ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №2, 2002 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА УСИЛИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ ФЕРМ

Геворкян Г. А.

Գ. Ա. Գևորգյան
Ֆերմաների ձողերի ճիգերի որոշման մեթոդ
Առաջարկվում է ֆերմաների ձողերի ճիգերի որոշման նոր մեթոդ: Ֆերման կարող է լինել ինչպես ներքուստ, այնպես էլ արտաքուստ ստատիկորեն անորոշ:

G. A. Gevorgyan
About a Method of Analysis of Strains in Trusses

Предлагается новый метод определения усилий в стержнях фермы. Ферма может быть как внешне, так и внутренне статически неопределимой.

1. Введение.

При использовании принципа наименьшей работы в практических расчетах ферм порядок действий следующий [2].Выбирают основную систему и составляют общее выражение потенциальной энергии системы. Далее, взяв по неизвестным усилиям от потенциальной энергии частные производные, находят канонические уравнения. Как сказано в [2], такой прием расчета в практике распространения не имеет, так как вышеуказанный метод нахождения канонических уравнений сложен.

В данной работе, принимая во внимание, что потенциальная энергия деформации является однородной функцией второй степени усилий, и, исходя из принципа наименьшей работы[3], задачу об определении усилий в элементах статически неопределимой фермы сводим к задаче выпуклого квадратичного программирования. При таком подходе нахождения канонических уравнений не требуется, что облегчает решение задачи.

2. Задача об определении усилий в элементах статически неопределимой фермы.

Рассмотрим плоскую статически неопределимую ферму. Ферма имеет K узлов, $n \geq 2K-3$ элементов (стержней) и $n_1 \geq 3$ связей. Очевидно, что ферма внешне статически определима, если $n_1 = 3$, и внутренне статически определима, если $n = 2K-3$. Усилия в стержнях обозначим через $S_1, S_2, ..., S_{n_1}$, а через $R_1, R_2, ..., R_{n_1}$ —опорные реакции. Из этих неизвестных величин составим векторы-столбцы $S = (S_1, S_2, ..., S_n)^T$ и $R = (R_1, R_2, ..., R_{n_1})^T$.

Выделим сечениями все K узлы и составим условия их равновесия под действием внешних нагрузок (опорных реакций) и усилий в рассеченных стержнях. Эти условия разделим на две части. Часть из них составляют те условия, которые содержат опорные реакции, а другая не содержит опорных реакций. Первая из этих частей имеет следующий вид:

$$R = \overline{A}S \tag{1}$$

а другая соответственно:

$$AS = F \tag{2}$$

Здесь $A = (A_1, A_2, ..., A_n)$ и $\overline{A} = (\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_{n_1})$ – матрицы, где $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})^T$, $\overline{A}_{j_1} = (\overline{a}_{1j_1}, \overline{a}_{2j_1}, ..., \overline{a}_{mj_1})^T$ и $F = (F_1, F_2, ..., F_m)^T$ – векторы-столбцы, $j \in N = \{1, 2, ..., n\}$, $j_1 \in N_1 = \{1, 2, ..., n_1\}$, $m = 2K - n_1$.

Сжатые стержни могут потерять устойчивость, при которой они выбывают из работы непосредственно после возникновения в них критического напряжения. Исходя из этого, имеем

$$S \geq P \tag{3}$$

где $P = (P_1, P_2, ..., P_n)^T$ – вектор критических сил стержней $j \in N$.

Составим выражение потенциальной энергии

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} d_j S_j^2 / 2 \tag{4}$$

где d_j – податливость стержней $j \in N$.

Таким образом, если исходить из принципа наименьшей работы, рассматриваемая задача об определении усилий в элементах статически неопределимой фермы с учетом потерь устойчивости сжатых стержней сводится к следующей задаче выпуклого квадратичного программирования:

$$\min\{ \sum_{j=1}^{n} d_j S_j^2 / 2 \mid AS = F,\ S \geq P \} \tag{5}$$

Обозначим

$$X = S - P \tag{6}$$

тогда уравнение (2) и соотношение (3) соответственно перепишутся в виде

$$AX = B \tag{7}$$

$$X \geq 0 \tag{8}$$

Здесь $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$ и $B = F - AP$ (9)

Подставляя полученное из равенства (6) значение вектора S в выражение потенциальной энергии (4) и пренебрегая постоянным слагаемым, находим

$$\Omega = C^T X + \frac{1}{2} X^T DX \tag{10}$$

где $C = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$, D – диагональная матрица n-ого порядка с диагональными элементами d_{jj}, $j \in N$. При этом имеем

$$c_j = d_j P_j;\quad d_{jj} = d_j,\quad j \in N \tag{11}$$

С учетом соотношений (7), (8) и (10) задача (5) перепишется в виде

$$\min\{C^T X + \frac{1}{2} X^T DX \mid AX = B, X \geq 0\} \tag{12}$$

3. Алгоритм решения.

Для решения задачи (12) используем некоторую модификацию алгоритма, полученного на основе физической модели задач квадратичного программирования [1]. Рассмотрим его:

Нулевой шаг: принимаем

$$N^{(0)} = N \;;\; B^{(0)} = F \tag{13}$$

и находим обратную матрицу G_0^{-1}. Здесь, $G_0 = AD^{-1}A^T$.

Алгоритм определения обратной матрицы G_0^{-1} рассмотрим в пункте 4 данной работы.

В дальнейшем вычисления аналогичны вычислениям в k −ом шаге. На этом шаге предполагаются заданными множество $N^{(K)}$, матрица $G_k^{-1} = \| g_{ij}^{(k)} \|$ и векторы $Z^{(k)}$, $B^{(k)}$, $X^{(k)}$ и $W^{(k)} = (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, ..., w_n^{(k)})^T$. Обозначим количество элементов множества $N^{(k)}$ через $n^{(k)}$, в зависимости от значения которого рассмотрим два возможных варианта.

Вариант 1. Пусть $n^{(k)} > 2K - 3$. Предположим, что имеют место следующие соотношения:

$$x_j^{(k)} = 0,\ j \in N \setminus N^{(k)},\ w_j^{(k)} = 0, \quad j \in N^{(k)} \tag{14}$$

Находим вектор $Z^{(k)}$ и ненулевые компоненты векторов $X^{(k)}$ и $W^{(k)}$ по формулам

$$Z^{(k)} = G_k^{-1} B^{(k)} \tag{15}$$

$$x_j^{(k)} = d_j^{-1}(A_j^T Z^{(k)} - c_j),\ j \in N^{(k)} \tag{16}$$

$$w_j^{(k)} = c_j - A_j^T Z^{(k)},\ j \in N \setminus N^{(k)} \tag{17}$$

На основе этих величин составим множества

$$Q^{(k)} = \{ j \in N^{(K)} \mid x_j^{(k)} < 0 \} \tag{18}$$

$$R^{(k)} = \{ j \in N \setminus N^{(k)} \mid w_j^{(k)} < 0 \} \tag{19}$$

и рассмотрим следующие возможные случаи:

1.1^0. $Q^{(k)} \in \varnothing$ и $R^{(k)} \in \varnothing$. Тогда вектор $X^{(k)}$ является решением задачи (12).

1.2^0. $Q^{(k)} \notin \varnothing$ и $R^{(k)} \in \varnothing$. Находим элемент q по критерию

$$x_q^{(k)} = \min_{j \in Q^{(k)}} \{ x_j^{(k)} \} \tag{20}$$

и формируем множество

$$N^{(k+1)} = N^{(k)} \setminus \{q\} \tag{21}$$

в соответствии с которым последовательно находим [1]:

$$\hat{A}_q = d_q^{-1} A_q,\ B^{(k+1)} = B^{(k)} - c_q \hat{A}_q \tag{22}$$

$$S_q = G_k^{-1} \hat{A}_q \tag{23}$$

$$T_q = (d_q^{-1} - \hat{A}_q^T S_q)^{-1} \tag{24}$$

$$g_{ij}^{(k-1)} = g_{ij}^{(k)} + T_q S_q^i S_q^j,\ \ i \in M,\ j \in M \tag{25}$$

1.3^0. $R^{(k)} \notin \varnothing$. Находим элемент p по критерию

$$w_p^{(k)} = \min_{j\in R^{(k)}}\{w_j^{(k)}\} \tag{26}$$

и формируем множество

$$N_p^{(k)} = N^{(k)} \cup \{p\} \tag{27}$$

в соответствии с которым последовательно находим векторы $B_p^{(k)}$, S_p, число T_p и матрицу $G_{k,p}^{-1}$ по формулам [2]:

$$\hat{A}_p = d_p^{-1}A_p,\, B_p^{(k)} = B^{(k)} + c_p\hat{A}_p \tag{28}$$

$$S_p = G_k^{-1}\hat{A}p \tag{29}$$

$$T_p = (d_p^{-1} + \hat{A}_p^T S_p)^{-1} \tag{30}$$

$$g_{ij}^{(k,p)} = g_{ij}^{(k)} - T_p S_p^i S_p^j, \quad i\in M,\ j\in M \tag{31}$$

По аналогичным формулам (15) , (17) и (19) формируем множество $R_p^{(k)}$ и , если оно пусто, то переходим к $k+1$-ому шагу, а в противном случае повторяем действия этого пункта. Как следует из соотношения (27), количество элементов множества $N \setminus N_p^{(k)}$ уменьшается, поэтому сделав не больше $n-n^{(k)}+1$ шагов, приходим к случаю, когда множество $R_p^{(k)}$ становится пустым.

Таким образом, при переходе от k-го к $(k+1)$-ому шагу или приходим к случаю 1.1^0, при котором получаем решение задачи (12), или приходим к варианту 2, при котором количество элементов множества $N^{(k)}$ становится равным $2K-3$ и $R^{(k)}\in\varnothing$.

Перейдем к рассмотрению этого варианта.

Вариант 2. Пусть $n^{(k)} = 2K-3$. Здесь возможны два случая:

2.1^0. Пусть $Q^{(k)}\in\varnothing$. Тогда вектор $X^{(k)}$ является решением задачи (12).

2.2^0. Пусть $Q^{(k)}\notin\varnothing$. Тогда задача (12) неразрешима.

4. Алгоритм определения обратной матрицы.

Алгоритм определения обратной матрицы G^{-1} состоит из двух этапов [1].

Первый этап. Нулевой шаг: принимаем

$$G_0^{-1} = E,\ p=1 \tag{32}$$

где $E=(E_1,E_2,\ldots,E_m)$ —единичная матрица порядка m.

В дальнейшем вычисления аналогичны вычислениям в k-ом шаге. Поэтому перейдем непосредственно к рассмотрению k-ого шага. Зафиксируем некоторый элемент $p\in N$, в соответствии с которым последовательно находим векторы $\hat{A}_p^{(k)}$, S_p, число T_p и матрицу $G_{k,p}^{-1}$ по формулам (28)—(31) :

Эти вычисления повторяем n раз для всех векторов $\Lambda_j, j \in N$.

Второй этап. Нулевой шаг: принимаем

$$G_0^{-1} = G_n^{-1} \tag{33}$$

Перейдем непосредственно к рассмотрению k –ого шага. Зафиксируем некоторый элемент $q \in M$, в соответствии с которым последовательно находим векторы $\hat{A}_q^{(k)}$, S_q, число T_q и матрицу $G_{k,q}^{-1}$ по формулам

$$\hat{A}_q = E_q, \quad B_p^{(k)} = B^{(k)} \tag{34}$$

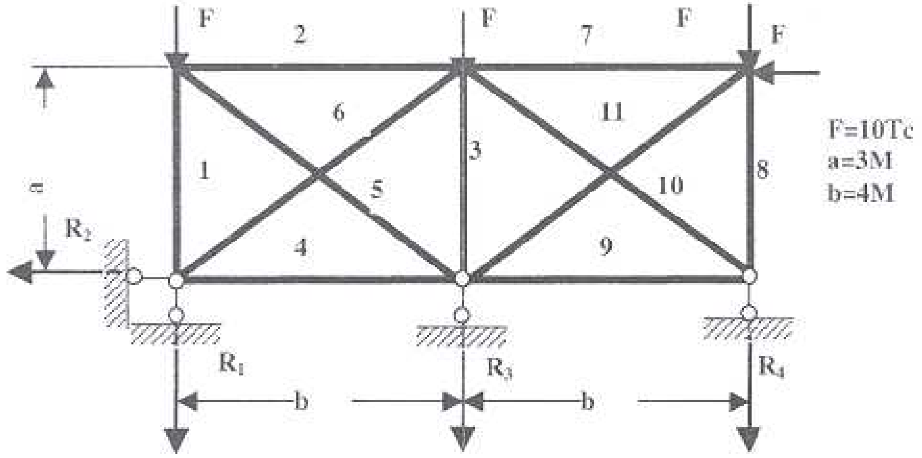
и формулам (23) -(25).

Эти вычисления повторяем m раз для всех векторов $E_i, i \in M$. При $q = m$ получим

$$G^{-1} = G_{k,m}^{-1} \tag{35}$$

5. Примеры.

Задача 1. Требуется найти опорные реакции и усилия в элементах, изображенной на фиг. 1, статически неопределимой фермы с учетом потерь устойчивости ее сжатых стержней. Площади поперечных сечений и материалы всех элементов одинаковы. Стержни 5 и 6, а также 10 и 11, общего узла не имеют. Стержни изготовлены из стальных швеллеров номер 8.



Фиг. 1

Выделим сечениями все 6 узлов и составим условия их равновесия. Тогда, для уравнений (2) получаем следующую матрицу коэффициентов неизвестных:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 1 & 0 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 \end{vmatrix}$$

а для уравнений (1) – следующую:

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 & 0 \end{vmatrix}$$

Для вектора свободных членов уравнения (2), а также для вектора B из равенства (9) получаем

$$F = (10;0;0;10;0;0;10;10)^T$$

Жесткости всех стержней примем равными 1. Имеем следующие значения податливости

$$d_1 = d_3 = d_8 = 3; \quad d_2 = d_4 = d_7 = d_9 = 4; \quad d_5 = d_6 = d_{10} = d_{11} = 5$$

По формуле Эйлера для сжатого стержня с шарнирно-опертыми концами [2], находим компоненты вектора критических сил, имеем

$$P = (-19{,}6;-11;-19{,}6;-11;-7;-7;-11;-19{,}6;-11;-7;-7)^T$$

С учетом связей (11), находим:

$$C = (-58{,}8;-44;-58{,}8;-44;-35;-35;-44;-58{,}8;-44;-35;-35)^T$$

и тем самым заканчиваем формирование задачи квадратичного программирования. Перейдем к решению этой задачи.

Нулевой шаг: принимаем

$N^{(0)} = N = \{1,2,...,11\}$ и $B^{(0)} = F$.

Определяем обратную матрицу $G^{-1}_{(0)}$, используя приведенный в пункте 4 алгоритм определения обратной матрицы. Далее, по формулам (17) и (18) последовательно находим векторы

$$Z^{(0)} = (28{,}17;\ -32{,}90;\ 18{,}14;\ 17{,}41;\ 29{,}64;\ 17{,}61;\ 17{,}67;\ 47{,}714)^T$$

$$X^{(0)} = (10{,}21;\ 11{,}81;\ 13{,}80;\ 6{,}465;5{,}982;0{,}1687;6{,}481;13{,}71;11{,}13;6{,}84;0{,}1481)^T$$

Так как в нулевом шаге $W^{(0)} = (0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0)^{(T)}$, то вектор $X^{(0)}$ является решением задачи (12).

По формулам (6) и (1) находим векторы

$$S = (-9{,}389;0{,}8148;-5{,}802;-4{,}535;-1{,}018;-6{,}832;-4{,}518;-5{,}889;0{,}1317;-0{,}1646;-6{,}8518)^T$$

$$R = (-13{,}49;\ -10;\ -10{,}53;-5{,}988)^T$$

Задача 2. Решим предыдущую задачу при **F** = 20 Тс.

Нулевой шаг: Здесь $F = (20;0;0;20;0;0;20;20)^T$. По формулам (15), (16) находим векторы

$$Z^{(0)} = (56{,}33;\ -65{,}80;\ 36{,}28;\ 34{,}81;\ 59{,}28;\ 35{,}23;\ 35{,}33;\ 95{,}428)^T$$

$$X^{(0)} = (0{,}8222;12{,}63;7{,}995;1{,}93;4{,}963;-6{,}662;1{,}963;7{,}822;11{,}26;6{,}671;-6{,}704)^T$$

так как вектор $X^{(0)}$ содержит отрицательные компоненты, то по критерию (20) находим $q = 11$ и переходим к следующему шагу.

Первый шаг: По формулам (22) - (25) последовательно находим

$\hat{A}_{11} = (0;0;0{,}16;0;0;0;-0{,}12;-0{,}16)^T$, $B^{(1)} = (20;0;5{,}6;20;0;0;15{,}8;14{,}4)^{(T)}$

$$S_{11} = (-0{,}0486;\ 0{,}1065;\ 0{,}0988;\ 0;-0{,}1929;-0{,}1597;-0{,}4769)^T$$

$$T_{11} = 6{,}671.$$

По формулам (15), (16) находим векторы

$Z^{(1)} = (60{,}01; -73{,}84; 28{,}82; 34{,}81; 73{,}85; 35{,}23; 47{,}4; 131{,}5)^T$

$X^{(1)} = (-0{,}4019; 11{,}0; 7{,}995; 3{,}795; 7{,}003; -8{,}994; -3{,}4; 3{,}8; 9{,}398; 9{,}004; 0)^T$

Так как вектор $X^{(1)}$ содержит отрицательные компоненты, то по критерию (20) находим $q = 6$ и переходим к следующему шагу.

Второй шаг: По формулам (22) – (25) и (15), (16) последовательно находим

$\dot{A}_6 = (0;0;0;-0{,}12;-0{,}16;0;0;0)^T$, $B^{(2)} = (20;0;5{,}6;15{,}8;-5{,}6;0;15{,}8;14{,}4)^{(T)}$,

$S_6 = (-0{,}07246; 0{,}535; -0.2290; -0{,}1875; -0.6638; -0.3292; 0; -0.6638)^T$

$T_6 = 13.97$

$Z^{(2)} = (69{,}11; -141{,}1; 57{,}6; 58{,}09; 157{,}3; 76{,}6; 47{,}4; 214{,}9)^T$

$X^{(2)} = (-3{,}4375; 6{,}95; 0{,}2375; -3{,}4; 12{,}0625; 0; -3{,}4; 3{,}8; 6{,}25; 12{,}9375; 0)^T$

Так как $n^{(2)} = 7 = 2K - 3$, то находим вектор $W^{(2)} = (0; 0; 0; 0; 125{,}7; 0; 0; 0; 0; 119{,}3)^T$.

Так как вектор $W^{(2)}$ не содержит отрицательных компонентов, а вектор $X^{(2)}$ содержит, то задача 2 не имеет решения (стержни 1, 6 и 11 потеряют устойчивость).

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян Г. А. Механические модели и алгоритмы решения задач математического программирования. Ереван: Изд. АН Арм. ССР. 1987.
2. Дарков А. В., Клейн Г. К., Кузнецов В. И., Лужкин О. В., Рекач В. Г., Синельников В. В., Шапиро Г. С. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1976.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.

Ереванский государственный
университет архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
6.12.2001