ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №3, 2002 Механика

УДК 593.3

# К ФЛАТТЕРУ МЕМБРАНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Ванян Л.А., Минасян М.М.

Լ.Ա. Վանյան, Մ.Մ. Մինասյան
Գազի գերձայնային հոսանքում մեմբրանի ֆլատերի վերաբերյալ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է անվերջ մեմբրանի կայունությունը գազի գերձայնային հոսանքում այն մոտավորությամբ, երբ աէրոդինամիկական ճնշման կախվածությունը մեմբրանի շարժումից կրում է դիֆերենցիալ տիպի ոչ լոկալ բնույթ: Մեմբրանի ծռման տատանումների հավասարումը բերված է հիպերբոլական տիպի առաջին կարգի երեք հավասարումների համակարգի, որը այնուհետև ներկայացվել է Ռիմանի ինվարիանտներով: Ուսումնասիրվել է անկայունության ձևը: Ցույց է տրված, որ այն ունի կոնվեկտիվ բնույթ: Որոշվել են թույլ կապակցված ալիքների սինխրոնիզմի կետերը:

**L.A. Vanyan, M.M. Minasyan**
**On The Flutter of Membrane in Supersonic Gas Flow**

В работе исследуется устойчивость бесконечной мембраны в сверхзвуковом потоке газа в приближении, когда зависимость аэродинамического давления от движения мембраны носит нелокальный характер дифференциального типа. Уравнение изгибных колебаний мембраны сведено к гиперболической системе трех уравнений первого порядка, которая записана также в римановых инвариантах. Исследован тип неустойчивости. Показано, что она носит конвективный характер. Определены точки синхронизма слабосвязанных волн.

Изгибные колебания мембраны в двухмерном потоке газа описываются уравнением

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}-N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+p=0 \tag{1}$$

где $w,\rho,h$ − прогиб, плотность и толщина мембраны, $\varepsilon$ − коэффициент конструкционного демпфирования, $p$ − избыточное аэродинамическое давление, $N$ − мембранное усилие. Давление $p$ определяется решением внешней среды с учетом граничных условий. Для линеаризированного потенциального потока идеального газа зависимость давления от производных прогиба представляется интегральным оператором с весьма сложным ядром [1,2] и точное исследование задачи об устойчивости мембраны связано с большими трудностями. При больших скоростях потока газа задача существенно упрощается применением известной "поршневой" теории [2]

$$p=\rho_0 a_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{2}$$

где $\rho_0,a_0,U$ − невозмущенные плотность, скорость звука и скорость потока газа.

Задача о флаттере и бесконечной и конечной мембраны в "поршневом" приближении допускает точное решение [2]. Однако при небольших сверхзвуковых числах Маха потока "поршневое" приближение становится непригодным и приходится иметь дело с интегродифференциальным уравнением для прогиба.

В работе [3] построено новое приближение для давления, позволяющее эффективно исследовать флаттер пластинки и мембраны при малых числах Маха $M = U / a_0$. Это приближение в виде дифференциальной зависимости (ее можно представить и в интегральной форме [4]) следующее:

$$\frac{Dp}{Dt} = \rho_0 a_0 \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \chi \rho_0 a_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (U - a_0)\frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

где $\chi$ — поправочный коэффициент. Заметим, что при $\chi = 0$ (3) переходит в (2).

Главной особенностью (3) является его нелокальный характер зависимости давления от движения мембраны, вследствие чего для прогиба получается дифференциальное уравнение повышенного порядка по сравнению с "поршневой" теорией. Ниже исследуется это уравнение.

1. Рассмотрим систему уравнений (1) и (3). Введя новые функции

$$v = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{4}$$

($v$ — нормальная скорость, $\theta$ — наклон мембраны) систему представим в вектор-матричной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = b \tag{5}$$

где векторы $u$ и $b$ суть

$$u = (p, v, \theta), \quad b = (-\varepsilon_0(\varepsilon v + p/\rho h), -(\varepsilon v + p/\rho h), 0), \quad (\varepsilon_0 = \rho_0 a_0 / \rho h) \tag{6}$$

а ненулевые элементы матрицы $A$ —

$$a_{11} = U - a_0, \;\; a_{12} = -\varepsilon_0(2U - a_0), \;\; a_{13} = -\varepsilon_0\left[c_0^2 + U(u - a_0) + \chi a_0^2\right]$$
$$a_{23} = -c_0^2, \;\; a_{32} = -1, \qquad (c_0^2 = N/\rho h) \tag{7}$$

Вычислив собственные значения матрицы $A$ из уравнения $Det(A - \lambda I) = 0$, находим

$$\lambda_1 = U - a_0, \quad \lambda_2 = c_0, \quad \lambda_3 = -c_0 \tag{8}$$

Пусть $U \neq a_0 + c_0$. Тогда трем различным собственным значениям $\lambda_k$ соответствуют три семейства характеристик

$$\Gamma_k: \; \frac{dx}{dt} = \lambda_k, \;\; (k = 1,2,3) \tag{9}$$

и три левые собственные векторы

$$l^{(1)} = \left[(U - a_0)^2 - c_0^2, \rho_0 a_0\left(c_0^2 + \chi a_0^2 + 2a_0(U - a_0)\right), \rho_0 a_0\left(\chi a_0^2 (U - a_0) + U^2(2c_0 - U)\right)\right]$$
$$l^{(2)} = (0, 1, -c_0), \qquad l^{(3)} = (0, 1, c_0) \tag{10}$$

Поскольку собственные значения матрицы $A$ различны и в силу

$$Det\left(l_i^{(k)}\right) = Det\Lambda = 2c_0\left((U - a_0)^2 - c_0^2\right) \neq 0 \tag{11}$$

собственные векторы составляют базис в $E^3$, то по определению [5] система (5) при $U \neq a_0 + c_0$ гиперболическая в строгом смысле, для которой задача Коши корректна. Одним из эффективных методов численного решения таких систем является метод характеристик, использующий минимальные операторы интерполирования. В характеристической форме система (5) запишется в виде

$$l^{(k)}\left(\frac{du}{dt}\right)_k = f_k, \quad k=1,2,3 \qquad \left(\frac{d}{dt}\right)_k = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x} \tag{12}$$

$$f_1 = -\chi\rho_0 a_0(\varepsilon v + p/\rho h), \quad f_2 = f_3 = -(\varepsilon v + p/\rho h)$$

Введя римановы инварианты $r(r_1, r_2, r_3)$

$$r = \Lambda u, \qquad u = \Lambda^{-1} r \tag{13}$$

получим

$$r_1 = P - \varepsilon_0(1-\beta)v - \varepsilon_0[U + \beta(U - a_0)]\theta$$

$$r_2 = v - c_0\theta, \quad r_3 = v + c_0\theta \qquad \left(\beta = \chi a_0^2 /(U-a_0)^2 - c_0^2\right) \tag{14}$$

$$P = r_1 + \frac{\varepsilon_0(c_0 - U - a_1)}{2c_0} r_2 + \frac{\varepsilon_0(c_0 + U + a_2)}{2c_0} r_3$$

$$2v = r_2 + r_3, \quad 2c_0\theta = r_3 - r_2 \quad \left(a_1 = \frac{\chi a_0^2}{U - a_0 - c_0}, \; a_2 = \frac{\chi a_0^2}{U - a_0 + c_0}\right) \tag{15}$$

В инвариантной форме система (5) преобразуется в систему из трех обыкновенных уравнений, действующих по различным характеристическим направлениям: $x = \lambda_k t + \mathrm{const}$

$$\left(\frac{dr_k}{dt}\right)_k = \mu_k \quad (k=1,2,3) \;\; \mu_1 = -\varepsilon_0\beta K, \quad \mu_2 = \mu_3 = -K \tag{16}$$

$$K = r_1 + \frac{r_2}{2}\left[\varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{c_0}(c_0 - U - a_1)\right] + \frac{r_3}{2}\left[\varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{c_0}(c_0 + U - a_2)\right]$$

Если $U = a_0 + c_0$, то система (5) имеет кратные характеристики $\lambda_1 = \lambda_2 = c_0$ и поскольку в этом случае $Det\Lambda = 0$, то вопрос гиперболичности и связанная с ним задача Коши требует отдельного рассмотрения. Здесь только отметим, что имеем вырождение системы (5).

2.Рассмотрим вопрос устойчивости бесконечной мембраны на базе системы (5). Представив решение в виде бегущих волн $u = u_0 \exp i(\omega t - kx)$, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$D(\omega,k) \equiv [\omega - (U - a_0)k][\omega^2 - c_0^2k^2 - i\gamma\varpi + i\varepsilon_0 Uk] - i\delta k^2 = 0 \tag{17}$$

$$(\gamma = \varepsilon + \varepsilon_0, \;\; \delta = \chi\varepsilon_0 a_0^2)$$

Система будет неустойчивой, если $\mathrm{Im}\,\omega(k) < 0$ при некоторых вещественных $k$. Граница устойчивости определяется условиями $\mathrm{Im}\,\omega = 0$, $\mathrm{Im}\,k = 0$. Тогда из (17) получим, что на границе устойчивости выполняется условие

$$[c_0 - (U - a_0)][c_0\gamma - \varepsilon_0 U] + \delta = 0 \tag{18}$$

В работе [6] уравнение, выведенное для пластинки, подробно исследовано. Полученные результаты сравнены с результатами, полученными по "точной" постановке. В частности, получены весьма хорошие совпадения как для области устойчивости, так и для действительных и мнимых частей трех фазовых скоростей (по "поршневой" теории имеются только две волны). Поскольку уравнение (18) для мембраны отличается от пластинки лишь представлением скорости "собственных" изгибных волн $c_0$, то все результаты работы [6] в равной степени пригодны и здесь.

На фиг.1 представлена область устойчивости в плоскости параметров $U, \lambda = \varepsilon / \varepsilon_0$. Наклонная асимптота $U = c_0(1+\lambda)$ соответствует "поршневой" теории. Ниже этой линии эта теория определяет устойчивость.

Выясним характер неустойчивости (конвективной или абсолютной [7]). Будем пользоваться критериями, изложенными в книге [8] (см. также [9]). В работе [10] показано, что неустойчивость бесконечной мембраны по ПТ носит конвективный характер. В работе [11], в которой дисперсионное уравнение отличается от (17) первым множителем ($\omega - Uk$ вместо $\omega - (U - a_0)$), также выявлен конвективный характер неустойчивости. Однако из-за указанного отличия множителей следует считать верным результат лишь выше наклонной асимптоты $U = c_0(1+\lambda)$. Ниже этой асимптоты и нижней границы области устойчивости (область малых чисел Маха) необходимо провести новое исследование.

Для применения критерий, в первую очередь определим точки ветвления решений $\omega_s = \omega_s(k)$, $s = 1,2,3$ уравнения (17). Они определяются из системы

$$D(\omega, k) = 0, \quad D'_k(\omega, k) = 0 \quad (D'_\omega \neq 0) \tag{19}$$

Для упрощения вычислений воспользуемся относительной малостью величины $\delta$ в (17). Считая $\delta = 0$ и решая систему (19), определяем точки синхронизма, затем методом итераций можно получить поправки к этим точкам, при этом одни точки синхронизма будут порождать пару точек ветвления, положения которых будут мало отличаться от положений точек синхронизма, другие же будут смещаться незначительно.

При $\delta = 0$ система (19) распадается на две подсистемы

$$\begin{aligned} &\omega - (U - a_0)k = 0 \\ &\omega^2 - c_0^2 k^2 - i\gamma\omega + i\varepsilon_0 U k = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &2c_0^2 k - i\varepsilon_0 U = 0 \\ &\omega^2 - c_0^2 k^2 - i\gamma\omega + i\varepsilon_0 U k = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

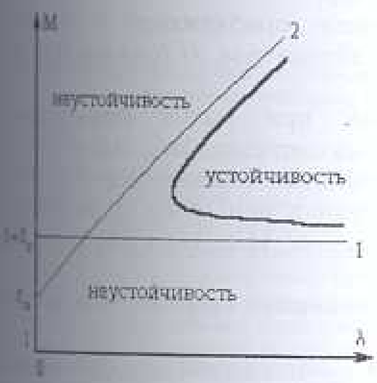
Решение (20) дает одну точку синхронизма

$$\omega_1 = \frac{i(U - a_0)[\gamma(U - a_0) - \varepsilon_0 U]}{(U - a_0)^2 - c_0^2}, \qquad k_1 = \frac{\omega_1}{U - a_0} \tag{22}$$

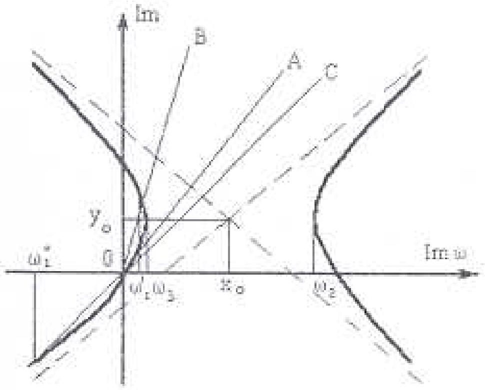
а решение (21) определяет две точки ветвления в нулевом приближении

$$\omega_{2,3} = \frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2 U^2}{4c_0^2} - \frac{\gamma^2}{4}}, \qquad k_{2,3} = \frac{i\varepsilon_0 U}{2c_0^2} \tag{23}$$

Как видно из (22) и (23), в интересующем нас случае $U < c_0(1+\lambda)$ все точки ветвления чисто мнимые. Согласно критерию о характере неустойчивости [8,9] следует определить знак $\mathrm{Im}\,\omega_s$ и выяснить, какие волны противоположные или попутные пересекаются в этих точках. Для выяснения этого воспользуемся методом, изложенным в [8]. Если нанести на график зависимость $y = \mathrm{Im}\,k$ от $x = \mathrm{Im}\,\omega$ при $\delta = 0$, то получим картину, представленную на фиг. 2. Здесь попутные волны определяются условиями $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$, а встречные волны – условиями $x \to \pm\infty$, $y \to \mp\infty$. Как видно из фиг. 2, в точках $\omega_2$ и $\omega_3$ пересекаются противоположные волны и, поскольку эти точки в комплексной плоскости лежат в верхней полуплоскости, то согласно критерию [8], неустойчивость, если она есть, носит конвективный характер. По сути дела эти точки соответствуют поршневому приближению.




Фиг. 1




Фиг. 2

Для точки синхронизма $\omega_1$ согласно (22) возможны оба случая, как $\mathrm{Im}\,\omega_1' > 0$, так и $\mathrm{Im}\,\omega_2' < 0$. Наклон касательной к гиперболе

$$\left(x - \frac{\gamma}{2}\right)^2 - c_0^2\left(y - \frac{\varepsilon_0 U}{2c_0^2}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\varepsilon_0^2 U^2}{4c_0^2} \tag{24}$$

равен $\gamma/\varepsilon_0 U$, а линии попутной волны $- 1/U - a_0$. Если $(OA)$

$$1/U - a_0 > \gamma/\varepsilon_0 U \quad \text{или то же} \quad \gamma(U - a_0) < \varepsilon_0 U \tag{25}$$

то $\mathrm{Im}\,\omega_1' > 0$ и в точке $\omega_1'$ встречаются противоположные волны, а если $(OC)$

$$\frac{1}{c_0} < \frac{1}{U - a_0} < \frac{\gamma}{\varepsilon_0 U} \quad \text{или то же} \quad \gamma(U - a_0) > \varepsilon_0 U, \; U < a_0 + c_0 \tag{26}$$

$\mathrm{Im}\,\omega_1'' < 0$ и в точке $\omega_1''$ встречаются попутные волны. В обоих случаях неустойчивость конвективная. Из (26) также следует неравенство $U > a_0(1 + \lambda)$ и поскольку было принято $U < c_0(1 + \lambda)$, то этот случай возможен лишь при $a_0 < c_0$.

Таким образом, неустойчивость бесконечной мембраны при малых сверхзвуковых числах Маха всегда конвективна.

Что касается конечной мембраны, то как принято считать, она устойчива при любом сверхзвуковом режиме обтекания [1]. По ПТ этот результат абсолютно точен. В точной постановке задача впервые рассмотрена в работе [12], на которую обычно ссылаются другие авторы. В этой работе показано, что для достаточно больших скоростей потока конечная мембрана устойчива, что по сути следует из ПТ. Для малых сверхзвуковых скоростей вопрос остается открытым. Думается, что решение системы (5) при надлежащих краевых условиях может разрешить этот вопрос.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Майлс Дж. У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М: Физматгиз, 1961. 272с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М: Физматгиз, 1961. 340с.
3. Минасян Д.М., Минасян М.М. Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Доклады НАН РА, 2001. Т.101. №1. С.49-54.
4. Минасян Д.М. Флаттер пластинки при малых сверхзвуковых скоростях потока газа. Ереван: Канд. диссертация. 2002. 115с.
5. Курант Р. Уравнения в частных производных. Москва: Мир. 1965. 830с.
6. Минасян Д.М. Флаттер упругой пластинки при малых сверхзвуковых скоростях газа. Сравнительный анализ. // Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т.54. №3. С.65-72.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика. Том IV. Москва: Наука, 1968. 736 с.*
8. *Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. Москва: Наука, 1981. 175с.*
9. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний. // ПММ. 1966. Т.30. В.1. 1966. С.148-153.
10. Белубекян М.В., Минасян М.М. Об усилении волн при обтекании мембраны сверхзвуковым потоком газа. // Межвуз. сб. ЕГУ. Механика, 1982. С.44-50.
11. Белубекян М.В., Минасян М.М. О характере неустойчивости бесконечной мембраны в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА, Механика. 2001. Т.53. №3. С.29-35.
12. Goland M. Luke Y.L. An exact solution for two-dimensional linear flutter at supersonic speeds. // J. Aeronaut. Sci., 1954, vol.21, №4, pp.275-276.

Ереванский государственный
Университет

Поступила в редакцию
24.09.2002