ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №3, 2002 Механика
УДК 62-50

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО ПРИВЕДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЦЕЛЕВУЮ ТОЧКУ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Аветисян В.В.

Վ.Վ. Ավետիսյան
Դինամիկական համակարգը օպտիմալ երաշխավորված ձևով սահմանափակ տիրույթում նպատակային կետ բերելու խնդիրը ոչ լրիվ ինֆորմացիայի պայմաններում

Դիտարկվում է սահմանափակ տիրույթում դինամիկական համակարգը օպտիմալ երաշխավորված ձևով նպատակային կետ՝ անշարժ կետային օբյեկտ բերելու խնդիրը, վերջինիս կոորդինատների ոչ լրիվ ինֆորմացիայի պայմաններում: Դրված խնդրի ուսումնասիրման համար զարգացվում և հիմնավորվում է երաշխավորող կոմբինացված ղեկավարման եղանակը [1,2]: Կոմբինացված ղեկավարման նպատակն է՝ հայտնաբերել անշարժ օբյեկտը ղեկավարվող շարժական ինֆորմացիոն տիրույթի միջոցով, իսկ այնուհետև տրված ճշտությամբ մոտենալ նրան: Դիտարկվել և ուսումնասիրվել են փնտրման տիրույթը տրված ճշտությամբ ծածկող հետագծեր, որոնցով շարժվելիս ապահովվում է փնտրման վերջավոր ժամանակը: Համակարգի տրված սկզբնական դիրքի համար գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ ծածկող հետագծեր, որի հետևանքով սկզբնական խնդիրը բերվել է օպտիմալ կոմբինացված ղեկավարման որոշման խնդրին, որտեղ նվազագույնի է հասնում անշարժ որոնելի օբյեկտը փնտրելու և նրան մոտենալու գումարային ժամանակը: Աշխատանքը [3] -ում սկսված ուսումնասիրությունների շարունակությունն է:

V.V. Avetisyan
On the Optimal Guaranteed Bringing Problem of the Dynamic Systems to Goal Point in a Limited Domain with Incomplet Information.

Рассматривается задача оптимального гарантированного приведения динамической системы в целевую точку в ограниченной области при неполной информации о ее координатах. Развивается и обосновывается методика комбинированного гарантирующего управления [1,2]. Цель комбинированного управления — обнаружение искомой целевой точки с помощью управляемой информационной области, движущейся вместе с фазовым вектором системы (этап поиска), а затем приведение в эту точку (этап приведения). Вводится в рассмотрение покрывающие с заданной точностью область поиска траектории, управляемое движение по которым обеспечивает успешный поиск за конечное гарантированное время. Для заданного начального положения динамической системы существует бесчисленное множество покрывающих траекторий. Вследствие чего исходная задача сводится к задаче определения оптимального комбинированного управления, доставляющего минимальное значение суммарному времени гарантированного поиска и приведения. Работа является продолжением исследований, начатых в [3].

1. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве задано некоторое выпуклое компактное связанное множество $D \subset R^3, D = D' + D''$, где $D' \subset R^2$ и $D'' \subset R$ — взаимно ортогональные выпуклые компактные подмножества соответственно.

Рассмотрим систему из двух точечных объектов: движущегося во множестве $D \subset R^3$ управляемого объекта X и неподвижного в пределах подмножества $D' \subset D, D' \subset R^2$ объекта Y. Динамика системы задается следующими дифференциальными уравнениями и ограничениями:

$$X:\ \dot{x} = f(x,u,t), \qquad\qquad Y:\ y(t) \equiv y(t_0) = y^0,$$
$$x(t_0) = x^0,\ x(t) \in D \subset R^3, \qquad y(t) \in D' \subset R^2,\ t \ge t_0 \tag{1.1}$$
$$u(t) \in U \subset R^3,\ t \ge t_0$$

Здесь x, y – фазовые векторы объектов X и Y соответственно, u – управляющий вектор объектом X, f – заданная функция, U – заданное множество значений управления u.

Пусть проекции $x' = (x_1, x_2) \in D'$ и $x'' \in D''$ фазового вектора $x \in D$ управляются с помощью управлений $u' \in U'$ и $u'' \in U''$ соответственно, где U', U'' – взаимно ортогональные выпуклые компактные подмножества множества $U : U' + U'' = U$. При таком предположении, вследствие возможности однозначного представления фазового и управляющего вектора объекта X на сумму векторов меньшей размерностей, система уравнений движения объекта X расщепляется на подсистемы и динамика описанной системы на фиксированном интервале времени $[t_0, T]$ задается следующими соотношениями:

$$X:\ \dot{x}' = f'(x', u', t), \qquad \dot{x}'' = f''(x'', u'', t); \qquad Y:\ y(t) \equiv y(t_0) = y^0$$
$$x'(t_0) = x'^0, \qquad x''(t_0) = x''^0, \qquad y(t) \in D' \subset R^2,\ t \ge t_0$$
$$x'(t) \in D' \subset R^2, \qquad x''(t) \in D'' \subset R \tag{1.2}$$
$$u'(t) \in U' \subset R^2,\ t \ge t_0,\ \ u''(t) \in U'' \subset R,\ t \ge t_0$$
$$x = x' + x'', \qquad D = D' + D'', \qquad U = U' + U''$$

Предположим, что управляемому объекту X в процессе движения доступна полная информация о соотношениях (1.2), за исключением начального состояния объекта $Y - y(t_0) = y^0$. Однако, имеется некоторое подвижное и изменяющееся информационное множество $G(x(t))$, связанное с текущим значением фазового вектора $x(t)$, позволяющее уточнить информацию о координатах местоположения объекта Y, в случае попадания последнего в это множество.

Определим область $G(x)$ для любого $x \in D \subset R^3$ следующим образом:

$$G(x(t), C) = G(x'(t), x''(t), C) = \left\{ \begin{aligned} &\xi' \in R^2 :\ |\xi' - x'| \le \rho' = C|x''|, \\ &\qquad\qquad x' \in D',\ x'' \in D'',\quad C > 0 \end{aligned} \right\} \tag{1.3}$$

Область $G(x(t), C)$ (1.3) представляет собой круг с центром в точке $x'(t) \in D' \subset D$ и с радиусом $\rho' = C\,|x''|$, где $|x''|$ – расстояние объекта X до подмножества D', а $C > 0$ – такое число, при котором имеет место включение $G(x', \rho'_{\max}) \subset D'$, $\rho'_{\max} = C \max\limits_{x'' \in D''} |x''|$ хотя бы для одной точки $x' \in D'$. Такой выбор постоянной C позволяет обходить случай тривиального решения задачи, т.е. случай, когда $D' \subset G$.

При фиксированном параметре C (1.3), эволюция круговой области

$G(x',x'',C) \equiv G(x',\rho')$ (с учетом $\rho' = C\,|x''|$) во множестве D', согласно (1.2), определяется движением ее центра x' в подмножестве D', с помощью вектор управления u', и расширением или сужением области $G(x',x'',C)$ путем изменения фазового вектора x'' или, что то же самое, изменением ее радиуса $\rho' = C\,|x''|$ в подмножестве D', с помощью скалярного управления Cu''.

Пусть управляемый процесс начинается в момент $t = t_0$ из начальной точки $x^0 = (x'^0, x''^0) \in D$ и заканчивается в момент $t = T$, когда выполняется условие

$$
\begin{gathered}
x(T) = x^1 \\
x^1 = (x'^1, x''^1), \;\; x'^1 = y, \; x''^1 = 0
\end{gathered}
\qquad (1.4)
$$

Целью объекта X является выполнение условия (1.4) за возможно минимальное время T.

2. Разобьем процесс управляемого движения объекта X на два этапа — этапы поиска и приведения на искомый точечный объект Y. В связи с этим допустимыми будем считать комбинированные управляющие функции вида

$$
u = \begin{cases} u_0(x^0;t), & t_0 \le t \le t_* \\ u_1(x^*, t_*, x^1; t), & t_* \le t \le T \end{cases}
\qquad (2.1)
$$

принимающие значения из области U. Здесь величины x^0, x^*, x^1, t_*, T являются параметрами, $x^0, x^*, x^1 \in D$, $T \ge t_* \ge t_0$. Управлению u_0 соответствует этап поиска, а управлению u_1 — этап приведения на искомый объект.

На каждом из этих этапов решаются качественно разные задачи. Перейдем к описанию этих задач.

Этап поиска. На этапе поиска требуется управлять движением объекта X так, чтобы в некоторый момент времени $t = t_*$ из некоторой точки $x^* = x(t_*)$ был наблюдаем искомый объект Y, т.е. выполнялось условие

$$
y = x^1 \in G(x(t_*)) \Leftrightarrow \begin{cases} \left|x'(t_*) - x'^1\right| \le \rho'(t_*) = \rho'^* \\ \left|x''(t_*)\right| \le \rho'(t_*) C^{-1} \end{cases}
\qquad (2.2)
$$

Учитывая, что движения (1.2) разделяются по переменным x' и x'', управление u_0 зададим в виде пары кусочно-непрерывных функций

$$
\begin{gathered}
u_0 = \{u_0'(x'^0;t), \; u_0''(x''^0;t)\} \\
(x'^0, x''^0) = x^0 \in D, \;\; t_0 \le t \le t_*
\end{gathered}
\qquad (2.3)
$$

где u_0' осуществляет движение объекта X по координате x', а u_0'' — по координате x''. t_* — момент обнаружения объекта Y, точнее — момент первого попадания вектора y на границу множества G. Вопрос существования конечного момента $t_* \ge t_0$ является основным в задаче поиска и ее решение зависит от способа управления объектом X.

Пусть $x(t;t_0,x^0,u_0)=(x'(t;t_0,x'^0,u'_0),\ x''(t;t_0,x''^0,u''_0))$ — траектория движения объекта X, стартующего из заданного начального положения (t_0,x^0), $x^0=(x'^0,x''^0)\in D$ с управлением $u_0(x^0;t),\ t_0\le t\le t_*$ (2.3). Через $L_{\rho'(x'(t))}\{x';x'^0,x'^*\}$ обозначим целиком лежащую в D' незамкнутую и не имеющую точек самопересечения конечную кривую с краевыми точками $x'^0,x'^*\in D'$, по которой происходит движение объекта X по переменной x' на интервале $[t_0,t_*]$ с управлением $u'_0(x'^0;t),\ t_0\le t\le t_*$. В каждой точке $x'(t)$ этой кривой определен круг обнаружения с центром в этой точке и с радиусом ρ', изменяющимся по закону $\rho'(t;t_0,\rho'^0,u''_0)=C\left|x''(t;t_0,x''^0,u''_0)\right|$ с управлением $u''_0(x''^0;t),\ t_0\le t\le t_*$.

Определение. Конечную кривую $L_{\rho'(x'(t))}\{x';x'^0,x'^*\}$, порожденную управлением $u_0(x^0;t),\ t_0\le t\le t_*$, назовем покрывающей область D' кривой, если для любой точки $x'_*\in D'$ существуют точка $x'_{**}\in L_{\rho'(x'(t))}\{\}$ и значение радиуса $\rho'_{**}(x'_{**}),\ \rho'_{**}\in\left[\rho'^1,\rho'^0\right]$ такие, что $x'_*\in G(x'_{**},\rho')$ для всех $\rho'\in\left[\rho'_{**},\rho'^0\right]$.

Через $U_{0L}=(U'_{0L},U''_{0L})\subset U$ обозначим множество допустимых управлений, при которых движение фазового вектора объекта X по переменной x' происходит по покрывающей траектории. Множество покрывающих кривых $L_{\rho'(x'(t))}\{\}$, однозначным образом определяемые допустимыми управлениями $u_{0L}\in U_{0L}$, обозначим через Λ.

Лемма 1. Движение объекта X по покрывающей траектории $L_{\rho'(x'(t))}\{x';x'^0,x'^*\}$ при любом управлении $u_{0L}\in U_{0L}$ гарантирует обнаружение объекта Y за конечное время.

Действительно, где бы ни находился в начальный момент Y в D' - $y\in D'$, согласно конструкции траектории $L_{\rho'(x'(t))}\{x';x'^0,x'^*\}$, найдутся точка $x'^*\in L_{\rho'}$ и момент времени t_* такие, что при перемещении объекта X из начальной точки (t_0,x^0), $x^0=(x'^0,x''^0)\in D$, $x'^0\in L_{\rho'}$ с начальным радиусом обнаружения $\rho'^0=C\left|x''^0\right|$ вдоль кривой $L_{\rho'}$ по законам $x'(t;t_0,x'^0,u'_0)$, $\rho'(t;t_0,\rho'^0,u''_0)=C\left|x''(t;t_0,x''^0,u''_0)\right|$ (1.2) с управлениями $u'_0(x'^0;t),\ u''_0(x''^0;t),\ t_0\le t\le t_*$ соответственно, момент времени $t=t_*$ в точке $x^*(t_*)=(x'^*(t_*),x''^*(t_*))$ произойдет обнаружение $y\in G(x'(t_*),\rho'(t_*))$, $\rho'(t_*)=\rho'^*\in\left[\rho'^1,\rho'^0\right]$.

Утверждение. Пусть $L_{\rho'(x'(t))}\{x';x'^0,x'^*\}\in\Lambda$, $\rho'(x'),0<\rho'(x')<\rho'_{max}$,

$x' \in L_{\rho'}$. Тогда кривая $L_{\overline{\rho}'}$, для которой $\overline{\rho}'(x') \geq \rho'(x')$, $x' \in L_{\rho'}, L_{\overline{\rho}'}$ — также покрывающая.

Действительно, так как кривая $L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x'^0, x'^*\} \in \Lambda$, то для любой точки $x'_* \in D'$ существует точка $x'_{**} \in L_{\rho'(x'(t))}\{\cdot\}$ такая, что $x'_* \in G(x'_{**}, \rho')$. Поскольку $G(x'_{**}, \rho') \subset \overline{G}(x'_{**}, \overline{\rho}') \subset D$, где $\rho'(x') \leq \overline{\rho}'(x')$, то $x'_* \in G(x'_{**}, \overline{\rho}')$. Значит кривая $L_{\overline{\rho}'(x'(t))}\{x'; x'^0, x'^*\}$ также покрывающая.

Теорема 1. Пусть $L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x'^0, x'^*\} \in \Lambda$, $\rho'(x'), 0 < \rho'(x') < \rho'_{\max}$, $x' \in L_{\rho'}$. Тогда существует покрывающая кривая $\overline{L}_{\rho'(x'(t))}\{x'; x'^0, x'^*\}$, $0 < \rho'(x') < \rho'_{\max}$, $x' \in \overline{L}_{\rho'}$ минимальной длины $d_{\overline{L}}$.

Действительно. Пусть $d_{\overline{L}}$ — нижняя грань длин покрывающих кривых, соединяющих x'^0 и x'^*. Пусть длины кривых $\overline{L}^{(1)}_{\rho'}, \overline{L}^{(2)}_{\rho'}, \ldots, \overline{L}^{(n)}_{\rho'}, \ldots$, соединяющих x'^0 и x'^*, стремятся к $d_{\overline{L}_{\rho'}}$. Так как из последовательности $\overline{L}^{(n)}_{\rho'}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность [4], то предельная кривая $\overline{L}_{\rho'}$ этой последовательности не может иметь длину больше $d_{\overline{L}}$.

Доказанная теорема устанавливает существование кривой минимальной длины во множестве покрывающих кривых.

Теорема 2. Пусть $\overline{L}_{\overline{\rho}'(x'(t))}\{x'; x'^0, x'^*\}$ — покрывающая кривая минимальной длины $d_{\overline{L}}$ с постоянной функцией радиуса обнаружения $\overline{\rho}', 0 < \overline{\rho}' \leq \rho'_{\max}$. Тогда существует покрывающая кривая $L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x'^0, x'^*\}$ минимальной длины d_L с постоянным радиусом $\rho', \overline{\rho}' < \rho' \leq \rho'_{\max}$ такая, что $d_L < d_{\overline{L}}$.

Действительно, пусть имеет место обратное неравенство $d_L > d_{\overline{L}}$. Тогда, поскольку, согласно утверждению, кривая $\overline{L}_{\rho'(x'(t))}\{x'; x'^0, x'^*\}$ с радиусом обнаружения $\rho', \overline{\rho}' < \rho' \leq \rho'_{\max}$ также покрывающая, то она имеет длину меньше, чем кривая $L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x'^0, x'^*\}$. Но это противоречит тому, что $L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x'^0, x'^*\}$ — покрывающая кривая минимальной длины.

Отсюда следует, что чем больше радиус обнаружения покрывающей траектории минимальной длины, по которой осуществляется "просмотр" области D', тем меньше время завершения поиска искомого объекта.

Время $t_*, t_* \geq t_0$, при котором обнаружение происходит в крайней точке покрывающей траектории x'^*, назовем гарантированным временем поиска.

При начальном положении $x^0 = (x'^0, x''^0)$ с фиксированной координатой $x'_0 \in D'$ гарантированное время поиска зависит от геометрических параметров множества D', управлений u'_{0L}, u''_{0L}, определяющие покрывающую траекторию $L_{\rho'}$, а также от начальной координаты x'' (определяющей начальную величину радиуса обнаружения ρ'^{0}). Таким образом, $t_* = t_*(D', u'_{0L}, u''_{0L}, x''^{0})$.

Этап приведения. С момента обнаружения объекта Y начинается этап приведения на него. Движение на этапе приведения происходит на интервале $[t_*, T]$ и соответствует приведению объекта X из точки наблюдения $x^* = x(t_*)$ в обнаруженную точку $x(T) = x^1$ (1.4) с помощью управления $u_1(x^*, x^1; t)$, $t_* \le t \le T$. Так как уравнения движения (1.2) по переменным x' и x'' независимы, то задачи управления по этим координатам решаются отдельно. Время $t_1 = T - t_*$ в этой двухточечной задаче управления с полной информацией о краевых точках зависит от расстояния $\rho^* = \rho(x^*(t_*), x^1) = \left|x^* - x^1\right|$, соединяющего точку x^* в момент времени $t = t_*$ с точкой x^1 в момент времени $t = T$, а также от управления приведения u_1 и не зависит от параметров области D', т.е. $t_1 = t_1(\rho^*, u_1)$.

Так как D' и D'' ортогональны, то имеет место следующая цепочка равенств:

$$\rho^* = \sqrt{(\rho'^*)^2 + \left|x''^*\right|^2} = \sqrt{C\left|x''^*\right|^2 + \left|x''^*\right|^2} = \left|x''^*\right|\sqrt{1 + C^2} =$$
$$= \sqrt{1 + C^2}\left|x''^*(x''^{0}, u''_{0L})\right| = \rho^*(x''^{0}, u''_{0L})$$

Следовательно, $t_1 = t_1(x''^{0}, u''_{0L}, u_1)$, и полное время процесса управления, складывающееся из времени, прошедшего до обнаружения, и оставшегося времени $t_1 = T - t_* = t_1(x''^{0}, u''_{0L}, u_1)$ приведения в x^1, равно

$$T(D', x''^{0}, u) = T(D', x''^{0}, u'_{0L}, u''_{0L}, u_1) = t_*(D', x''^{0}, u'_{0L}, u''_{0L}) + t_1(x''^{0}, u''_{0L}, u_1) \quad (2.4)$$

Пусть $\Delta = \{D'\}$ – некоторое множество областей D' таких, что $\cap\{D'\} \ne \emptyset$ и $x'^{0} \in (\cap\{D'\})$. Пусть область $D' \in \Delta$ и начальная координата $x'^{0} \in D'$ заданы. Тогда каждому значению координаты x''^{0} и каждому допустимому управлению $u = \{u_{0L}, u_1\}$ соответствует некоторое время гарантированного поиска и приведения $T = T(D', x''^{0}, u)$.

Задача. Найти минимальное суммарное время гарантированного поиска и приведения $T^*(D)$, управление $u^* = \{u^*_{0L}, u^*_1\}$ и начальную координату $(x''^{0})^*$, доставляющие минимум

$$T^*(D') = \min_{0 < \left|x''^{0}\right| \le C^{-1}\rho'_{\max}} \; \min_{u = \{u_{0L}, u_1\}} T(D', x''^{0}, u), \qquad D \in \Delta \quad (2.5)$$

В (2.5) второй минимум по компоненту u_1 является задачей оптимального по быстродействию управления по заданным краевым точкам x^* и x^1. В силу того, что уравнения движения (1.2) по переменным

x' и x'' разделяются, то оптимальное быстродействие из точки обнаружения (x'^*, x''^*) в целевую точку $(x'^1, x''^1 = 0)$ осуществляется при одновременных реализациях оптимальных по быстродействию управлений $u_1'^*$ и $u_1''^*$, осуществляющие прямолинейные перемещения из точек x'^* и x''^* в точки x'^1 и $x''^1 = 0$ соответственно и зависящие, в конечном итоге, от расстояний ρ'^* и $\left|x''^*\right|$ соответственно. Таким образом,

$$u_1^*(\rho^*;t) = (u_1'^*(\rho'^*;t), u_1''^*(\left|x''^*\right|;t)),$$

$$u_1'^* = \begin{cases} u_1'^*(\rho'^*;t), & t_* \le t \le T' \\ u_1'^* \equiv 0, & T' \le t \le t_1 \end{cases}, \qquad u_1''^* = \begin{cases} u_1''^*(\rho'^*;t), & t_* \le t \le T'' \\ u_1''^* \equiv 0, & T'' \le t \le t_1 \end{cases} \tag{2.6}$$

$$t_1 = \max(T', T''),$$

где $T'(\rho'^*)$ – оптимальное время перемещения из x'^* в x'^1, соответствующее управлению $u_1'^*$, а T'' – оптимальное время вертикального перемещения из x''^* в $x''^1 = 0$, соответствующее управлению $u_1''^*$.

Учитывая вышесказанное, из (2.4)-(2.6) получаем

$$\begin{aligned} T^*(D') &= \min_{0<\left|x''^0\right| \le C^{-1}\rho'_{\max}} \; \min_{u=\{u_{0L}, u_1\}} T(D', x''^0, u) = \\ &= \min_{0<\left|x''^0\right| \le C^{-1}\rho'_{\max}} \; \min_{u_{0L} \in U_L} (t_*(D', x^0, u'_{0L}, u''_{0L}) + t_1(x''^0, u''_{0L}, u_1^*)) \qquad D \in \Delta \end{aligned} \tag{2.7}$$

где u_1^* и соответствующее время $t_1(x''^0, u''_{0L}, u_1^*)$ определяются согласно (2.6).

Отметим, что соотношения (2.7) упрощаются в случае, когда поиск осуществляется во множестве покрывающих траекторий с постоянным радиусом обнаружения, что соответствует нулевым значениям управления u''_{0L} по координате x'' на этапе поиска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Меликян А. А. Оптимальное гарантирующее управление динамической системой с поиском целевой точки. // ДАН СССР. 1991. Т. 316. № 4. С. 815-819.
2. Adams S., Melikyan A.A. Optimal trajectory planning for manipulators with goal point uncertainty. // 6-th International Conference on CAD/CAM, Robotics and Factories of the Future, 1991, London. Proceedings. pp. 3-8.
3. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному гарантированному поиск неподвижного объекта в прямоугольной области. // Изв. РАН, Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 61-69.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1983. 542с.

Иститут Механики НАН
Армении

Поступила в редакцию
04. 04. 2002 г.