирующие в первых двух членах  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ . В выражениях же поперечных сдвигов  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ , которые получаются из соответствующих соотношений закона Гука, участвуют уже все три члена (1.1).

Учитывая (1.5) и (1.7), из (1.3) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - A_1 \left[ Z_1 + \frac{h}{4} \left( \varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] - \\ &- z \left[ B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55} B_{11} + A_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{11} + A_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \\ \sigma_y &= B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - A_2 \left[ Z_1 + \frac{h}{4} \left( \varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] - \\ &- z \left[ B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55} B_{12} + A_2) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{22} + A_2) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \\ \tau_{xy} &= B_{66} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Имея в виду (1.5) и (1.8), путем интегрирования соответствующего соотношения закона Гука, с учетом (1.6) для функций  $w_1$  и  $w_2$  получим

$$\begin{aligned} w_1 &= A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial v}{\partial y} - \Delta_1 \left[ Z_1 + \frac{h}{4} \left( \varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \\ w_2 &= -\frac{1}{2} \left( A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Delta_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \Delta_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{13} A_1 + a_{23} A_2 - a_{33}, \quad \Delta_2 = a_{13} (a_{55} B_{11} + A_1) + a_{23} (a_{55} B_{12} + A_2) - a_{33} \\ \Delta_3 &= a_{13} (a_{44} B_{12} + A_1) + a_{23} (a_{44} B_{22} + A_2) - a_{33} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Члены выражения (1.6)  $zw_1$  и  $z^2 w_2$  характеризуют изменение нормального перемещения  $u_z$  по толщине пластины, обусловленное учетом обжатия. Судя по формулам (1.9), нетрудно убедиться в том, что член  $zw_1$  относится к плоской задаче пластины и в значение  $u_z$  он вносит поправку порядка  $h^2/l^4$ , где  $l$  — характерный размер пластины в плане. Член же  $z^2 w_2$  относится к задаче изгиба и его поправка имеет порядок

$h^2/l^2$ . Поэтому с целью построения простейшей теории изгиба следует пренебречь членом  $ZW_1$  и для  $u_z$  взять:

$$u_z = w - \frac{z^2}{2} \left( A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Delta_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \Delta_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \quad (1.11)$$

Из поверхностных условий [4], с учетом (1.1) и (1.8), получим:

$$\begin{aligned} h\varphi_2 = & \frac{1}{4 + A_1(\partial h/\partial x)^2 + A_2(\partial h/\partial y)^2} \left\{ \left[ 4 + A_2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] X_2 - A_1 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} Y_2 - 4A_1 \frac{\partial h}{\partial x} Z_1 + \right. \\ & + \left[ 4B_{11} + B_{11}A_2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 - B_{12}A_1 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{66} \left[ 4 + A_2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 - A_1 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \times \\ & \times \left. \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + \left[ 4B_{12} + B_{12}A_2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 - B_{22}A_1 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \\ h\psi_2 = & \frac{1}{4 + A_1(\partial h/\partial x)^2 + A_2(\partial h/\partial y)^2} \left\{ \left[ 4 + A_1 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] Y_2 - A_2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} X_2 - 4A_2 \frac{\partial h}{\partial y} Z_1 + \right. \\ & + \left[ 4B_{22} + B_{22}A_1 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - B_{12}A_2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{66} \left[ 4 + A_1 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - A_2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \times \\ & \times \left. \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \left[ 4B_{12} + B_{12}A_1 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - B_{11}A_2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \quad (1.12) \end{aligned}$$

$$h^2\varphi_3 = 4(X_1 - \varphi_1) - h \left\{ \left[ B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55}B_{11} + A_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \right. \right.$$

$$\left. - (a_{44}B_{12} + A_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \frac{\partial h}{\partial x} + B_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right\}$$

$$h^2\psi_3 = 4(Y_1 - \psi_1) - h \left\{ \left[ B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55}B_{12} + A_2) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \right. \right.$$

$$\left. - (a_{44}B_{22} + A_2) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \frac{\partial h}{\partial y} + B_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right\}$$

Здесь

$$X_1 = (X^+ - X^-)/2, \quad Y_1 = (Y^+ - Y^-)/2,$$

$$X_2 = X^+ + X^-, \quad Y_2 = Y^+ + Y^-, \quad Z_2 = Z^+ + Z^- \quad (1.13)$$

С учетом (1.8) для усилий и моментов пластины имеем

$$\begin{aligned}
T_x &= h \left[ \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_3 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha_4 \left( X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right] \\
T_y &= h \left[ \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_3 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \beta_4 \left( X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right] \\
S_{xy} &= B_{66} h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
N_x &= \frac{1}{3h} \left[ h^2 (2\varphi_1 + X_1) + 3 \left( M_x \frac{\partial h}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \\
N_y &= \frac{1}{3h} \left[ h^2 (2\psi_1 + Y_1) + 3 \left( M_y \frac{\partial h}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \\
M_x &= -\frac{h^3}{12} \left[ B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55} B_{11} + A_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{12} + A_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \\
M_y &= -\frac{h^3}{12} \left[ B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55} B_{12} + A_2) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{22} + A_2) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \\
M_{xy} &= -\frac{h^3}{12} B_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= B_{11} - \alpha_4 \left[ B_{11} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + B_{12} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right], \quad \beta_1 = B_{12} - \beta_4 \left[ B_{11} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + B_{12} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \\
\alpha_2 &= B_{12} - \alpha_4 \left[ B_{12} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + B_{22} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right], \quad \beta_2 = B_{22} - \beta_4 \left[ B_{12} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + B_{22} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \\
\alpha_3 &= -2B_{66} \alpha_4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \beta_3 = -2B_{66} \beta_4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \\
\alpha_4 &= \frac{A_1}{4 + A_1 (\partial h / \partial x)^2 + A_2 (\partial h / \partial y)^2}, \quad \beta_4 = \frac{A_2}{4 + A_1 (\partial h / \partial x)^2 + A_2 (\partial h / \partial y)^2}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Подставляя выражения внутренних усилий и моментов (1.14) в уравнения равновесия дифференциального элемента срединной плоскости пластины, после некоторых преобразований приходим к следующим системам разрешающих дифференциальных уравнений:

а) Система плоской задачи

$$\begin{aligned}
 & h \left[ \alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha_3 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + (\alpha_2 + B_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial(\alpha_1 h)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \\
 & + \left( \alpha_3 \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial(\alpha_2 h)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \\
 & = -X_2 + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \alpha_4 h \left( X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right] \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & h \left[ \beta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta_3 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (\beta_1 + B_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial(\beta_2 h)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \\
 & + \left( \beta_3 \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial \beta_3}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial(\beta_1 h)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = \\
 & = -Y_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \beta_4 h \left( X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right]
 \end{aligned}$$

б) Система задачи изгиба

$$\begin{aligned}
 & h^2 \left[ \left( B_{11} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left( B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4B_{66} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \\
 & - h \left[ \left[ 8 + h \left( a_{55} B_{11} + A_1 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left( a_{55} B_{12} + A_2 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \right. \\
 & + \left. \left[ 8 + h \left( a_{44} B_{12} + A_1 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left( a_{44} B_{22} + A_2 \right) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] - \\
 & - 2B_{66} h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \left( a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) - 16 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \varphi_1 + \frac{\partial h}{\partial y} \psi_1 \right) = \\
 & = 4 \left[ 3Z_2 + h \left( \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right) - X_1 \frac{\partial h}{\partial x} - Y_1 \frac{\partial h}{\partial y} \right] \\
 & h^3 \left[ B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + 2h \left[ \left( B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \\
 & - h^2 \left[ \left( a_{55} B_{11} + A_1 \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + B_{66} a_{55} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \left( a_{44} B_{12} + a_{44} B_{66} + A_1 \right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right] - \quad (1.17) \\
 & - 2h \left[ \left( a_{55} B_{11} + A_1 \right) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + B_{66} a_{55} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \left( a_{44} B_{21} + A_1 \right) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \right. \\
 & + \left. B_{66} a_{44} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right] + 8\varphi_1 = 8X_1
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& h^2 \left[ B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + 2h \left[ \left( B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \\
& - h^2 \left[ (a_{44} B_{22} + A_2) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + B_{66} a_{44} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + (a_{55} B_{12} + a_{55} B_{66} + A_2) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} \right] - \\
& - 2h \left[ (a_{44} B_{22} + A_2) \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + B_{66} a_{44} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + (a_{55} B_{12} + A_2) \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \right. \\
& \left. + B_{66} a_{55} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right] + 8\psi_1 = 8Y_1
\end{aligned}$$

Имея в виду (1.14) из (1.1) для касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  получим:

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} &= \frac{12z^2 - h^2}{2h^2} X_1 + \frac{z}{h} X_2 + \frac{z}{h^2} \left( T_x \frac{\partial h}{\partial x} + S_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{SN_x}{J} + \\
& + \frac{h}{4J} \left( 1 - \frac{sh}{J} \right) \left( M_x \frac{\partial h}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\
\tau_{yz} &= \frac{12z^2 - h^2}{2h^2} Y_1 + \frac{z}{h} Y_2 + \frac{z}{h^2} \left( T_y \frac{\partial h}{\partial y} + S_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{SN_y}{J} + \\
& + \frac{h}{4J} \left( 1 - \frac{sh}{J} \right) \left( M_y \frac{\partial h}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad s = \frac{h^2 - 4z^2}{8}, \quad J = \frac{h^3}{12}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Эти формулы совпадают с аналогичными формулами, соответствующими классической теории пластин переменной толщины. Учет поперечных сдвигов и обжатия сказывается только на значениях внутренних усилий и моментов. Выражения же поперечных касательных напряжений через силовые факторы пластины остаются без изменений.

2. Система уравнений плоской задачи (1.16) имеет четвертый порядок, а система уравнений задачи изгиба (1.17) — шестой. В соответствии с этим на каждой стороне края пластины необходимо ставить по два условия для плоской задачи, по три — для задачи изгиба. Эти условия можно сформулировать традиционно [4], используя выражения усилий и моментов (1.14) и перемещений (1.7), (1.11).

Ради простоты рассмотрим только один из возможных вариантов условий шарнирного опирания края  $x = \text{const}$ :

а) Условия плоской задачи

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial y} - \alpha_4 \left( X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) = 0, \quad (T_x = 0) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (S_{xy} = 0)$$

б) Условия задачи изгиба

$$B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55} B_{11} + A_1) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{12} + A_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0, \quad (M_x = 0)$$

$$2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{35} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0, \quad (M_{xy} = 0) \quad (2.2)$$

$$w - \frac{z_0^2}{2} \left( A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Delta_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \Delta_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) = 0, \quad \left( u_z \Big|_{z=z_0} = 0 \right)$$

Здесь  $-h/2 \leq z_0 \leq h/2$  — линия опирания края пластины.

Таким образом, определение напряженно-деформированного состояния ортотропной пластины переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия сводится к нахождению пяти функций  $u, v, w, \varphi_1, \psi_1$ , для чего необходимо проинтегрировать уравнения плоской задачи (1.16) и задачи изгиба (1.17) при соответствующих краевых условиях.

Нетрудно заметить, что поправки от поперечных сдвигов и от нормального напряжения  $\sigma_z$  имеют одинаковый порядок  $h^2/l^2$ . В том, что эти поправки должны иметь одинаковый порядок, можно убедиться из того факта, что члены с  $a_{44}, a_{35}$ , представляющие влияние поперечных сдвигов и члены с  $A_1, A_2$ , представляющие влияние напряжения  $\sigma_z$ , как в разрешающих уравнениях, так и в краевых условиях задачи фигурируют одинаково, как отдельные слагаемые. А то, что поправка от поперечных сдвигов имеет порядок  $h^2/l^2$ , общеизвестно.

Полагая  $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ , получим случай, при котором влияние обжатия пренебрегается и учитывается только влияние поперечных сдвигов.

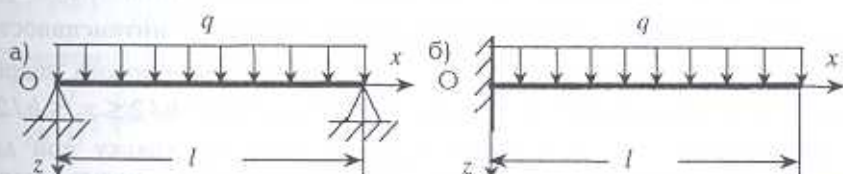


Таблица 1

По предлагаемой теории	а) $\frac{5ql^4}{32B_{11}h^3} \left[ 1 + 2 \frac{6}{5(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} - \nu \frac{6}{5(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} \right]$
По теории [1]	а) $\frac{5ql^4}{32B_{11}h^3} \left[ 1 + 2 \frac{24}{25(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} - \nu \frac{24}{25(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} \right]$
По предлагаемой теории	б) $\frac{3ql^4}{2B_{11}h^3} \left[ 1 + 2 \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} + \nu \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} \right]$
По теории [1]	б) $\frac{3ql^4}{2B_{11}h^3} \left[ 1 + 3 \frac{2}{5(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} + \nu \frac{2}{5(1-\nu)} \frac{h^2}{l^2} \right]$

3. В табл. 1 представлены значения максимальных прогибов срединной плоскости изотропной пластины — полосы постоянной толщины для двух случаев. Эти значения подсчитаны на основе предлагаемой теории при  $z_0 = 0$  и по теории [1].



Внутри больших скобок фигурируют три слагаемые. Первая из них, т.е. "1", относится к классической теории пластин, вторая слагаемая представляет вклад поперечного сдвига, а последняя слагаемая — вклад нормального напряжения  $\sigma_z$ . Данные таблицы приводят к следующим заключениям.

1. Для каждой задачи качественный характер поправки от  $\sigma_z$  по обеим теориям одинаков. Причем, для шарнирно-опертой полосы (случай а)) учет  $\sigma_z$  приводит к уменьшению, а для консольной полосы (случай б)) — к увеличению максимального прогиба.

2. По обеим теориям поправки от поперечного сдвига в несколько раз превосходят поправки от  $\sigma_z$ .

3. Отношение величин поправок от поперечного сдвига к величине поправок от  $\sigma_z$  по предложенной теории в обоих случаях составляет  $2/\nu$ . По теории же [1] это отношение равно в случае а)  $2/\nu$ , а в случае б)  $3/\nu$ .

Таким образом, в рассмотренных случаях значения поправок от  $\sigma_z$  по обеим теориям как по характеру, так и по величине мало отличаются друг от друга. Несмотря на это, естественно ожидать, что в общем случае картина может существенно измениться в зависимости от типа задачи, характера анизотропии и изменения толщины пластины.

4. В качестве приложения рассмотрим пластину — полосу шириной  $l$ , толщина которой изменяется по закону

$$h = h_0 + h_1 x, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.1)$$

Здесь  $h_0$  и  $h_1$  — заданные постоянные. Пусть пластина — полоса несет равномерно распределенную нормальную нагрузку интенсивности  $q$ , приложенную на поверхности  $z = -h/2$ . Пластина — полоса шарнирно оперта вдоль линий  $x = 0, z = z_0$  и  $x = l, z = z_0$ , где  $-h/2 \leq z_0 \leq h/2$ .

Ограничимся рассмотрением задачи изгиба, поскольку при данной нагрузке и краевых условиях деформирование носит характер доминирующего изгиба. Примем обезразмеривающие обозначения

$$x = l\bar{x}, \quad z = h_0\bar{z}, \quad h_0/l = s, \quad h_1/s = \gamma, \quad H = h_0H, \quad \bar{H} = 1 + \gamma\bar{x}, \quad w = h_0\bar{w} \quad (4.2)$$

$$u_z = h_0\bar{u}_z, \quad q = B_{11}\bar{q}, \quad a_{55}B_{11} = \chi, \quad \bar{\Delta}_2 = B_{11}\Delta_2, \quad \phi_1 = B_{11}\bar{\phi}_1, \quad \beta = 1 + \gamma$$

Третье дифференциальное уравнение системы (1.17) удовлетворяется тождественно, а ее первые два уравнения в обозначениях (4.2) принимают вид:

$$H \frac{d\bar{\phi}_1}{d\bar{x}} + 2\gamma\bar{\phi}_1 = -\frac{3\bar{q}}{2s} \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left\{ H^2 \left[ s \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - (\chi + A_1) \right] \frac{d\bar{\phi}_1}{d\bar{x}} \right\} + \frac{8\bar{\phi}_1}{s^2} = 0$$

Краевые условия будут

$$\left[ s \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - (\chi + A_1) \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right] \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} = 0, \quad \left( M_x \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} = 0 \right) \quad (4.4)$$

$$\left[ 2\bar{w} - s\bar{z}_0^2 \left( A_1 s \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \bar{\Delta}_2 \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right) \right] \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} = 0, \quad \left( u_z \Big|_{\substack{\bar{x}=0, \bar{z}=\bar{z}_0 \\ \bar{x}=1, \bar{z}=\bar{z}_0}} = 0 \right)$$

Общее решение системы (4.3) имеет вид:

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{C_1}{H^2} - \frac{3\bar{q}}{4\gamma s} \quad (4.5)$$

$$\bar{w} = \frac{6\bar{q}}{h_1^4} [(1+H) \ln H - \gamma \bar{x}] + C_1 \frac{4 - (\chi + A_1) h_1^2}{h_1^3 H} - C_2 \frac{s}{h_1^2} \ln H + C_3 \bar{x} + C_4$$

Удовлетворив краевым условиям (4.4), для постоянных интегрирования  $C_i$  находим:

$$C_1 = \frac{3\bar{q}\beta}{4h_1}, \quad C_2 = -\frac{6\bar{q}\beta}{sh_1^2}$$

$$C_4 = \frac{C_1}{h_1^3} \left\{ [4 - (\chi + A_1) h_1^2] (A_1 h_1 \bar{z}_0^2 - 1) + h_1^4 \bar{\Delta}_2 \bar{z}_0^2 \right\} + \frac{A_1 s \bar{z}_0^2 C_2}{2}$$

$$C_3 = \frac{3A_1 \bar{z}_0^2}{h_1 s \beta^2} \bar{q} + \frac{6\bar{q}}{h_1^4} [\gamma - (1 + \beta) \ln \beta] - \frac{C_1}{h_1^3 \beta^3} \left\{ [4 - (\chi + A_1) h_1^2] (\beta^2 - A_1 h_1^2 \bar{z}_0^2) - h_1^4 \bar{\Delta}_2 \bar{z}_0^2 \right\} + \frac{C_2 s}{2h_1^2 \beta^2} (A_1 h_1^2 \bar{z}_0^2 + 2\beta^2 \ln \beta) - C_4 \quad (4.6)$$

С учетом (1.11), (4.2) и (4.5) для нормального перемещения получим:

$$\bar{u}_z = -\frac{3\bar{q}}{sh_1^4 H^2} \left\{ 2sH^2 [\gamma \bar{x} - (1+H) \ln H] + A_1 h_1^3 \bar{x} \bar{z}^2 \right\} + C_3 \bar{x} + C_4 + \frac{C_1}{h_1^3 H^3} \left\{ (H^2 - A_1 h_1^3 \bar{x} \bar{z}^2) [4 - (\chi + A_1) h_1^2] - h_1^4 \bar{\Delta}_2 \bar{z}^2 \right\} - \frac{C_2 s}{2h_1^2 H^2} (2H^2 \ln H + A_1 h_1^2 \bar{z}^2)$$

5. Рассмотрим численный пример для изотропной и ортотропной полос линейно-переменной толщины. В табл. 2 и 3 представлены значения безразмерной координаты сечения максимального прогиба срединной плоскости полосы  $\bar{x}_m$ . Представлены также значения относительного нормального перемещения  $u_z$  как для точек срединной плоскости ( $\bar{z} = 0$ ), так и для крайних точек сечения  $\bar{x}_m$  ( $\bar{z} = \pm 0.5$ ). Рассмотрены случаи как пренебрежения, так и учета поперечного сдвига и обжатия при двух положениях линии шарнирного опирания краев полосы. В одном случае линия опирания находится на срединной плоскости ( $\bar{z}_0 = 0$ ), а в другом — на одной из лицевых поверхностей ( $\bar{z}_0 = \pm 0.5$ ). Результаты, полученные без учета поперечного сдвига, помещены в столбцах  $\chi = 0$ .

Табл. 2 относится к случаю изотропного материала с коэффициентом Пуассона  $\nu = 1/3$ , при котором  $A_1 = -0.5$ ,  $\bar{\Delta}_2 = -2.25$ ,  $\chi = 3$ . Табл. 3 относится к случаю ортотропного материала, модуль Юнга которого в

поперечном направлении в 3 раза меньше, чем в направлении оси  $x$ . Для этого материала  $A_1 = -1$ ,  $\bar{\Delta}_2 = -5$ ,  $\chi = 5$ . В обоих случаях геометрические параметры полосы одинаковы: относительная толщина на тонком краю равна  $1/6$ , а на толстом  $-1/4$  ( $s = 1/6$ ,  $h_1 = 1/12$ ,  $\gamma = 1/2$ ). Для иллюстрационного примера выбор такой, достаточно толстой пластины — полосы оправдывается тем, что в этом случае поправки от поперечного сдвига и обжатия окажутся существенно ощутимыми, что позволяет судить об их качественном и количественном влиянии. Приведенные в таблицах результаты соответствуют нагрузке  $\bar{q} = 5 \cdot 10^{-3}$ , что не важно, поскольку значения  $\bar{x}_m$  не зависят от  $\bar{q}$ , а значения  $\bar{u}_z$  прямо пропорциональны ей.

Таблица 2

		$\bar{z}_0 = 0$		$\bar{z}_0 = \pm 0.5$		
		$\chi = 0$	$\chi = 3$	$\chi = 0$	$\chi = 3$	
$\bar{u}_z \cdot 10^2$	$\bar{x}_m$	Без обжатия	0.4646	0.4629	0.4646	0.4629
		С обжатием	0.4649	0.4632	0.4654	0.4633
	$\bar{z} = 0$	Без обжатия	53.700	61.877	53.700	61.877
		С обжатием	52.338	60.513	52.102	60.419
	$\bar{z} = \pm 0.5$	Без обжатия	53.700	61.877	53.700	61.877
		С обжатием	51.628	59.690	51.392	59.596

Таблица 3

		$\bar{z}_0 = 0$		$\bar{z}_0 = \pm 0.5$		
		$\chi = 0$	$\chi = 5$	$\chi = 0$	$\chi = 5$	
$\bar{u}_z \cdot 10^2$	$\bar{x}_m$	Без обжатия	0.4646	0.4620	0.4646	0.4620
		С обжатием	0.4653	0.4624	0.4665	0.4626
	$\bar{z} = 0$	Без обжатия	53.700	67.328	53.700	67.328
		С обжатием	50.976	64.602	50.408	64.507
	$\bar{z} = \pm 0.5$	Без обжатия	53.700	67.328	53.700	67.328
		С обжатием	49.632	62.879	49.067	62.784

Анализ результатов таблиц показывает, что влияние анизотропии материала проявляется только количественно. Для случаев изотропной и анизотропной полос приходим к следующим, качественно одинаковым, заключениям:

1. Учет поперечного сдвига приводит к незначительному смещению сечения  $\bar{x}_m$  в сторону тонкого края пластины, а учет обжатия, наоборот — к незначительному смещению этого сечения в сторону толстого края.
2. Учет поперечного сдвига увеличивает максимальное значение  $\bar{u}_z$  в случае изотропного материала примерно на 15%, а в случае ортотропного материала — примерно на 25%. Учет обжатия, наоборот, уменьшает значение  $\bar{u}_z$ . Причем, это уменьшение для всех  $\bar{z}$  не превосходит в случае изотропного материала 4.2%, а в случае ортотропного — 8.5%. Интересно отметить, что в случае изотропной полосы отношение поправок, вносимых в значения максимального прогиба срединной плоскости от поперечного сдвига и обжатия,

совпадает с отношением этих поправок, соответствующих полосе постоянной толщины. На самом деле, при  $\bar{z} = 0$  отмеченная поправка только от поперечного сдвига составляет 15.23%, а только от обжатия – 2.54%, т.е. в  $2/\nu = 6$  раза меньше.

3. При учете обжатия изменение месторасположения линии опирания краев слабо влияет на значение  $\bar{u}_z$ . В случае изотропного материала это влияние составляет 0.5%, а для ортотропного – 1.2%. Причем большее значение  $\bar{u}_z$  получается, когда  $\bar{z}_0 = 0$ , т.е. при нахождении линии опирания на срединной плоскости.
4. При учете обжатия значение  $\bar{u}_z$  с удалением от срединной плоскости уменьшается. В случае изотропного материала это уменьшение не превосходит 1.4%, а в случае ортотропного – 2.4%.

В заключение отметим, что как влияние обжатия, так и обусловленное им влияние месторасположения линии опирания полосы могут существенно возрасти при уменьшении относительного модуля Юнга материала в поперечном направлении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова Думка, 1981. 544с.
3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Уточненные модели деформирования неоднородных анизотропных оболочек. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: 2002. С.155 – 166.
4. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. Гитутюн НАН РА, 2000. 122с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
16.09.2002