ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №3, 2002 Механика

УДК 62.50

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Барсегян В. Р., Варданян С. В.

Վ.Ռ. Բարսեղյան, Ս.Վ. Վարդանյան

Տիեզերական սարքերի մոտեցման օպտիմալ ղեկավարման մի մոդել պատահական ազդեցությունների առկայությամբ

Դիտարկվում է արտաքին պատահական ազդեցությունների առկայությամբ տիեզերական սարքերի մոտեցման հարաբերական շարժման գծային հավասարումները: Մաքսիմումի ստոխաստիկ սկզբունքով բացահայտ տեսքով կառուցված են իրականացվելի ղեկավարող ազդեցությունները:

V.R. Barseghyan, S.V. Vardanyan

About One Model of Optimal Control by Space Aircraft Approachment in presence of casual perturbation

Рассматривается линеаризованное уравнение относительного движения космических аппаратов при внешних случайных возмущениях. С помощью стохастического принципа максимума в явном виде построены реализуемые управляющие воздействия.

1. Рассмотрим процесс сближения космического аппарата на орбите с неманеврирующим объектом, условно называемыми перехватчиком и целью [1]. Для описания относительного движения перехватчика и цели считаем их материальными точками и пренебрегаем возмущениями от несферичности Земли, атмосферными сопротивлениями и притяжением других небесных тел. Считая орбиту цели круговой, линеаризованные уравнения относительного движения перехватчика в орбитальной системе координат с началом, помещенным в центре масс цели, имеют вид [1]

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = u_1 + v_1 \\ &\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = u_2 + v_2 \\ &\ddot{z} + \omega^2 z = u_3 + v_3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где x, y, z — проекции вектора дальности от цели до перехватчика, u_1, u_2, u_3 — проекции управляющего ускорения, v_1, v_2, v_3 — проекции внешнего случайного возмущения (являются компонентами трехмерного векторного белого шума) на соответствующие оси орбитальной системы, ω — орбитальная угловая скорость цели, $\omega^2 = \mu / r_{ср}$, $r_{ср}$ — средний радиус сферического слоя.

Вводя обозначения

$$x = x_1, \; \dot{x}_1 = x_2, \; y = x_3, \; \dot{x}_3 = x_4, \; z = x_5, \; \dot{x}_5 = x_6$$

систему уравнений (1.1) можно написать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 2\omega x_4 + u_1 + v_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \\ &\dot{x}_4 = -2\omega x_2 + 3\omega^2 x_3 + u_2 + v_2, \; \dot{x}_5 = x_6, \quad \dot{x}_6 = -\omega^2 x_5 + u_3 + v_3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Требуется построить физическую реализуемую управляющую вектор-функцию $u(t)$, осуществляющую переход системы (1.2) из начального состояния $x(t_0)=x^0$ в конечное состояние $x(t_k)=x^k$, так, чтобы значение функционала

$$J_{0t_k}(u,t_0,t_k)=\int_{t_0}^{t_k}\left[u_1^2(\tau)+u_2^2(\tau)+u_3^2(\tau)\right]d\tau \tag{1.3}$$

принимало минимальное значение. Решение стохастической системы (1.2) с заданными начальными условиями будет [2]

$$\begin{aligned}
x_1(t)&=x_1^0+\left(\frac{4}{\omega}\sin\omega(t-t_0)-3(t-t_0)\right)x_2^0+6\left(-\sin\omega(t-t_0)+\omega(t-t_0)\right)x_3^0+\\
&+\frac{2}{\omega}\left(1-\cos\omega(t-t_0)\right)x_4^0+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{4}{\omega}\sin\omega(t-\tau)-3(t-\tau)\right)u_1(\tau)d\tau+\\
&+\frac{2}{\omega}\int_{t_0}^{t}\left(1-\cos\omega(t-\tau)\right)u_2(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{4}{\omega}\sin\omega(t-\tau)-3(t-\tau)\right)v_1(\tau)d\tau+\\
&+\frac{2}{\omega}\int_{t_0}^{t}\left(1-\cos\omega(t-\tau)\right)v_2(\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t)&=\left(4\cos\omega(t-t_0)-3\right)x_2^0+6\omega\left(1-\cos\omega(t-t_0)\right)x_3^0+2\sin\omega(t-t_0)x_4^0+\\
&+\int_{t_0}^{t}\left(4\cos\omega(t-\tau)-3\right)u_1(\tau)d\tau+2\int_{t_0}^{t}\sin\omega(t-\tau)u_2(\tau)d\tau+\\
&+\int_{t_0}^{t}\left(4\cos\omega(t-\tau)-3\right)v_1(\tau)d\tau+2\int_{t_0}^{t}\sin\omega(t-\tau)v_2(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3(t)&=\frac{2}{\omega}\left(\cos\omega(t-t_0)-1\right)x_2^0+\left(4-3\cos\omega(t-t_0)\right)x_3^0+\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-t_0)x_4^0+\\
&+\frac{2}{\omega}\int_{t_0}^{t}\left(\cos\omega(t-\tau)-1\right)u_1(\tau)d\tau+\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t}\sin\omega(t-\tau)u_2(\tau)d\tau+\\
&+\frac{2}{\omega}\int_{t_0}^{t}\left(\cos\omega(t-\tau)-1\right)v_1(\tau)d\tau+\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t}\sin\omega(t-\tau)v_2(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_4(t)&=-2\sin\omega(t-t_0)x_2^0+3\omega\sin\omega(t-t_0)x_3^0+\cos\omega(t-t_0)x_4^0-\\
&-2\int_{t_0}^{t}\sin\omega(t-\tau)u_1(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\cos\omega(t-\tau)u_2(\tau)d\tau-2\int_{t_0}^{t}\sin\omega(t-\tau)v_1(\tau)d\tau+\\
&+\int_{t_0}^{t}\cos\omega(t-\tau)v_2(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

$$x_5(t)=\cos\omega(t-t_0)x_5^0+\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-t_0)x_6^0+\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t}\sin\omega(t-\tau)u_3(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t}\sin\omega(t-\tau)v_3(\tau)d\tau$$

$$x_6(t)=-\omega\sin\omega(t-t_0)x_5^{\;0}+\cos\omega(t-t_0)x_6^{\;0}+\int_{t_0}^{t}\cos\omega(t-\tau)u_3(\tau)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\cos\omega(t-\tau)v_3(\tau)d\tau$$

2. С помощью стохастического принципа максимума [3] определим вектор оптимального управления для стохастической системы (1.2) с функционалом (1.3). Для этой цели рассмотрим вектор состояния, вводя координату

$$x_7=J_{0t}=\int_{t_0}^{t}\left[u_1^2(\tau)+u_2^2(\tau)+u_3^2(\tau)\right]d\tau \qquad (2.1)$$

определяемую управлением

$$\dot{x}_7=\sum_{i=1}^{3}u_i^2(t) \qquad (2.2)$$

Наложенные ограничения на конечное состояние системы представим в виде следующих уравнений связи:

$$P_i(x(t_k))=x_i(t_k)-x_i^k \quad (i=1,\ldots,6) \qquad (2.3)$$

Задача оптимального управления состоит в минимизации (2.1) (нахождение оптимального значения $x_7(t_k)$ в момент времени t_k) при условиях (2.3). Нахождение условного экстремума сводится к отысканию экстремума функционала вида

$$\Pi(t_k)=\dot{x}_7(t_k)+\sum_{i=1}^{6}\lambda_i P_i\big(x(t_k)\big) \qquad (2.4)$$

где λ_i – неопределенные множители, определяемые из условий (2.3).

Дифференцируя $\Pi(t)$ из (2.4) по $u_i(t)$, согласно (2.3) и (1.4), из системы уравнений

$$\frac{\partial\Pi(t)}{\partial u_i}=0 \qquad (i=1,2,3)$$

получим

$$u_1(t)=-\frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{4}{\omega}\sin\omega(\mathrm{t-t_0})-3(t-t_0)\right)-\frac{\lambda_2}{2}\left(4\cos\omega(\mathrm{t-t_0})-3\right)-$$

$$-\frac{\lambda_3}{\omega}\left(\cos\omega(\mathrm{t-t_0})-1\right)+\lambda_4\sin\omega(\mathrm{t-t_0})$$

$$u_2(t)=\frac{\lambda_1}{\omega}\left(\cos\omega(t-t_0)-1\right)-\lambda_2\sin\omega(t-t_0)-\frac{\lambda_3}{2\omega}\sin\omega(t-t_0)- \qquad (2.5)$$

$$-\frac{\lambda_4}{2}\left(2-\cos\omega(t-t_0)\right)$$

$$u_3(t)=-\frac{\lambda_5}{2\omega}\sin\omega(t-t_0)-\frac{\lambda_6}{2}\cos\omega(t-t_0)$$

Подставляя $u_i(t)$ из (2.5) в (1.4) и учитывая уравнения связи (2.3), получим следующие алгебраические уравнения относительно λ_i:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{4}a_{ij}\lambda_j=-b_i-F_i \quad (i=1,\ldots,4)\\&a_{55}\lambda_5+a_{56}\lambda_6=-b_5-F_5\\&a_{65}\lambda_5+a_{66}\lambda_6=-b_6-F_6\end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$a_{11}=-\frac{14}{\omega^3}m+\frac{l}{\omega^2}(3n+10)-\frac{3}{4}lh,\quad a_{22}=\frac{7}{\omega}m-3nl-\frac{9}{2}l$$

$$a_{33}=\frac{11}{4\omega^3}m-\frac{3}{4\omega^2}nl-\frac{2}{\omega^2}l,\quad a_{44}=\frac{3}{4}nl-\frac{5}{4\omega}m,\quad a_{55}=-\frac{1}{4\omega^3}m+\frac{1}{4\omega^2}nl$$

$$a_{66}=-\frac{1}{4\omega}m-\frac{1}{4}nl,\quad a_{12}=a_{21}=\frac{10}{\omega^2}(1-n)-\frac{3}{\omega}ml-\frac{9}{4}l^2$$

$$a_{41}=a_{14}=a_{32}=a_{23}=\frac{9}{2\omega^2}m-\frac{3}{\omega}l-\frac{3}{2\omega}nl$$

$$a_{13}=a_{31}=\frac{6}{\omega^2}(1-n)+\frac{3}{2\omega^2}ml-\frac{3}{2\omega}l^2,\quad a_{42}=a_{24}=\frac{3}{2}ml-\frac{3}{\omega}(1-n)$$

$$a_{34}=a_{43}=\frac{3}{4\omega}ml-\frac{2}{\omega^2}(1-n),\qquad a_{56}=a_{65}=-\frac{1}{4\omega}ml$$

$$b_1=x_1^0+\left(\frac{4}{\omega}m-3l\right)x_2^0+6(\omega l-m)x_3^0+\frac{2}{\omega}(1-n)x_4^0-x_1^k$$

$$b_2=(4n-3)x_2^0+6(\omega-n)x_3^0+2mx_4^0-x_2^k$$

$$b_3=\frac{2}{\omega}(n-1)x_2^0+(4-3n)x_3^0+\frac{1}{\omega}mx_4^0-x_3^k,\quad b_4=-2mx_2^0+3\omega mx_3^0+nx_4^0-x_4^k$$

$$b_5=nx_5^0+\frac{1}{\omega}mx_6^0-x_5^k,\qquad b_6=-\omega mx_5^0+nx_6^0-x_6^k$$

$$F_1=\int_{t_0}^{t_k}\left(\frac{4}{\omega}\sin\omega(t-\tau)-3(t-\tau)\right)v_1(\tau)d\tau+\frac{2}{\omega}\int_{t_0}^{t_k}\left(1-\cos\omega(t-\tau)\right)v_2(\tau)d\tau$$

$$F_2=\int_{t_0}^{t_k}\left(4\cos\omega(t-\tau)-3\right)v_1(\tau)d\tau+2\int_{t_0}^{t_k}\sin\omega(t-\tau)v_2(\tau)d\tau$$

$$F_3=\frac{2}{\omega}\int_{t_0}^{t_k}\left(\cos\omega(t-\tau)-1\right)v_1(\tau)d\tau+\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t_k}\sin\omega(t-\tau)v_2(\tau)d\tau$$

$$F_4 = -2\int_{t_0}^{t_4} \sin\omega(t-\tau)v_1(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t_4}\cos\omega(t-\tau)v_2(\tau)d\tau$$

$$F_5 = \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t_4}\sin\omega(t-\tau)v_3(\tau)d\tau, \quad F_6 = \int_{t_0}^{t_4}\cos\omega(t-\tau)v_3(\tau)d\tau$$

$m = \sin\omega(t_4 - t_0)$, $l = (t_4 - t_0)$, $n = \cos\omega(t_4 - t_0)$, $h = t_4^2 + 4t_4t_0 - 5t_0^2$

Решая системы (2.6), будем иметь

$$\lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \ (i = 1,\dots,4), \ \lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \ (j = 5,6), \quad (\Delta \neq 0, \ \bar{\Delta} \neq 0) \tag{2.7}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \bar{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -b_1 - F_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -b_2 - F_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -b_3 - F_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ -b_4 - F_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -b_1 - F_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & -b_2 - F_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & -b_3 - F_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & -b_4 - F_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -b_1 - F_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & -b_2 - F_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & -b_3 - F_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & -b_4 - F_4 & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -b_1 - F_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -b_2 - F_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -b_3 - F_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & -b_4 - F_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} -b_5 - F_5 & a_{56} \\ -b_6 - F_6 & a_{66} \end{vmatrix}, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} a_{55} & -b_5 - F_5 \\ a_{65} & -b_6 - F_6 \end{vmatrix}$$

Стохастическая функция Гамильтона имеет вид

$$H(x, u, \psi, v, t) = \sum_{i=1}^{7} \psi_i f_i \tag{2.8}$$

где функции f_i – правые части уравнений (1.2) и (2.2), а функции ψ_i удовлетворяют сопряженным уравнениям

$$\dot\psi_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1,\dots,7)$$

или

$$\dot\psi_1 = 0, \ \dot\psi_2 = -\psi_1 + 2\omega\psi_4, \ \dot\psi_3 = -3\omega^2\psi_4, \ \dot\psi_4 = -2\omega\psi_2 - \psi_3$$

$$\dot\psi_5 = \omega^2\psi_6, \ \dot\psi_6 = -\psi_5, \ \dot\psi_7 = 0 \tag{2.9}$$

Для (2.9) имеем конечные условия

$$\psi_i(t_k) = -\sum_{j=1}^{6} \lambda_i \frac{\partial P_j(x(t_k))}{\partial x_i} \quad (i = 1,\ldots,6), \quad \psi_7(t_k) = -1 \tag{2.10}$$

Решая (2.9) с условиями (2.10), будем иметь

$$\psi_1(t) = -\lambda_1$$

$$\psi_2(t) = -2\left(2\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{\omega}\right)\cos\omega(t - t_k) + 2\left(\frac{2\lambda_1}{\omega} - \lambda_4\right)\sin\omega(t - t_k) - 3\lambda_1(t - t_k) +$$

$$+ 3\lambda_2 + \frac{2}{\omega}\lambda_3$$

$$\psi_3(t) = 3\omega\left(2\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{\omega}\right)\cos\omega(t - t_k) - 3\omega\left(\frac{2\lambda_1}{\omega} - \lambda_4\right)\sin\omega(t - t_k) + 6\omega\lambda_1(t - t_k) -$$

$$-2\omega\left(3\lambda_2 + \frac{2}{\omega}\lambda_3\right)$$

$$\psi_4(t) = \left(\frac{2\lambda_1}{\omega} - \lambda_4\right)\cos\omega(t - t_k) + \left(2\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{\omega}\right)\sin\omega(t - t_k) - \frac{2\lambda_1}{\omega} \tag{2.11}$$

$$\psi_5(t) = -\lambda_5\cos\omega(t - t_k) - \lambda_6\omega\sin\omega(t - t_k)$$

$$\psi_6(t) = -\lambda_6\cos\omega(t - t_k) + \frac{\lambda_5}{\omega}\sin\omega(t - t_k)$$

Подставляя значения функции $\psi_i(t)$ из (2.11) в (2.8), вычисленное математическое ожидание функции Гамильтона обозначим

$$\hat{\mathrm{H}} = \mathrm{M}\{\mathrm{H}(x, u, \psi, \mathrm{v}, t)\}$$

Максимальное значение функции $\hat{\mathrm{H}}$ в соответствии с принципом максимума достигается за счет членов, зависящих от u_i. Поэтому для определения u_i потребуем, чтобы

$$\frac{\partial\hat{\mathrm{H}}}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

и для оптимальных управлений получим

$$u_1^0(t) = \left(\frac{2\bar{\lambda}_1}{\omega} - \bar{\lambda}_4\right)\sin\omega(t - t_k) - \left(2\bar{\lambda}_2 + \frac{\bar{\lambda}_3}{\omega}\right)\cos\omega(t - t_k) + \frac{3}{2}\bar{\lambda}_1(t_k - t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(3\bar{\lambda}_2 + \frac{2\bar{\lambda}_3}{\omega}\right)$$

$$u_2^0(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\bar{\lambda}_1}{\omega} - \bar{\lambda}_4\right)\cos\omega(t - t_k) + \frac{1}{2}\left(2\bar{\lambda}_2 + \frac{\bar{\lambda}_3}{\omega}\right)\sin\omega(t - t_k) - \frac{\bar{\lambda}_1}{\omega} \tag{2.12}$$

$$u_3^0(t) = \frac{\bar{\lambda}_5}{2\omega}\sin\omega(t - t_k) - \frac{\bar{\lambda}_6}{2}\cos\omega(t - t_k)$$

где

$$\bar{\lambda}_i = \mathrm{M}\{\lambda_i\} \qquad (i = 1,\ldots,6)$$

Подставляя значения $u_i^0(t)$, $(i=1,2,3)$ из (2.15) в (1.2) и интегрируя, получим оптимальное стохастическое движение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев А.А., Соколов В. Б. Встреча на орбите. М.: Машиностроение, 1969. 367с.
2. Барсегян В. Р. Оптимальное стохастическое управление сближением космических аппаратов// Изв. НАН и ГИУ Армении (сер.ТН). 1999. Т. LII. №1. С.94-100.
3. Казаков И. Е., Гладков Д. И. Методы оптимизации стохастических систем. М.: Наука, 1987. 304с.

Ереванский государственный
Университет

Поступила в редакцию
30.05.2002