

УДК 537.2 : 539.3

ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ОТ
ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РОМБИЧЕСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИ-
ЧЕСКОГО КРИСТАЛЛА КЛАССА 222 И ВАКУУМА

Багдасарян Г.Е., Берберян А.Х., Даноян З.Н.

Գ.Ե.Բաղդասարյան, Ա.Խ.Բերբերյան, Զ.Ն.Դանոյան

Մասերի էլեկտրաստաձգական ալիքի անդրադարձումը շեղանկյուն սլեզոտելիկտրիկ 222 դասի բյուրեղի և վակուումի բաժանման սահմանից

Դիտարկված է սահրի էլեկտրաստաձգական հարթ ալիքի անդրադարձումը շեղանկյուն սլեզոտելիկտրիկ 222 դասի բյուրեղի և վակուումի բաժանման սահմանից: Գտնված են ալիքային դաշանը սլեզոտելիկտրիկ բյուրեղում և վակուումում, որոշված են առաջացող ալիքների լայնույրային գործակիցները: Տեսչ է տրված, որ բացի անկյուն որոշ դեպքերից, բյուրեղում առաջանում է ուղեկցող մակերևութային ալիք, որի սլատնառով անդրադարձումը ունի լրիվ ներքին անդրադարձման բնույթ:

G.Y.Bagdasaryan, A.Kh.Berberyan, Z.N.Danoyan

Reflection of an electroelastic shear wave at the interface between a piezoelectric rhombic crystal of 222 class and vacuum

Рассмотрено отражение плоской электроупругой сдвиговой волны от границы раздела пьезоэлектрического ромбического кристалла класса 222 и вакуума. Найдены волновые поля в пьезоэлектрическом кристалле и в вакууме, определены амплитудные коэффициенты возникающих волн. Показано, что, кроме некоторых случаев падения, в кристалле возникает сопутствующая поверхностная волна, вследствие чего отражение имеет характер полного внутреннего отражения.

Введение: Как известно [1-4], наличие пьезоэлектрических свойств у кристалла может существенно менять поведение волновых процессов, хотя коэффициент электромеханической связи для известных пьезокристаллов мал по сравнению с единицей. Такая ситуация возникает, например, при отражении электроупругих волн от свободной границы пьезоэлектрика. В работе [5] для пьезокристаллов кубической симметрии показано, что наличие пьезоэффекта приводит к возникновению в кристалле дополнительных электроупругих колебаний, которые не являются собственными колебаниями кристалла и возникают только в присутствии падающей на границу раздела электроупругой волны. Такое колебание локализуется у границы кристалла и называется сопутствующим поверхностным колебанием (СПК) или сопутствующей поверхностной волной (СПВ) [1,5]. Вследствие возникновения СПВ отражение электроупругой волны имеет характер полного внутреннего отражения (за исключением некоторых углов падения).

В настоящей работе рассматривается задача отражения сдвиговой электроупругой волны от свободной границы пьезоэлектрического ромбического кристалла класса 222.

1. Постановка задачи. Пусть пьезоэлектрический ромбический кристалл класса 222 в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ занимает полубесконечную область $x_2 > 0$ и граничит с вакуумом вдоль плоскости $x_2 = 0$. Координатные оси совпадают с главными осями

симметрии I_2 . Далее, пусть кристалл находится в антиплоском деформированном состоянии, так что упругие и электрические поля в среде и электрическое поле в вакууме имеют вид:

$$\begin{aligned} x_2 > 0: \quad \bar{u} &= \{0, 0, u_3(x_1, x_2, t)\}; \quad \varphi = \varphi(x_1, x_2, t) \\ x_2 < 0: \quad \varphi_* &= \varphi_*(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \bar{u} — вектор упругого перемещения точек среды, φ и φ_* — потенциалы электрических полей в среде и в вакууме. Предположим, что граница среды свободна от механических напряжений.

При сделанных предположениях из соотношений линейной теории электроупругости и квазистатического электрического поля получаются следующие уравнения и граничные условия для рассматриваемой задачи [1,6]:

1. в области $x_2 > 0$:

$$\begin{aligned} c_{44} \left(\alpha \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + e_{14} (1 + \beta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\ e_{14} (1 + \beta) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \varepsilon_{22} \left(\gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. в области $x_2 < 0$:

$$\frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1.3)$$

Граничные условия при $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= 0 \\ \beta e_{14} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \varepsilon_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= -\varepsilon_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial x_2} \\ \varphi &= \varphi_* \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\alpha = \frac{c_{55}}{c_{44}}, \quad \beta = \frac{e_{25}}{e_{14}}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} \quad (1.5)$$

В (1.2)–(1.4): c_{44} , c_{55} — упругие постоянные, e_{14} , e_{25} — пьезоэлектрические модули, ε_{11} , ε_{22} — диэлектрические проницаемости, ρ — плотность пьезокристалла, $\varepsilon_* = \varepsilon_0$ — электрическая постоянная. В работе используется система международных единиц СИ.

Для простоты в дальнейшем примем следующие обозначения:

$$u_3 = u, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad c_{44} = c, \quad e_{14} = e, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon \quad (1.6)$$

2. Однородные и неоднородные плоские волны. Сначала рассмотрим решения уравнений (1.2) электроупругости, представляющих собой плоские гармонические волны.

$$u = U e^{i(\rho x + q y - \omega t)}, \quad \varphi = \Phi e^{i(\rho x + q y - \omega t)} \quad (2.1)$$

где U и Φ — амплитуды перемещения и потенциала в волне, p и q — продольное и поперечное волновые числа относительно оси Ox , ω — частота колебаний. Подставляя решение (2.1) в систему уравнений (1.2), из условия разрешимости этой системы получаем дисперсионное уравнение для поперечного волнового числа q и соотношение между амплитудами смещения U и потенциала Φ .

$$(\gamma p^2 + q^2)(\alpha p^2 + q^2 - S_0^{-2} \omega^2) + 4\chi^2 p^2 q^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$[c(\alpha p^2 + q^2) - \rho \omega^2]U + (1 + \beta)epq\Phi = 0 \quad (2.3)$$

или $(1 + \beta)epqU - \varepsilon(\gamma p^2 + q^2)\Phi = 0 \quad (2.4)$

где $S_0^2 = \frac{c}{\rho}$, $\chi^2 = \frac{(1 + \beta)e^2}{4c\varepsilon} \quad (2.5)$

Здесь S_0 — скорость объемной упругой волны в направлении оси Oy ; χ — коэффициент электромеханической связи.

Как известно [7], при вещественных p и q волны (2.1) называются однородными, а при комплексных — неоднородными.

Для однородных волн p и q можно представить в виде (фиг. 1):

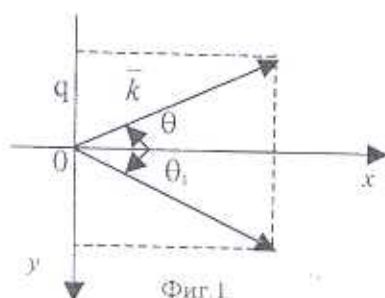
$$p = k \cos \theta, \quad q = -k \sin \theta \quad (2.6)$$

где θ — угол скольжения, т.е. угол между волновым вектором $\vec{k} = \{p, q\}$ и положительным направлением оси Ox , причем

$$k^2 = p^2 + q^2, \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{q}{p} \quad (2.7)$$

При обозначениях (2.6) и (2.7) дисперсионное уравнение (2.2) принимает форму [6]:

$$k = \omega/S_0 \sqrt{1 + (\alpha - 1)\cos^2 \theta + \frac{\chi^2 \sin^2 2\theta}{1 + (\gamma - 1)\cos^2 \theta}} \quad (2.8)$$



Фиг. 1

Отметим, что k принимает действительные значения для любого θ . Этот факт следует из того, что средняя во времени потенциальная энергия волны положительна [1, 2]. Отсюда следует, что плоская однородная волна распространяется в любом направлении, заданном волновым вектором \vec{k} .

Из (2.8) находим фазовую скорость волны в зависимости от угла скольжения θ .

$$v^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = S_0^2 \left[1 + (\alpha - 1)\cos^2 \theta + \frac{\chi^2 \sin^2 2\theta}{1 + (\gamma - 1)\cos^2 \theta}\right] \quad (2.9)$$

В частности, когда $\theta = 0$ и $\theta = -\pi/2$, получаем (согласно (1.5), (2.5))

$$v_1^2 = S_0^2 \alpha = \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{c_{55}}{c_{44}} = \frac{c_{55}}{\rho}, \quad v_2^2 = S_0^2 = \frac{c_{44}}{\rho} \quad (2.10)$$

т.е. по направлениям осей Ox и Oy скорость волны не зависит от пьезоэлектрического эффекта. Таким образом, дисперсионное уравнение (2.2) при любом вещественном значении $p = k \cos \theta$, где k определяется по (2.8), имеет пару вещественных корней для q , которые определяются формулами:

$$q_1 = \pm q_0, \quad q_0 = k \sin \theta = p \operatorname{tg} \theta \quad (2.11)$$

и отвечают зеркально-симметричным волнам относительно оси Ox (на фиг.1 $\theta_1 = -\theta$). Другую пару корней уравнения (2.2) можно определить, используя теорему Виета. Получим $q_2 = \pm ir$, где

$$r = \frac{\omega \sqrt{\gamma} |\cos \theta| \sqrt{1 + (\gamma - 1 + 4\chi^2) \cos^2 \theta}}{S_0 \sqrt{1 + \chi^2 \sin^2 2\theta} + [(\alpha\gamma - 1) \cos^2 \theta + (\alpha + \gamma - 2) \sin^2 \theta] \cdot \cos^2 \theta} \quad (2.12)$$

Для r можно получить также выражение:

$$r = k \sqrt{\gamma} |\cos \theta| \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1 + 4\chi^2) \cos^2 \theta}{1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta}} \quad (2.13)$$

Таким образом, уравнения пьезокристалла (1.2) имеют решения вида (2.1), представляющие неоднородные плоские волны:

$$\begin{aligned} u &= U e^{z\gamma y + i(px - \omega t)} \\ \varphi &= \Phi e^{z\gamma y + i(px - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

которые распространяются в направлении оси Ox и убывают в направлении оси Oy (при знаке "+") или $-Oy$ (при знаке "-"). Ясно, что для безграничного кристалла они не имеют физического смысла и могут описывать физический процесс только в ограниченных кристаллах.

Перейдем к уравнению (1.3), описывающему квазистатическое поле в вакууме.

Ищем решение в виде:

$$\varphi_* = \Phi_* e^{i(px + qy - \omega t)} \quad (2.15)$$

В этом случае получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \quad (2.16)$$

откуда следует $q = \pm i|p|$.

Следовательно, получаем решения в виде неоднородных плоских волн:

$$\varphi_* = \Phi_* e^{\pm py + i(px - \omega t)} \quad (2.17)$$

3. Решение задачи. Пусть из пьезокристалла на границу раздела падает плоская сдвиговая электроупругая волна вида (2.1) с амплитудами U_0, Φ_0 , частотой ω , волновым числом k , продольными и поперечными волновыми числами $p = k \cos \theta, q = -k \sin \theta = -q_0$, углом скольжения θ (фиг. 1). Вследствие взаимодействия падающей волны с границей раздела возникают: отраженные электроупругие плоские волны в пьезоэлектрике, неоднородные плоские электрические волны в вакууме, сопутствующие поверхностные электроупругие (неоднородные) волны в пьезоэлектрике.

Вследствие удовлетворения граничным условиям, все волны имеют одинаковую частоту ω и продольное волновое число p (т. е. волны вдоль границы распространяются с одинаковой скоростью), совпадающие с соответствующими характеристиками падающей волны. Отраженная, сопутствующая поверхностная и электрическая волны имеют соответственно следующие волновые числа:

$$q = q_0 = k \sin \theta, \quad q = ir, \quad q = i|p| \quad (3.1)$$

где r определяется по (2.12) или (2.13).

Связь между амплитудами упругого перемещения и электрического потенциала дается по (2.3) или (2.4).

Таким образом, волновые поля в пьезоэлектрике и в вакууме будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u &= [U_0 e^{-iq_0 y} + U_1 e^{iq_0 y} + iB\Phi_2 e^{-r y}] e^{i(p x - \omega t)} \\ \varphi &= [-U_0 A e^{-iq_0 y} + A U_1 e^{iq_0 y} + \Phi_2 e^{-r y}] e^{i(p x - \omega t)} \\ \varphi_e &= \Phi_e e^{i p y} e^{i(p x - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{где } A = \frac{(1+\beta)e \sin 2\theta}{2\varepsilon[1+(\gamma-1)\cos^2 \theta]}, \quad B = \frac{\gamma(1+\beta)\epsilon p \cos^2 \theta}{cr[1+(\gamma-1)\cos^2 \theta]} \quad (3.3)$$

Здесь U_0, U_1 — амплитуды смещения падающей и отраженной волны, Φ_2 — амплитуда потенциала СПВ, Φ_e — амплитуда электрической волны в вакууме. Заметим, что амплитуда смещения СПВ U_2 выражена через амплитуду потенциала Φ_2 , подчеркивая тот факт, что при $e=0$ СПВ имеет чисто электрический характер.

Подставляя решения (3.2) в граничные условия (1.4), после некоторых, но громоздких вычислений найдем неизвестные амплитуды U_1, Φ_2, Φ_e .

$$U_1 = R_1 U_0, \quad \Phi_2 = Q_2 U_0, \quad \Phi_e = Q_e U_0, \quad R_1 = \frac{M \sin \theta - i\chi^2 N |\cos \theta|}{M \sin \theta + i\chi^2 N |\cos \theta|}$$

$$Q_2 = \frac{\pm 2i \sin \theta (1+c) e_{14} r_2 P_2}{M \sin \theta + i\chi^2 N |\cos \theta|}, \quad Q_e = \frac{\pm 2i(1+\beta)^2 \epsilon r_2 \sin \theta P_2}{[1+(\gamma-1)\cos^2 \theta][M \sin \theta + i\chi^2 N |\cos \theta|]}$$

$$M = \varepsilon_0 (1+\beta)^2 r_2 \{ [M \sin \theta + i\chi^2 N |\cos \theta|]^2 + 4\gamma\chi^2 \cos^4 \theta \} + \varepsilon_0 [1+\beta + \{ (1+\beta)(\gamma-1) + 4\chi^2 \} \cos^2 \theta]^2$$

$$N = 4\epsilon r_2 [1 - (1+\gamma\beta)\cos^2 \theta]^2$$

$$P_2 = \{ 1 + \beta + \{ (1+\beta)(\gamma-1) + 4\chi^2 \} \cos^2 \theta \} [1 - (1+\gamma\beta)\cos^2 \theta]$$

$$P_e = \{ 1 + (\gamma-1)\cos^2 \theta + 4\gamma\chi^2 \cos^4 \theta \} [1 - (1+\gamma\beta)\cos^2 \theta]$$

$$r_2 = \sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{1 + (\gamma-1 + 4\chi^2)\cos^2 \theta}{1 + (\gamma-1)\cos^2 \theta}}, \quad r = k |\cos \theta| r_2 \quad (3.4)$$

В случае кубических кристаллов, полагая $\alpha = \beta = \gamma = 1$, получаем:

$$U_1 = R_1 U_0, \quad \Phi_2 = Q_2 U_0, \quad \Phi_e = Q_e U_0$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{M \sin \theta - i\chi^2 N |\cos \theta|}{M \sin \theta + i\chi^2 N |\cos \theta|}, & Q_2 &= \frac{\pm 4ier_0 \sin \theta P_2}{M \sin \theta + i\chi^2 N |\cos \theta|} \\
Q_1 &= \frac{\pm 8ier_0 \sin \theta P_1}{[M \sin \theta + i\chi^2 N |\cos \theta|]}, & M &= 4\epsilon_0 r_0 \{1 + \chi^2 \cos^4 \theta\} + 4\epsilon_0 \{1 + 2\chi^2 \cos^2 \theta\}^2 \\
N &= 4\epsilon_0 r_0 \cos^2 2\theta, & P_2 &= -2(1 + 2\chi^2 \cos^2 \theta) \cos 2\theta, \\
P_1 &= -(1 + 4\chi^2 \cos^4 \theta) \cos 2\theta, & r_0 &= \sqrt{1 + 4\chi^2 \cos^2 \theta}, \quad r = k |\cos \theta| r_0, \\
k &= \frac{\omega}{S_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \chi^2 \sin^2 2\theta}}, & \chi^2 &= \frac{e^2}{c\epsilon}, \quad S_0 = \frac{c}{\rho}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Сравнивая полученные выражения с результатами работы [1], замечаем, что в выражение ФВ (ст.47, формула (1.15)) в числителе участвует лишний множитель $-2\cos\theta$, а в выражении B_1 — во второй круглой скобке должно быть $\cos^4\theta$ вместо $\cos^2\theta$.

Как видно из (3.4)₂, амплитуда отраженной волны U_1 комплексна и по модулю равна единице. Как известно [1,2,7], такая ситуация соответствует полному внутреннему отражению, возникающему при определенных углах и определенных соотношениях между параметрами граничащих сред. В нашей задаче, как и при кубических кристаллах, отражение электроупругой волны, вследствие возникновения СПВ, имеет характер полного внутреннего отражения при любом угле скольжения, за исключением случаев нормального падения ($\theta = \pi/2$) и скольжения под углами, которые определяются из уравнения:

$$1 - (1 + \gamma\beta)\cos^2 \theta = 0 \tag{3.6}$$

В случае кубических кристаллов уравнение (3.6) сводится к уравнению $\cos 2\chi = 0$, которое дает корни $\theta = \pi/4$ и $\theta = 3\pi/4$. В случае падения под указанными углами, когда СПВ не возникает, имеет место обычное отражение сдвиговых волн с $R_1 = 1$.

Обратим внимание на следующие важные обстоятельства. Если $k \ll \chi^2$, то $\Phi_2 \rightarrow 0$ и $U_1 \rightarrow -U_0$, т.е. сдвиговые электроупругие волны параллельно поверхности пьезокристалла рассматриваемой симметрии не распространяются. Между тем, без пьезоэффекта такое распространение возможно (при $\chi^2 = 0$, $R_1 = 1$). Такая особенность характерна полному внутреннему отражению. Далее, при $\theta \sim \chi^2$ амплитуда потенциала СПВ существенно превосходит амплитуду потенциала отраженной волны, что может приводить к эффективному взаимодействию падающих электроупругих волн с плазмой полупроводника, расположенного вблизи поверхности пьезоэлектрика [1,2].

В заключении приведем численные данные поля для пьезокристалла $\alpha\text{-HNO}_3$ (йодноватая кислота), которые принадлежат классу 222 ромбической симметрии [8].

$$\rho = 4629 \text{ кг/м}^3, \quad c_{44} = 1,835 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{55} = 1,106 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

$$\epsilon_{14} = 29,36 \cdot 10^{-2} \text{ Кл/м}^2, \epsilon_{25} = 22,26 \cdot 10^{-2} \text{ Кл/м}^2, \epsilon_{11} = 66,375 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Нм}^2, \\ \epsilon_{22} = 109,74 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Нм}^2, \epsilon_* = \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Нм}^2.$$

Заключение. Рассмотрено отражение плоской электроупругой сдвиговой волны от свободной границы раздела ромбического кристалла класса 222 и вакуума.

Определены волновые поля в пьезокристалле и в вакууме. Показано, что электрическое поле падающей волны частично просачивается в вакуум, вследствие чего в вакууме около границы раздела возникает волна электрического поля, распространяющаяся вдоль границы с той же фазовой скоростью, что и электроупругие волны. Такая волна порождает дополнительную поверхностную электрическую волну в пьезокристалле, а следовательно, и сопутствующую ей упругую волну. Формально этот результат следует из существования двух независимых граничных условий для электрического потенциала, тогда как потенциал поля в вакууме дает одну новую постоянную. Существование сопутствующей электроупругой поверхностной волны приводит к тому, что отражение приобретает характер полного внутреннего отражения. Отметим, что, в отличие от обычно рассматриваемых случаев, сопутствующая поверхностная волна, возникающая при полном внутреннем отражении, распространяется в той же среде, что и падающая и отраженная волны. Далее, сдвиговые волны, параллельно поверхности кристалла (при малых углах скольжения ($\theta < \chi^2$)) не могут распространяться. А при падении $\theta \sim \chi^2$, отражение может привести к эффективному взаимодействию электроупругих волн с плазмой близлежащего полупроводника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Изд. Наука, сибирское отделение, 1982. 240с.
2. Дьелсан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424с.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. // В кн.: "Актуальные проблемы неоднородной механики", Материалы Всесоюзного научного семинара. Ереван, 1991. 23—26 июня. С.49—54.
4. Белубекян М.В., Белубекян В.М. О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы раздела пьезоэлектриков // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. N3—4. С.78—82.
5. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Отражение упругой волны от границы раздела пьезокристалл-вакуум // ФТТ. 1969. Т.11. Вып.4. С.1027—1029.
6. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т.38. N1. С.12—19.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
8. Акустические кристаллы. Справочник под ред. М.П.Шаскольской, М.: Наука, 1982. 632 с. (с. 361—365).