ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Белубекян В.М.

Վ. Մ. Բելուբեկյան
Սալի կայունության խնդրի մասին լայնական սահքի դեֆորմացիայի հաշվառումով

Իզոտրոպ սալերի կայունության խնդիրներում լայնական սահքերի հաշվառումը սովորաբար առաջացնում է, Կիրխհոֆի տեսության համեմատ, ճշգրտում, որը սալի հարաբերական հաստության քառակուսու կարգի անի: Սակայն որոշ եզրային պայմանների դեպքում այդ ճշգրտումը ավելի էական է: Հոդվածում ներկայացված են սալերի կայունության հավասարումները Վ.Վ. Վասիլևի կողմից առաջարկված առաջին կարգի ճշգրտված տեսության հիման վրա: Սալի ազատ եզրի մոտ տեղայնացված անկայունության օրինակի վրա քննարկված է երեք "բնական" եզրային պայմանների ազդեցությունը:

Vagharshak Belubekian
On the Problem of Stability of Plate under Account of Transverse Shears

Учет поперечных сдвигов в задачах устойчивости изотропных пластин в большинстве случаев приводит к поправке порядка квадрата относительной толщины по сравнению с результатами теории пластин Кирхгофа[1]. Однако для некоторых вариантов граничных условий на кромках пластины эта поправка оказывается более существенной. В статье приводятся уравнения устойчивости пластинки на основе варианта уточненной теории первого порядка, предложенного В.В. Васильевым [2]. На примере локализованной неустойчивости у свободного края пластинки обсуждается вклад трех естественных граничных условий.

Изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Пластинка сжата равномерно по сторонам $x = 0, a$ усилием $p = 2h\sigma_0$. Принимается наиболее простой вариант уравнений пространственной задачи устойчивости [3,4]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ik}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (i, j, k = 1,2,3) \tag{1.1}$$

в которых пренебрежены начальные деформации, а σ_{ij}^0 − начальные напряжения. В дальнейшем считается, что в начальном напряженном состоянии $\sigma_{11}^0 = -\sigma_0 = \text{const}$, а остальные компоненты напряжений тождественно равны нулю.

При сведении пространственной задачи устойчивости пластинки к двумерной, в основе берется уточненная теория первого порядка (теория типа Э. Рейснера) согласно варианту В.В.Васильева [2]. В частности, для перемещений принимается

$$u_1 = u - z\theta_1, \;\; u_2 = v - z\theta_2, \;\; u_3 = w \tag{1.2}$$

где $u_1, u_2, u_3, u, w, \theta_1, \theta_2$ являются функциями только координат x, y.

Выражения (1.2) отличаются от соответствующих выражений статьи [2] знаком при θ_1 и θ_2, что не имеет для дальнейшего никакого значения.

Процедура сведения к двумерным уравнениям, (в том числе и обозначения) идентична изложению цитируемой статьи. При этом, как обычно, задача обобщенного плоского напряженного состояния отделяется от задачи изгиба. Окончательно, уравнения статической устойчивости пластинки получаются в виде:

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}=\Delta w-\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

$$D\left[\frac{1-\nu}{2}\Delta\theta_1+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right)\right]+2Gh\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_1\right)-\frac{2h^3}{3}\sigma_0\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}=0 \tag{1.4}$$

$$D\left[\frac{1-\nu}{2}\Delta\theta_2+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right)\right]+2Gh\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\theta_2\right)-\frac{2h^3}{3}\sigma_0\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}=0 \tag{1.5}$$

где

$$D=2Eh^3/3(1-\nu^2),\; G=E/2(1-\nu)$$

Как показано в [2], структура системы уравнений типа (1.3)-(1.5) позволяет ввести потенциальные функции следующим образом:

$$\theta_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \theta_2=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.6}$$

После преобразования (1.6) система уравнений (1.3)-(1.5), после некоторых преобразований, приводится к виду:

$$\Delta w-\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\Delta\varphi=0 \tag{1.7}$$

$$\Delta\varphi-\frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{3(1-\nu)}{2h^2}(\varphi-w)=0 \tag{1.8}$$

$$\Delta\psi-\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{3}{h^2}\psi=0 \tag{1.9}$$

В итоге имеется система двух уравнений (1.7),(1.8) относительно искомых функций w, φ и автономное уравнение (1.9), определяющее функцию ψ. Из уравнений (1.7),(1.8) можно исключить функцию w:

$$\left(\Delta-\frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2}{\partial x}\right)\left(\Delta\varphi-\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)+\frac{2h\sigma_0}{D}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0 \tag{1.10}$$

Точно такое же уравнение получается и для w, если исключить φ. Из уравнения для w, при пренебрежении вторыми производными по x в скобках, следует уравнение статической устойчивости пластин по теории Кирхгофа. Однако решения задач предпочтительнее начинать с решения уравнения (1.10), после чего функция w определяется из уравнения (1.8) непосредственно.

2. В отличие от теории Кирхгофа, на краю пластинки должны быть заданы три граничные условия. В частности, при $x = \text{const}$ обычному условию шарнирного закрепления $(w = 0,\ M_1 = 0)$ здесь соответствуют два варианта условий [5]

$$w = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad M_1 = 0 \tag{2.1}$$

$$w = 0, \quad H = 0, \quad M_1 = 0 \tag{2.2}$$

Аналогично имеется два варианта граничных условий типа скользящего контакта [6]

$$\theta_1 = 0, \quad H = 0, \quad N_1 = P\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.3}$$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad N_1 = P\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.4}$$

Условия (2.3), (2.4) эквивалентны условиям:

$$\theta_1 = 0, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Наконец следует отметить, что уточненная теория дает возможность удовлетворить трем естественным граничным условиям

$$H = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = P\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{при} \quad x = \text{const} \tag{2.5}$$

В [7] приводятся восемь вариантов граничных условий для теории пластин Рейснера.

При решении системы уравнений (1.7) -(1.9) граничные условия следует выразить через функции w, φ, ψ. В частности, условия (2.5) будут иметь вид:

$$2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(w - \varphi) - \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial w}{\partial x}$$

В (2.3)-(2.6) считается, что сжимающее усилие не меняет направление при деформации пластинки (неследящая нагрузка).

Процедура решения задач потери устойчивости пластин по цилиндрической поверхности (форма изгиба пластины не зависит от координаты y) принципиально не отличается от решения соответствующих задач по теории Кирхгофа.

Дополнительное третье граничное условие в (2.1)-(2.4) приводит к тому, что решение уравнения (1.5) становится тождественно равным нулю $(\theta_2 \equiv 0)$.

В частности, если края пластинки $x = 0,\ a$ шарнирно закреплены, независимо от варианта граничных условий (2.1) или (2.2), для определения критической нагрузки получается формула

$$\frac{P_*}{D} = \left[1 + \frac{3-\nu}{3(1-\nu)}\left(\frac{\pi h}{a}\right)^2\right]^{-1} \frac{\pi^2}{a^2} \tag{2.7}$$

При выводе формулы (2.7) пренебрегается величина порядка $(h/a)^4$ по сравнению с единицей.

В случае, когда на всех сторонах прямоугольной пластинки имеют место условия шарнирного закрепления (2.1), но не (2.2), задача решается также просто и критическая нагрузка определяется из выражения [8]:

$$\frac{P_{mn}}{D} = \left[1 + \frac{3-\nu}{3(1-\nu)}\left(\mu_m^2 + \lambda_m^2\right)\pi^2 h^2\right]^{-1} \frac{\left(\mu_m^2 + \lambda_m^2\right)^2}{\mu_m^2} \tag{2.8}$$

Во всех указанных случаях поправка к результатам теории Кирхгофа имеет порядок квадрата относительной толщины пластинки. Необходимо отметить, что уравнения статической теории устойчивости пластин, аналогичные уравнениям (1.3)-(1.5), на основе теории С.А. Амбарцумяна, приведены в [9].

3. Рассматривается задача локализованной неустойчивости пластинки. Пусть полубесконечная пластинка по краям $x = 0,\ a$ шарнирно закреплена по варианту граничных условий (2.1). Край $y = 0$ свободен, т.е. $H = 0,\ M_2 = 0,\ N_2 = 0$, что при помощи функций w, φ, ψ записывается следующим образом:

$$2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (1-\nu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(w - \varphi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Требуется найти нетривиальное решение системы уравнений (1.7) – (1.9), удовлетворяющее граничным условиям (2.1), (3.1) и условиям затухания

$$\lim_{y\to\infty} w = 0\ ,\ \lim_{y\to\infty} \varphi = 0\ ,\ \lim_{y\to\infty} \psi = 0 \tag{3.2}$$

Система уравнений уравнений (1.7) – (1.9) имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям уравнений (2.1) вида

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \mu_m x \qquad \varphi = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(y) \sin \mu_m x \tag{3.3}$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y)\cos\mu_m x \qquad \mu_m = m\pi / a$$

Функция $g_m(y)$, удовлетворяющая условию затухания из (3.2), определяется из решения уравнения (1.10)

$$g_m = A_1 \exp(-p_1\mu_m y) + A_2 \exp(-p_2\mu_m y) \tag{3.4}$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные,

$$p_1 = \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha + \gamma_m^2}\right)^{1/2} \qquad p_2 = \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha + \gamma_m^2}\right)^{1/2} \tag{3.5}$$

$$\alpha = 1 - \frac{3-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0^2}{G^2}, \quad \beta = 1 - \frac{3-\nu}{4}\frac{\sigma_0}{G}, \qquad \gamma_m^2 = \frac{2h\sigma_0}{D\mu_m^2}$$

При этом затухающее по y решение (3.4) существует, если выполняется условие

$$0 < \gamma_m^2 < \alpha \tag{3.6}$$

Функции $f_m(y)$ определяются непосредственно из уравнения (1.8)

$$f_m = \left[1 + \frac{2}{1-\nu}\xi^2\left(1 - \frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G}\right)\right]g_m - \frac{2h^2}{3(1-\nu)}g_m'' \qquad \xi^2 = \frac{\mu_m^2 h^2}{3} \tag{3.7}$$

Решение для функции $q_m(y)$, удовлетворяющее условию затухания из (3.2), находится из уравнения (1.9) и имеет вид

$$q_m = B_1 \exp(-\eta y), \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{h}\sqrt{1-\xi^2} \tag{3.8}$$

Подстановка (3.3), (3.4), (3.7), (3.8), в граничные условия (3.1) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, B:

$$\begin{aligned} &p_1 A_1 + p_2 A_2 \mu - 0{,}5(1 + \mu_m^{-2}\eta^2)B_1 = 0 \\ &(\kappa - p_1^2)p_1 A_1 + (\kappa - p_2^2)p_2 A_2 \mu - 0{,}5(1-\nu)\xi^{-2}B_1 = 0 \\ &(p_1^2 - \nu)A_1 + (p_2^2 - \nu)A_2\mu - (1-\nu)\mu_m^{-1}\eta B_1 = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\kappa = 1 - \xi^2\gamma_m^2$

Приравняв нулю детерминант системы (3.9), после некоторых преобразований получим уравнение относительно $\gamma_m(y)$

$$(p_1 - p_2)K(\gamma_m) = 0 \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned} K(\gamma_m) = &\frac{1}{1-\nu}\left(\xi^2 + \sqrt{1-\xi^2}\right)\left[-p_1^2 p_2^2 + (\nu - \kappa)p_1 p_2 + \nu(p_1^2 + p_2^2) - \nu\kappa\right] - \\ &- p_1 p_2 - \nu + 2\xi\sqrt{1-\xi^2}\,p_1 p_2(p_1 + p_2) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Локализованная неустойчивость будет иметь место, если уравнение (3.10), а следовательно и уравнение

$$K(\gamma_m) = 0 \tag{3.12}$$

имеет решение, удовлетворяющее условию затухания (3.6).

Если в уравнении (3.12) положить $\xi = 0$, то получится уравнение, следующее из теории Кирхгофа [10]

$$1-\gamma_m^2 + 2(1-\nu)\sqrt{1-\gamma_m^2} - \nu^2 = 0, \quad 0 < \gamma_m^2 < 1 \tag{3.13}$$

которое всегда имеет решение при естественном ограничении $\nu \neq 0$.

Для выяснения вопроса существования действительного корня уравнения (3.12), определяются значения функции $K(\gamma_m)$ на концах интервала, задаваемого неравенствами (3.6). Имея в виду, что в теории пластин выполнение неравенства $\xi<0$ необходимо, нетрудно показать, что $K(0) < 0$. Из равенства

$$K(\sqrt{\alpha}) = \frac{\nu}{1-\nu}\left[\left(\xi^2 + \sqrt{1-\xi^2}\right)\left(1 - \frac{2\xi^2\alpha}{1-\nu}\right) - 1 + \nu\right] \tag{3.14}$$

получается что

$$K(\sqrt{\alpha}) > 0, \ \frac{2\nu(1-\nu)}{1+3\nu} > \xi^2 \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что условие (3.15) достаточно для существования корня уравнения (3.12), удовлетворяющего условию затухания (3.6). Необходимо отметить, что в отличие от (3.13), здесь при учете поперечных сдвигов, не для всех значений коэффициентов Пуассона ν имеет место локализованная неустойчивость.

Если в уравнении (3.12) пренебречь ξ^2 по сравнению с единицей, то можно получить приближенное решение в виде

$$\gamma_m^2 = (1-\nu)\left[1 + \nu + 2(1-\xi)\sqrt{(1-\nu)^2(1-\xi)^2 + \nu^2} - 2(1-\nu)(1-\xi)^2\right] \tag{3.16}$$

При $\xi = 0$ из (3.16) получается решение уравнения (3.13), соответствующее теории Кирхгофа. Следует отметить, что минимальной критической силе соответствует значение $m = 1$.

Табл 1.

$\xi \setminus \nu$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.99997	0.99940	0.99621	0.98533	0.95711
0.1	0.99996	0.99926	0.99541	0.98257	0.95041
0.3	0.9994	0.99880	0.99285	0.97440	0.93223

В табл.1 приводятся численные значения γ_m^2 по формуле (3.16) в зависимости от относительной толщины пластинки ξ и коэффициента Пуассона ν. Очевидно, что при больших значениях ξ отличие от теории

Кирхгоффа будет больше. Во всех случаях значения γ_m^2 близки к единице, что означает слабое затухание формы неустойчивости от свободного края пластинки. Полученые критические значения таблицы должны быть проверенны сравнением со значениями нагрузки, при которых нарушается условие прочности [11].

4. Показывается также, что при граничных условиях на краю $y=0$ типа шарнирного закрепления (2.1),(2.2) и типа скользящего контакта (2.3),(2.4) локализованная неустойчивость не имеет места.

Аналогичные результаты получены и по уточненной теории С.А.Амбарцумяна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Васильев В.В. Классическая теория пластин—история и современный анализ. //Изв. АН МТТ. 1998. N3. С. 46-58.
3. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1962. 431с.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругости. М.: Физматгиз, 1961. 340с.
5. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости . // ПММ. 1962. Т.19. N4. С.13-27.
6. Белубекян В.М., Белубекян М.В. О граничных условиях теории теории пластин. // Изв АН Армении. Механика. 1999. Т.52. N2. С.11-21.
7. Иванова Е.А. Асимптотический и численный анализ высокочастотных колебаний прямоугольных пластин. // Изв. РАН. МТТ. 1998. N2. С.163-174.
8. Мелконян А.П., Хачатрян А.А. Об устойчивости прямоугольных трансверсально изотропных пластинок // Прикладная механика. 1966. Т.2. Вып. 2. С.29-35.
9. Томашевский В.Т. К общей нелинейной теории устойчивости анизотропных оболочек и пластин. / Труды VI Всес. Конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966. С.753-761.
10. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. /В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван, ЕГУ. 1997. С.95-99.
11. Гнуни В.В. Проектирование сжатых осевой силой цилиндрических оболочек из композиционных материалов. Ереван: Изд. "Гитутюн". 2000. 118с.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
23.12.2002