ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №3, 2002 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ВЕСЬМА ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Амбарцумян С. А.

Ս.Ա. Համբարձումյան

Էապես փոքր կորությամբ թաղանթի ոչ սիմետրիկ ջերմաառաձգականության խնդիրը։

Ոչ սիմետրիկ առաձգականության տեսության հիման վրա դիտարկվում է էապես փոքր կորություն ունեցող թաղանթի ջերմաառաձգականության խնդիրը։ Բերվում են որոշ մոդելային խնդիրների լուծումներ, որոնք բնորոշում են ոչ սիմետրիկության հաշվառման հետ կապված առանձնահատկությունները։

S. A. Ambartsumian

The Problem of the Nonsymmetrical Thermoelasticity of the Extremely Shallow shells

Рассматривается задача термоупругости весьма пологих оболочек на основе несимметричной теории упругости [1-4]. Приводятся решения некоторых модельных задач, характеризирующих специфические особенности, связанные с учетом несимметричности.

1. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины h в ортогональной смешанной системе координат α_i. Пусть α_1 и α_2 являются криволинейными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны срединной поверхности оболочки, а α_3 является прямолинейной и представляет расстояние по нормали от точки (α_1, α_2) срединной поверхности до точки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ оболочки. Предполагаем, что коэффициенты первой квадратичной формы $B_i(\alpha_1, \alpha_2)$, а также главные кривизны срединной поверхности $k_i(\alpha_1, \alpha_2)$ при дифференцировании ведут себя как постоянные. При этом система координат α_1, α_2 выбрана так, что выполняется неравенство $k_1 k_2 B_1 B_2 << 1$, что с достаточно высокой точностью обеспечивает удовлетворение соотношений Гаусса-Кодацци [3,5]. Предполагается также, что температура в теле оболочки изменяется во времени t на величину $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)$, при этом, первоначальный прямоугольный бесконечно малый параллелепипед тела оболочки остается прямоугольным [6-7]. Считается, что функция T удовлетворяет уравнениям теплопроводности.

Далее принимаются следующие гипотезы [2].

а) Нормальное к срединной поверхности оболочки перемещение $u_3(\alpha_1, \alpha_2)$ и повороты относительно нормальных линий $\alpha_3 - \omega_3(\alpha_1, \alpha_2)$ не зависят от координаты α_3.

б) Касательные напряжения σ_{13} и σ_{23} по толщине оболочки меняются по заданному закону.

в) Силовые $-\ \sigma_{33}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$ и моментные $-\ \mu_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}$ напряжения пренебрежимо малы по сравнению с другими родственными напряжениями.

В последующем, в силу принятых предположений и гипотез, там где это очевидно, принимается, что $1 \pm k_i \alpha_3 \approx 1$. Полагая, что координаты α_1 и α_2 являются абсолютными, для коэффициентов первой квадратичной формы примем $B_1 = 1,\ B_2 = 1$.

2. Согласно принятым предположениям исходные уравнения и соотношения несимметричной теории в случае рассматриваемой задачи запишутся следующим образом[1-2]:

обобщенный закон термоупругости

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + (\lambda \gamma_{kk} - \beta_t T)\delta_{ji} \tag{2.1}$$

$$\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ij} + \beta_t \chi_{3k} T \delta_{ji} \tag{2.2}$$

где σ_{ji} – силовые напряжения, μ_{ji} – моментные напряжения, $\mu = E/2(1+\nu)$, $\lambda = E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)$ – постоянные Ламе, E – модуль упругости, ϑ – коэффициент Пуассона, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – четыре новые упругие постоянные, $\beta_t = \alpha_t(2\mu + 3\lambda)$ – обобщенный коэффициент теплового расширения, α_t – коэффициент линейного теплового расширения. γ_{ji} и χ_{ji} – компоненты несимметричных тензоров деформаций и изгиба-кручения соответственно, которые имеют вид

$$\gamma_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} + \delta_{ji} u_k k_j - \in_{kji} \omega_k \tag{2.3}$$

$$\chi_{ji} = \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_j} + \delta_{ji} \omega_k k_j \tag{2.4}$$

где u_i – компоненты вектора перемещения, ω_i – компоненты вектора поворота, в целом независимого от u_i, $\in_{kji}$ – тензор Леви-Чевиты.

Уравнения равновесия (движения)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \alpha_3} + (k_1 + k_2)\sigma_{31} + k_1 \sigma_{13} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \alpha_3} + (k_1 + k_2)\sigma_{32} + k_2 \sigma_{23} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \alpha_2} + (k_1 + k_2)\sigma_{33} - k_1 \sigma_{11} - k_2 \sigma_{22} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

и далее

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mu_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \mu_{31}}{\partial \alpha_3} + (k_1 + k_2)\mu_{31} + k_1 \mu_{13} + \sigma_{23} - \sigma_{32} = J\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \mu_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \mu_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial \alpha_3} + (k_1 + k_2)\mu_{32} + k_2 \mu_{23} + \sigma_{31} - \sigma_{13} = J\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \mu_{33}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial \mu_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial \alpha_2} + (k_1 + k_2)\mu_{33} - k_2 \mu_{22} - k_1 \mu_{11} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = J\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где ρ — плотность, J — мера инерции при вращении, равная произведению момента инерции частицы вещества вокруг любой оси, проходящей через ее центр тяжести, на число частиц в единице объема.

Из (2.1), пренебрегая σ_{33}, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= B\gamma_{11} + B_{12}\gamma_{22} - B(1+\nu)\alpha_t T, \quad B = E/(1-\nu^2) \\ \sigma_{22} &= B\gamma_{22} + B_{12}\gamma_{11} - B(1+\nu)\alpha_t T, \quad B_{12} = \nu E/(1-\nu^2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

которые не отличаются от соответствующих соотношений классической теории [8].

А для остальных силовых напряжений получим

$$\sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} \tag{2.8}$$

которые, как и следовало ожидать, аналогично моментным напряжениям не содержат температурные члены в явном виде.

3. Согласно гипотезе а) из (2.3) и (2.4) получим

$$\gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \approx 0, \; u_3 = w(\alpha_1, \alpha_2) \tag{3.1}$$

$$\chi_{33} = \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_3} \approx 0, \; \omega_3 = \psi_3(\alpha_1, \alpha_2) \tag{3.2}$$

где $w(\alpha_1, \alpha_2)$ — искомое нормальное перемещение, $\psi_3(\alpha_1, \alpha_2)$ — искомый поворот вокруг координатных линий α_3.

Согласно гипотезе б) для напряжений σ_{13}, σ_{23} имеем [2,3]

$$\sigma_{13} = \alpha f(\alpha_3)\psi_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{23} = \alpha f(\alpha_3)\psi_2(\alpha_1, \alpha_2) \tag{3.3}$$

где $f(\alpha_3)$ — заданная функция, характеризующая закон изменения напряжений σ_{i3} по толщине оболочки, и имеет вид

$$f(\alpha_3) = (h^2/4 - \alpha_3^2)/2 \tag{3.4}$$

$\psi_i(\alpha_1, \alpha_2)$ — искомые функции.

Разрешив (2.8) относительно компонент тензора деформаций γ_{i3} и γ_{3i}, получим

$$\gamma_{i3} = \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{i3} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{3i}, \; \gamma_{3i} = \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{3i} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{i3} \tag{3.5}$$

Согласно гипотезе в) из (2.3) с учетом (3.3) и (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{13} &= \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1 + \omega_2 = \frac{\mu+\alpha}{4\mu} f(\alpha_3)\psi_1 \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2 - \omega_1 = \frac{\mu+\alpha}{4\mu} f(\alpha_3)\psi_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

откуда с учетом (3.1) для двух компонент тензора поворота ω_i получим

$$\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2 - \frac{\mu+\alpha}{4\mu} f(\alpha_3)\psi_2$$
$$\omega_2 = -\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + k_1 u_1 + \frac{\mu+\alpha}{4\mu} f(\alpha_3)\psi_1 \tag{3.7}$$

Далее, согласно гипотезе в) из (2.3) с учетом (3.3),(3.5) и (3.7) имеем

$$\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_3} - k_i u_i = -\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{\alpha}{2\mu} f(\alpha_3)\psi_i \tag{3.8}$$

Полагая, что при $\alpha_3 = 0$ $u_1 = u(\alpha_1, \alpha_2)$, $u_2 = \mathrm{v}(\alpha_1, \alpha_2)$ из (3.8) с принятой здесь точностью, т.е $1 \pm k_i\alpha_3 \approx 1$, для тангенциальных перемещений получим

$$u_1 = u - \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{\alpha}{2\mu} \mathrm{I}_0(\alpha_3)\psi_1 \tag{3.9}$$

$$u_2 = \mathrm{v} - \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{\alpha}{2\mu} \mathrm{I}_0(\alpha_3)\psi_2 \tag{3.10}$$

где

$$I_0(\alpha_3) = \int_0^{\alpha_3} f(\alpha)d\alpha = \frac{\alpha_3}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\alpha_3^2}{3}\right) \tag{3.11}$$

$u(\alpha_1,\alpha_2)$, $\mathrm{v}(\alpha_1,\alpha_2)$ – искомые тангенциальные перемещения срединной поверхности.

Рассматривая формулы компонент вектора перемещения какой-либо точки оболочки u_i (3.1), (3.9), (3.10), замечаем полную аналогию строений этих формул со строениями соответствующих формул уточненной теории пологих оболочек в классической подстановке [3].

Подставляя значения перемещений u_i и поворотов ω_i соответственно в (2.3) и (2.4) и далее эти результаты в (2.1), (2.3), (2.7) для расчетных силовых и моментных напряжений получим следующие представления:

$$\sigma_{\{11,22\}} = B\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + k_1 w\right) + B_{12}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \alpha_2} + k_2 w\right) - B(1+\nu)\alpha_t T -$$
$$-\alpha_3 B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}\right) + \mathrm{I}_0 \frac{\alpha B}{2\mu}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \nu\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2}\right) \tag{3.12}$$

$$\sigma_{\{12,21\}} = (\mu+\alpha)\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \alpha_1} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2}\right) - 2\alpha_3\mu\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} +$$
$$+ I_0 \frac{\alpha(\mu+\alpha)}{2\mu}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2}\right)\{-,+\}2\alpha\psi_3 \tag{3.13}$$

$\{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2, u \leftrightarrow \mathrm{v}, \psi_1 \leftrightarrow \psi_2\}$

$$\sigma_{13} = \alpha f(\alpha_3)\psi_1, \qquad \sigma_{23} = \alpha f(\alpha_3)\psi_2 \tag{3.14}$$

и далее

$$\mu_{\{11,22\}}=\{+,-\}2\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\{-,+\}\left[(2\gamma+\beta)k_2\frac{\partial v}{\partial\alpha_1}-\beta k_1\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}\right]+\left[2\gamma k_1+\beta(k_1+\right.$$

$$\left.+k_2)\right]\psi_3\{-,+\}f(\alpha_3)\frac{\mu+\alpha}{4\mu}\left[(2\gamma+\beta)\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\beta\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}\right]+\frac{\alpha\beta}{2\mu}I_0\left(k_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}-k_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}\right) \tag{3.15}$$

$$\mu_{\{12,21\}}=\{-,+\}(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1{}^2}-\eta\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2{}^2}\right)\{+,-\}(\gamma+\varepsilon)\left(k_1\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}-\eta k_2\frac{\partial v}{\partial\alpha_2}\right)$$

$$\{+,-\}Kf(\alpha_3)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}-\eta\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}\right)\{+,-\}\frac{\alpha(\gamma+\varepsilon)}{2\mu}I_0\left(k_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}-\eta k_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}\right) \tag{3.16}$$

$$\mu_{\{13,23\}}=(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha_1}\{-,+\}(\gamma+\varepsilon)(k_1-\eta k_2)\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\{+,-\}$$

$$\{+,-\}K\left(k_1-2\eta k_2\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\right)f(\alpha_3)\psi_2\{+,-\}K\eta\alpha_3\psi_2 \tag{3.17}$$

$$\{\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2, u\leftrightarrow v, \psi_1\leftrightarrow\psi_2, k_1\leftrightarrow k_2\}$$

где

$$K=\frac{(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)}{4\mu},\qquad \eta=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \tag{3.18}$$

Отметим, что все напряжения по толщине оболочки изменяются нелинейно.

4. Из условий статической эквивалентности для внутренних тангенциальных $(T_{11},T_{22},S_{12},S_{21})$ и поперечных (N_{13},N_{23}) усилий, изгибающих (M_{11},M_{22}) и крутящих (H_{12},H_{21}) моментов от силовых напряжений, изгибающих (R_{12},R_{21}), крутящих (P_{11},P_{22}) и планарных (Q_{13},Q_{23}) моментов от моментных напряжений на единицу длины торцевых сечений имеем

$$T_{\{11,22\}}=Bh\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+k_1w+\nu\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha_2}+k_2w\right)\right]-B(1+\nu)\alpha_tT_t \tag{4.1}$$

$$S_{\{12,21\}}=(\mu+\alpha)h\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha_1}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha_2}\right)\{-,+\}2\alpha h\psi_3 \tag{4.2}$$

$$N_{13}=\alpha\frac{h^3}{12}\psi_1,\qquad N_{23}=\alpha\frac{h^3}{12}\psi_2 \tag{4.3}$$

$$M_{\{11,22\}}=-\frac{Bh^3}{12}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}-\frac{\alpha h^2}{20\mu}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\nu\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}\right)\right]-B(1+\nu)\alpha_tM_t \tag{4.4}$$

$$H_{\{12,21\}}=-2\mu\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+\frac{\alpha(\mu+\alpha)h^5}{240\mu}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}\right) \tag{4.5}$$

$$\{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2, u \leftrightarrow v, \psi_1 \leftrightarrow \psi_2, k_1 \leftrightarrow k_2\}$$

где

$$T_t = \int_{-h/2}^{h/2} T\, d\alpha_3, \qquad M_t = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3 T\, d\alpha_3 \tag{4.6}$$

Рассматривая эти формулы, замечаем, что они во многом повторяют соответствующие формулы уточненной теории оболочек.

Далее имеем совершенно новые представления — моменты от моментальных напряжений, которые не содержат температурных членов.

$$P_{[11,22]} = -2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1 \partial\alpha_2} \{-,+\} h \left[(2\gamma+\beta) k_2 \frac{\partial v}{\partial\alpha_1} - \beta k_1 \frac{\partial u}{\partial\alpha_2}\right] +$$
$$+ \left[2\gamma k_1 + \beta(k_1+k_2)\right] h\psi_3 \{-,+\} \frac{h^3}{12}\frac{(\mu+\alpha)}{4\mu}\left[(2\gamma+\beta)\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1} - \beta\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}\right] \tag{4.7}$$

$$R_{[12,21]} = \{-,+\}(\gamma+\varepsilon) h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2} - \eta\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}\right)\{+,-\}(\gamma+\varepsilon) h\left(k_1\frac{\partial u}{\partial\alpha_1} - \eta k_2 \frac{\partial v}{\partial\alpha_2}\right)\{+,-\}$$
$$\{+,-\} K \frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1} - \eta\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}\right) \tag{4.8}$$

$$Q_{[13,23]} = (\gamma+\varepsilon) h \frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha_1}\{-,+\}(\gamma+\varepsilon) h (k_1 - \eta k_2)\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\{+,-\} K \frac{h^3}{12}\left(k_1 - 2\eta k_2 \frac{\alpha}{\mu+\alpha}\right)\psi_2 \tag{4.9}$$

$$\{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2, u \leftrightarrow v, \psi_1 \leftrightarrow \psi_2, k_1 \leftrightarrow k_2\}$$

Из (2.5), после некоторых очевидных преобразований, приходим к следующим уравнениям движения в усилиях и моментах [2]:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial\alpha_2} + k_1 N_{13} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_{22}}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial\alpha_1} + k_2 N_{23} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial\alpha_2} - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial(P_{11} - H_{12})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(R_{21} - M_{22})}{\partial\alpha_2} + k_1 Q_{13} + N_{23} = hR_1 \frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_2 \partial t^2} - hR_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial(P_{22} + H_{21})}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial(R_{12} + M_{11})}{\partial\alpha_1} + k_2 Q_{23} - N_{13} = -hR_1 \frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1 \partial t^2} + hR_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial\alpha_2} - k_2 P_{22} - k_1 P_{11} + S_{12} - S_{21} = J\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2} \tag{4.13}$$

где

$$R_1 = J + \frac{h^2}{12}\rho, \qquad R_2 = \frac{h^2}{12}\left(\frac{\mu+\alpha}{4\mu}J + \frac{\alpha h^2}{20\mu}\rho\right) \tag{4.14}$$

Запишем эти уравнения в основных искомых функциях $u(\alpha_1,\alpha_2)$, $v(\alpha_1,\alpha_2)$, $w(\alpha_1,\alpha_2)$, $\psi_i(\alpha_1,\alpha_2)$. Подставляя значения внутренних усилий и моментов из (4.1)-(4.9) в (4.10)-(4.13), получим следующие уравнения:

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1^2}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_2^2}+(B_{12}+\mu-\alpha)\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+B(k_1+\nu k_2)\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+$$
$$+\alpha k_1\frac{h^2}{12}\psi_1\{+,-\}2\alpha\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha_2}=\frac{B(1+\nu)\alpha_t}{h}\frac{\partial T_t}{\partial\alpha_1}+\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4.15}$$

. . . . (4.16)

$\{\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2, u\leftrightarrow v, \psi_1\leftrightarrow\psi_2, k_1\leftrightarrow k_2\}$

$$B(k_1+\nu k_2)\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+B(k_2+\nu k_1)\frac{\partial v}{\partial\alpha_2}+B\left(k_1^2+k_2^2+2\nu k_1k_2\right)w-$$
$$-\frac{\alpha h^2}{12}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}\right)=\frac{B(1+\nu)\alpha_t}{h}(k_1+k_2)T_t-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{4.17}$$

$$\overline{A}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\Delta w-\frac{h^2}{48\mu}\left(A_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_1^2}+A_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_2^2}+A_3\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\right)+\frac{\alpha h^2}{12}\psi_1-\left[k_2(3\gamma+\beta+\varepsilon)+\right.$$
$$\left.+k_1\beta\right]\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha_2}-k_1\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1^2}+(2\gamma+\beta)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_2^2}\right]+k_2(\gamma+\beta-\varepsilon)\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}=$$
$$=-\frac{B(1+\nu)\alpha_t}{h}\frac{\partial M_t}{\partial\alpha_1}+R_1\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1\partial t^2}-\frac{h^2}{12}R_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}+k_1J\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4.18}$$

. . . . (4.19)

$\{\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2, u\leftrightarrow v, \psi_1\leftrightarrow\psi_2, k_1\leftrightarrow k_2\}$

$$2\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial u}{\partial\alpha_2}\right)-4\gamma(k_1-k_2)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+(\gamma+\varepsilon)\Delta\psi_3-4\alpha\psi_3+$$
$$+\frac{h^2}{48\mu}\left(D_1\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-D_2\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}\right)=J\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2} \tag{4.20}$$

где

$$D_{\{1,2\}}=(\mu+\alpha)(3\gamma+\beta+\varepsilon)k_1-\left[2\alpha(\gamma-\varepsilon)-\beta(\alpha+\mu)\right]k_2,\{k_1\leftrightarrow k_2\} \tag{4.21}$$

$$\overline{A}=\frac{h^2}{12}B+\gamma+\varepsilon,\qquad A_1=(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)+\frac{h^2}{5}B\alpha$$
$$A_3=\frac{h^2}{5}(B_{12}+\mu-\alpha)\alpha-(\mu+\alpha)(\beta+\gamma-\varepsilon) \tag{4.22}$$
$$A_2=(\mu+\alpha)(2\gamma+\beta)+\frac{h^2}{5}(\mu+\alpha)\alpha,\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}$$

Мы получили систему из шести дифференциальных уравнений относительно шести искомых функций. К этим уравнениям должны быть присоединены граничные и начальные условия, которые имеют обычную структуру, естественно при этом граничные условия будут содержать элементы термоупругого содержания. Приведем некоторые граничные условия для края $\alpha_1 = \mathrm{const}$ [2]

а) Свободный край

$$T_{11}=0,\ S_{12}=0,\ M_{11}+R_{12}=0,\ H_{12}+P_{11}=0,\ N_{13}=0,\ Q_{13}=0 \qquad (4.23)$$

б) Шарнирно опертый край

$$T_{11}=0,\ \mathrm{v}=0,\ M_{11}+R_{12}=0,\ \psi_2=0,\ Q_{13}=0,\ w=0 \qquad (4.24)$$

в) Жестко заделанный край

$$u=0,\ \mathrm{v}=0,\ w=0,\ \psi_3=0,\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3}\right|_{\alpha_3=0}=0,\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3}\right|_{\alpha_3=0}=0 \qquad (4.25)$$

Очевидно, что возможны и другие варианты непротиворечивых граничных условий.

Таким образом, основные уравнения и соотношения, а также все расчетные формулы задачи термоупругости весьма пологих оболочек по несимметричной теории упругости получены.

Построенная здесь теория термоупругости оболочек применима не только для решения задач весьма пологих оболочек. Она корректно может быть использована при рассмотрении задач краевого эффекта и локальной устойчивости различных типов оболочек, при исследовании задач колебаний (в частности, высокочастотных) и динамической устойчивости, для эффективного решения прикладных задач цилиндрических оболочек и др.

5. Для иллюстрации рассмотрим некоторые модельные задачи.

а) Шарнирно опертая по всему контуру весьма пологая сферическая оболочка $\left(k_1=k_2=k=R^{-1}\right)$ с квадратным контуром $\left(0\le\alpha_1\le b, 0\le\alpha_2\le b\right)$ под действием температуры распределенной по закону [7,8].

$$T=\left(T_0+\alpha_3 T_1\right)\sin\frac{\pi\alpha_1}{b}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b}$$

$$T_t=T_0 h\sin\frac{\pi\alpha_1}{b}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b},\qquad M_t=\frac{h^2}{12}T_1\sin\frac{\pi\alpha_1}{b}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b} \qquad (5.1)$$

Из (4.15)–(4:20) и согласно (4.6) имеем следующие исходные уравнения:

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2}+(B_{12}+\mu-\alpha)\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+\frac{B(1+\nu)}{R}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}+$$
$$+\frac{\alpha h^2}{12R}\psi_1+2\alpha\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha_2}=\frac{B(1+\nu)\alpha_t T_0\pi}{b}\cos\frac{\pi\alpha_1}{b}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b} \qquad (5.2)$$

$$B\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \alpha_2^2}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \alpha_1^2}+(B_{12}+\mu-\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+\frac{B(1+\nu)}{R}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2}+$$

$$+\frac{\alpha h^2}{12R}\psi_2-2\alpha\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha_1}=\frac{B(1+\nu)\alpha_t T_0\pi}{b}\sin\frac{\pi\alpha_1}{b}\cos\frac{\pi\alpha_2}{b}$$

$$\frac{B(1+\nu)}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial v}{\partial\alpha_2}\right)+2\frac{B(1+\nu)}{R^2}w-\frac{\alpha h^2}{12}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}\right)= \tag{5.3}$$

$$=2\frac{B(1+\nu)\alpha_t T_0}{R}\sin\frac{\pi\alpha_1}{b}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b}$$

$$\bar{A}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\Delta w-\frac{h^2}{48\mu}\left(A_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_1^{\,2}}+A_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_2^{\,2}}+A_3\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\right)+\frac{\alpha h^2}{12}\psi_1-$$

$$-\frac{3\gamma+2\beta+\varepsilon}{R}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{R}\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1^{\,2}}+(2\gamma+\beta)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_2^{\,2}}-(\gamma+\beta-\varepsilon)\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\right]=$$

$$=-\frac{B(1+\nu)\alpha_t T_1 h\pi}{12b}\cos\frac{\pi\alpha_1}{b}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b}$$

$$\bar{A}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\Delta w-\frac{h^2}{48\mu}\left(A_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha_2^{\,2}}+A_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha_1^{\,2}}+A_3\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\right)+\frac{\alpha h^2}{12}\psi_2-$$

$$-\frac{3\gamma+2\beta+\varepsilon}{R}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{R}\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha_2^{\,2}}+(2\gamma+\beta)\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha_1^{\,2}}-(\gamma+\beta-\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\right]=$$

$$=-\frac{B(1+\nu)\alpha_t T_1 h\pi}{12b}\sin\frac{\pi\alpha_1}{b}\cos\frac{\pi\alpha_2}{b} \tag{5.4}$$

$$2\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial u}{\partial\alpha_2}\right)+(\gamma+\varepsilon)\Delta\psi_3-4\alpha\psi_3+$$

$$+\frac{h^2[(\mu+\alpha)(3\gamma+2\beta+\varepsilon)-2\alpha(\gamma-\varepsilon)]}{48\mu R}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}\right)=0 \tag{5.5}$$

Граничные условия

при $\alpha_1=0,\ \alpha_1=b,\ T_{11}=0,\ v=0,\ M_{11}+R_{12}=0,\ \psi_2=0,\ Q_{13}=0,\ w=0$

при $\alpha_2=0,\ \alpha_2=b,\ T_{22}=0,\ u=0,\ M_{22}+R_{21}=0,\ \psi_1=0,\ Q_{23}=0,\ w=0$ (5.6)

Полагая

$$w=W\sin\frac{\pi\alpha_1}{b}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b},\qquad \psi_3=\Psi_3\cos\frac{\pi\alpha_1}{b}\cos\frac{\pi\alpha_2}{b}$$

$$\{u,\ \psi_1\}=\{U,\Psi_1\}\cos\frac{\pi\alpha_1}{b}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b},\ \{v,\psi_2\}=\{V,\Psi_2\}\sin\frac{\pi\alpha_1}{b}\cos\frac{\pi\alpha_2}{b} \tag{5.7}$$

Удовлетворим граничным условиям шарнирного опирания (5.6), а из системы уравнений (5.2)-(5.5) для коэффициентов искомых функций с точностью $1\pm l^2/b^2\approx 1$ получим

$$W=\frac{B(1+\nu)h}{24\bar{A}\lambda^2 a_4}\alpha_t T_1+\frac{AB(1+\nu)a_2}{2\bar{A}\lambda^4 Ra_4}\alpha_t T_0, \qquad \Psi_3=0 \tag{5.8}$$

$$U=V=\frac{B(1+\nu)^2 a_1 h}{48\bar{A}\lambda^3 Ra_4}\alpha_t T_1+\frac{AB(1+\nu)^2 a_1 a_2}{4\bar{A}\lambda^5 R^2 a_4}\alpha_t T_0-\frac{(1+\nu)a_1}{2\lambda}\alpha_t T_0 \tag{5.9}$$

$$\Psi_1=\Psi_2=-\frac{12}{\alpha h^2}\left[\frac{B^2(1+\nu)^2 ha_2}{24\bar{A}\lambda^3 R^2 a_4}\alpha_t T_1+\frac{B(1+\nu)a_2}{R\lambda}\alpha_t T_0-\frac{AB^2(1+\nu)^2 a_2^{\,2}}{2\bar{A}\lambda^5 R^3 a_4}\alpha_t T_0\right] \tag{5.10}$$

где

$$a_1=\frac{1-\dfrac{1}{R^2\lambda^2}}{1-\dfrac{1+\nu}{2R^2\lambda^2}}, \quad a_2=1-\frac{(1+\nu)a_1}{2}, \quad a_4=1+\frac{AB(1+\nu)}{2\bar{A}R^2\lambda^4}\left[1-\frac{(1+\nu)a_1}{2\lambda R}\right] \tag{5.11}$$

$$\bar{A}=\frac{Bh^2}{12}+(\gamma+\varepsilon)=\frac{Bh^2}{12}\left[1+24(1-\nu)\frac{\alpha}{\alpha+\mu}\frac{l^2}{h^2}\right] \tag{5.12}$$

$$A=A_1+A_2+A_3=1+\frac{\lambda^2 h^2}{5(1-\nu)}\left[1+10(1-\nu)\frac{l^2}{h^2}\right] \tag{5.13}$$

и наконец, новое обобщающее постоянное упругости l, которое имеет размерность длины и записывается следующим образом [2]:

$$l^2=\frac{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}{4\mu\alpha} \tag{5.14}$$

Подставляя (5.8)-(5.10) в (5.7) и далее (3.3), (3.12)-(3.17) а также в (4.1)-(4.9), при этом полагая $k_1=k_2=k=R^{-1}$, получим значения всех расчетных напряжений, усилий и моментов, как традиционных, так и совершенно новых. В частности, мы имеем изгибающие и крутящие моменты, которые происходят вследствие учета моментных напряжений (P_{ij}, R_{ij}), которые перекликаются с классическими моментами, а также совершенно новые планарные моменты (Q_{i3}), которые в классической теории вовсе отсутствуют и существенно зависят как от новых упругих постоянных, так и от кривизны оболочки. В рассматриваемой температурной задаче, в случае пластинки $(R=\infty)$ они отсутствуют.

б) Изгиб свободно опертой по всему контуру, квадратной пластинки $(h\times b\times b)$ под действием температуры T, которая изменяется во времени и распределена по закону

$$T=\frac{\alpha_3}{h}T_1 e^{-2\lambda^2 at}\sin\lambda\alpha_1\sin\lambda\alpha_2, \quad \lambda=\frac{\pi}{b} \tag{5.15}$$

где a – температуропроводность [6], и согласно (4.6)

$$M_t=T_1\frac{h^2}{12}e^{-2\lambda^2 at}\sin\lambda\alpha_1\sin\lambda\alpha_2 \tag{5.16}$$

Из (4.17)-(4.19) при $k_1=k_2=0$ получим следующие исходные уравнения:

$$\bar{A}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\Delta w-\frac{h^2}{48\mu}\left(A_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_1^{\,2}}+A_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_2^{\,2}}+A_3\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\right)+\frac{\alpha h^2}{12}\psi_1=$$
$$=-\frac{B(1+\nu)\alpha_t}{h}\frac{\partial M_t}{\partial\alpha_1}+R_1\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1\partial t^2}-R_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\tag{5.17}$$

$$\bar{A}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\Delta w-\frac{h^2}{48\mu}\left(A_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha_2^{\,2}}+A_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha_1^{\,2}}+A_3\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\right)+\frac{\alpha h^2}{12}\psi_2=$$
$$=-\frac{B(1+\nu)\alpha_t}{h}\frac{\partial M_t}{\partial\alpha_2}+R_1\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_2\partial t^2}-R_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\tag{5.18}$$

$$\frac{\alpha h^2}{12}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\tag{5.19}$$

Полагая

$$w=We^{-2\lambda^2at}\sin\lambda\alpha_1\sin\lambda\alpha_2,\ \psi_2=\Psi_2e^{-2\lambda^2at}\sin\lambda\alpha_1\cos\lambda\alpha_2$$
$$\psi_1=\Psi_1e^{-2\lambda^2at}\cos\lambda\alpha_1\sin\lambda\alpha_2\tag{5.20}$$

удовлетворим граничным условиям свободного опирания по всему контуру $(\alpha_1=0,\ \alpha_1=b,\ \alpha_2=0,\ \alpha_2=b)$, а из системы дифференциальных уравнений, для постоянных интегрирования получим

$$\Psi_1=\Psi_2=-\frac{24\lambda^3\rho a^2}{\alpha h^2}W,\ \ W=\frac{B(1+\nu)\alpha_t hT_1}{24\lambda^2\{\ \}}\tag{5.21}$$

где

$$\{\ \}=\bar{A}+\left(1+\frac{A\lambda^2}{4\mu\alpha}\right)a^2\rho+2R_1\lambda^2a^2+\frac{48R_2\lambda^4}{\alpha h^2}a^4\rho\tag{5.22}$$

Полагая, что динамическая характеристика среды J пропорциональна плотности ρ, т.е. $J=rh^2\rho$, где r – постоянный коэффициент пропорциональности, введя безразмерный параметр $k=a^2\rho/\mu h^2$, согласно (4.14), (5.12), (5.13) и (5.15) для (5.22) в развернутой форме получим

$$\{\ \}=\frac{Bh^2}{12}\left\{1+24(1-\nu)\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\frac{l^2}{h^2}+\left[1+\frac{\pi^2}{5(1-\nu)}\frac{h^2}{b^2}\left(1+10(1-\nu)\frac{l^2}{h^2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\pi^2}{6}\frac{h^2}{b^2}(1+12r)\right]6(1-\nu)k+\left(\frac{\alpha}{\mu}+5\frac{\alpha+\mu}{\alpha}r\right)\frac{6\pi^4\mu(1-\nu)}{5\alpha}\frac{h^4}{b^4}k^2\right\}=\frac{Bh^2}{12}Q\tag{5.23}$$

Теперь, окончательно для искомых функций получим

$$w=\frac{(1+\nu)\alpha_tT_1b^2}{2\pi^2hQ}e^{-2\lambda^2at}\sin\frac{\pi\alpha_1}{b}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b}\tag{5.24}$$

$$\psi_1=-\frac{12\pi(1+\nu)\alpha_tT_1\rho a^2}{\alpha bh^3Q}e^{-2\lambda^2at}\cos\frac{\pi\alpha_1}{b}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b}\tag{5.25}$$

$$\psi_2 = -\frac{12\pi(1+\nu)\alpha_t T_1 \rho a^2}{\alpha b h^3 Q} e^{-2\lambda^2 at} \sin\frac{\pi\alpha_1}{b}\cos\frac{\pi\alpha_2}{b} \tag{5.26}$$

Отбрасывая инерционные члены, получим

$$w_0 = \frac{(1+\nu)\alpha_t T_1 b^2 e^{-2\lambda^2 at}}{2\pi^2 h\left[1+24(1-\nu)\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\frac{l^2}{h^2}\right]} \sin\frac{\pi\alpha_1}{b}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b}, \quad \psi_i = 0 \tag{5.27}$$

Согласно (5.24) и (5.27) для отношения w/w_0 имеем

$$\frac{w}{w_0} = \frac{1+24(1-\nu)\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\frac{l^2}{h^2}}{Q} \tag{5.28}$$

Отсюда легко заметить, что учет инерционных членов характеризуется всеми геометрическими (h,b) и термомеханическими $(\alpha,l,\nu,\mu,\rho,a,r)$ параметрами пластинки.

На примерах оценим значение учета инерционных сил. Пусть $\nu=0.2$, $\alpha=0.1\mu$, $r=0.1$, $h/b=0.1$, $l^2/h^2=0.1$, тогда получим $\frac{w}{w_0}=1.1746\left(1.1746+5.1869k+0.5237k^2\right)^{-1}$.

Увеличим относительную толщину пластинки вдвое путем уменьшения планарных размеров, т.е. пусть теперь $h/b=0.2$, тогда получим

$$\frac{w}{w_0}=1.1746\left(1.1746+6.3476k+8.3787k^2\right)^{-1}$$

т.е. при заданных k увеличивается удельный вес учета сдвиговых инерционных членов и тем самым новых упругих постоянных. Ту же самую картину, менее ярко выраженную, наблюдаем при увеличении параметра r, т.е. удельного веса динамической характеристики J. В частности, полагая $r=0.2$, получим

$$\frac{w}{w_0}=1.1746\left(1.1746+5.2816k+1.0379k^2\right)^{-1}$$

в) Осесимметричная форма потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки (R,b), под действием равномерно распределенной по оболочке температуры T_0, при неподвижных торцах $(\alpha_1=0,\ \alpha_1=b)$. Оболочка имеет или идеально правильную цилиндрическую форму, а ее начальное напряженное состояние безмоментное [9]. В начальном состоянии в оболочке появляется лишь осевое сжимающее усилие T_{11}, равное [2,3].

$$T_{11}^{\,0} = -Eh\alpha_t T_0 \tag{5.29}$$

тогда, для фиктивной радиальной нагрузки Z_2^* получим [2,9]

$$Z_2^* = -Eh\alpha_t T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \tag{5.30}$$

В этом случае, из системы уравнений (4.15)-(4.20) приходим к следующей системе однородных линеаризованных уравнений:

$$E\frac{w}{R^2} - \frac{\alpha h^2}{12}\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} = -E\alpha_t T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2},\ \overline{A}\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_1^3} - \frac{h^2 A_1}{48\mu}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + \alpha\frac{h^2}{12}\psi_1 = 0 \tag{5.31}$$

Решение этой системы представим в виде:

$$w_m = W_m \sin\frac{m\pi\alpha_1}{b}, \qquad \psi_{1m} = \Psi_m \cos\frac{m\pi\alpha_1}{b} \tag{5.32}$$

что будет удовлетворять условиям шарнирного опирания по торцам оболочки, а m будет представлять число полуволн, по которым изгибается образующая оболочки.

После очевидных подстановок, с использованием представлений (4.22), (5.12), (5.14), для собственных значений интенсивности температуры получим

$$E\alpha_t T_{om} = \frac{E}{R^2}\frac{1}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} + \frac{Bh^2}{12}\frac{\left[1+24(1-\nu)\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\frac{l^2}{h^2}\right]\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}{1+\frac{h^2}{10(1-\nu)}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\left[1+10(1-\nu)\frac{l^2}{h^2}\right]} \tag{5.33}$$

Отсюда, при заданных значениях параметров оболочки, численным анализом можно определить, как критическое значение m_{kp}, так и величину критической температуры T_{okp}, при которой оболочка теряет устойчивость.

В случае существенно тонких оболочек и при небольших m формулу (5.33) можно переписать следующим образом:

$$E\alpha_t T_{om} = \frac{E}{R^2}\frac{1}{(m\pi/b)^2} + \frac{Bh^2}{12}\left[1+24(1-\nu)\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\frac{l^2}{h^2}\right]\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \tag{5.34}$$

Полагая, что величина $(m\pi/b)^2 = \eta$ непрерывно изменяется, из условия минимума $\frac{\partial(E\alpha_t T_{om})}{\partial\eta} = -\frac{E}{R^2}\frac{1}{\eta^2} + \frac{Bh^2}{12}\left[1+24(1-\nu)\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\frac{l^2}{h^2}\right] = 0$

для m_{kp} получим

$$m_{kp} = \frac{b}{\pi R}\sqrt{\frac{R}{h}}\sqrt[4]{12(1-\nu^2)\Big/ 1+24(1-\nu)\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\frac{l^2}{h^2}} \tag{5.35}$$

а из (5.34) найдем следующую формулу для определения критической температуры:

$$E\alpha_t T_{okp} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{h}{R}\sqrt{1+24(1-\nu)\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\frac{l^2}{h^2}} \tag{5.36}$$

т.е известную формулу с поправкой на моментные напряжения.

Например: при $\nu = 0$, $\alpha = 0.1\mu$, $l^2 / h^2 = 0.2$, без поправки имеем [9]$\sim 0.6Eh/R$, а с поправкой $\sim 0.7Eh/R$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
2. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: НАН Армении, 1999.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961.
4. Амбарцумян С.А. Температурная задача микрополярной пластинки.// Изв. вузов.Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2000. №3.
5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
6. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения вызываемые стационарними температурными полями. М.: Физматгиз, 1958.
7. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.
8. Амбарцумян С.А. Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках.// Известия АН Армении, ФМЕТ науки. 1952. Т.5, N6.
9. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.08.2002