

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТИ СВЯЗАННОГО ПЛОСКОГО
ЭЛЕКТРОУПРУГОГО ПОЛЯ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КЛИНА

Сарգսյան А.М.

Ա.Մ. Սարգսյան

Պինգվալեկտրիկ սեպի անկյունային կետում կապակցված հարթ
էլեկտրաստատոգրական դաշտի եզակետային մասին

Հոդվածում ուսումնասիրված է էլեկտրաստատոգրական լարումների և էլեկտրական դաշտի լարվածության փոքր պինգվալեկտրիկ սեպի անկյունային կետի շրջակայքում էլեկտրական խտորեզրային պայմանների դեպքում: Մեպի եզրերին տրված են նաև մեխանիկական լարումները:

Ցույց է տրվում, որ էլեկտրական խտորեզրային պայմանները փոքրացնում են սեպի թափվածքի անկյան սահմանային արժեքը, որի դեպքում էլեկտրաստատոգրական դաշտի բնութագրիչները դառնում են վերջավոր:

A.M. Sargsyan

On Singularity of Connected Plane Electrostatic Field at Angular Point of Piezoelectrical Wedge

В статье изучено поведение электроупругих напряжений и напряженности электрического поля в угловой точке пьезоэлектрического клина при смешанных граничных условиях. На границах клина заданы также значения механических усилий.

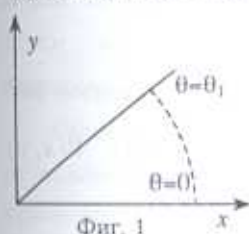
Установлено, что смешанные электрические граничные условия уменьшают значение предельных углов раствора клина, при котором характеристики электроупругого поля становятся конечными.

Поведение плоских электроупругих полей вблизи угловой точки пьезоэлектрического клина, на границах которого заданы либо потенциал электрического поля, либо распределение зарядов, исследовано в [1,2]. В обоих случаях на границах клина заданы механические усилия. Было показано, что предельный угол раствора клина, при котором в окрестности угловой точки упругие напряжения и компоненты вектора электрической индукции переходят из малонапряженного состояния в концентрационное, равняется π .

В данной работе изучено поведение плоского электроупругого поля в окрестности угловой точки пьезоэлектрического клина при смешанных электрических граничных условиях. Показано, что смешанные электрические граничные условия при тех же механических условиях уменьшают значение предельного угла, при котором характеристики поля становятся конечными.

Задача рассматривается в следующей постановке: вырезанный из пьезоэлектрического кристалла клин в каждой точке имеет плоскость материальной симметрии, параллельную его срединной плоскости. Электрические и механические внешние воздействия приложены к границам клина, распределены симметрично относительно срединной

плоскости и незначительно изменяются по толщине. Как и в теории упругости, в условиях тонкого тела исследуются средние по толщине значения всех величин.



Фиг. 1

Поместим начало декартовой системы координат в угловой точке срединной плоскости клина, ось z направим нормально к этой плоскости (фиг.1). При отсутствии объемных сил и электрических зарядов функции упругих напряжений $F(x, y)$ и электрической индукции $\Psi(x, y)$ удовлетворяют

дифференциальным уравнениям [3-5]

$$4\pi L_4 F - L_3 \Psi = 0, L_3 F + L_2 \Psi = 0 \quad (1)$$

где

$$L_4 = s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$L_3 = -g_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12} + g_{76}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (g_{12} + g_{18}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + g_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

$$L_2 = \eta_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\eta_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \eta_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Здесь s_{22}, \dots — коэффициенты упругости при постоянной электрической индукции, η_{22}, \dots — коэффициенты диэлектрической восприимчивости при постоянных механических напряжениях, g_{22}, \dots — пьезоэлектрические модули.

Принимая, что границы клина свободны от внешних нагрузок, механические граничные условия записываются в виде:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{y=0} &= \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \sin \theta_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cos \theta_1 \right|_{\substack{x=r \cos \theta_1 \\ y=r \sin \theta_1}} = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right|_{y=0} = \\ &= \left. \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \sin \theta_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos \theta_1 \right|_{\substack{x=r \cos \theta_1 \\ y=r \sin \theta_1}} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

На границах клина заданы также смешанные электрические условия

$$V(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \Psi(x, y)|_{\substack{x=r \cos \theta_1 \\ y=r \sin \theta_1}} = 0 \quad (3)$$

где $V(x, y)$ — потенциал электрического поля.

Из уравнений (1) и граничных условий (2), (3) следует, что при отсутствии пьезоэффекта, т.е. при $g_{ij} = 0$, задача (1)-(3) распадается на две независимые задачи — упругую задачу для анизотропного клина $L_4 F(x, y) = 0$ с граничными условиями (2) и электростатическую задачу

для анизотропного клина $L_2\Psi(x, y) = 0$ с граничными условиями (3). Решение первой задачи получено в [6], где, в частности, было показано, что предельным углом раствора клина является $\theta_{\text{нр}} = \pi$. Вторая задача решается ниже.

Выражения электроупругих напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и компонентов вектора электрической индукции D_x, D_y через функции $F(x, y), \Psi(x, y)$ имеют вид

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad D_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad D_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4)$$

Как и в работах [1, 2], представляя решение (1) в виде

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^3 [A_j(x + \mu_j y)^{\lambda-1} + B_j(x + \bar{\mu}_j y)^{\lambda-1}]$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{j=1}^3 [C_j(x + \mu_j y)^\lambda + D_j(x + \bar{\mu}_j y)^\lambda] \quad (5)$$

и удовлетворяя граничным условиям (2), для определения параметра λ получим уравнение

$$\Delta(\lambda) = A_{01} \sin \lambda(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + A_{02} \sin \lambda(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) - A_{03} \sin \lambda(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) -$$

$$- A_{04} \sin \lambda(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) + B_{01} \cos \lambda(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + B_{02} \sin \lambda(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) +$$

$$+ B_{03} \cos \lambda(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) + B_{04} \sin \lambda(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) + (A_{11} r_{23}^\lambda + A_{11}^* r_{23}^{-\lambda}) \sin \lambda \varphi_1 +$$

$$+ (B_{11} r_{23}^\lambda + B_{11}^* r_{23}^{-\lambda}) \cos \lambda \varphi_1 - (A_{22} r_{13}^\lambda + A_{22}^* r_{13}^{-\lambda}) \sin \lambda \varphi_2 - (B_{22} r_{13}^\lambda + B_{22}^* r_{13}^{-\lambda}) \cos \lambda \varphi_2 +$$

$$- (A_{33} r_{12}^\lambda + A_{33}^* r_{12}^{-\lambda}) \sin \lambda \varphi_3 + (B_{33} r_{12}^\lambda + B_{33}^* r_{12}^{-\lambda}) \cos \lambda \varphi_3 = 0 \quad (6)$$

где r_j и φ_j — модуль и аргумент комплексных переменных

$$z_j = \cos \theta_j + \mu_j \sin \theta_j,$$

$$r_{23} = r_2/r_3, \quad r_{13} = r_1/r_3, \quad r_{12} = r_1/r_2, \quad \mu_j = \sigma_j + i\tau_j, \quad \tau_j > 0 \quad (j=1, 2, 3).$$

Коэффициенты A_{0k}, B_{0k} ($k=1, 2, 3, 4$), A_{jj}, B_{jj} и μ_j зависят от $s_{22}, \dots,$

$\eta_{22}, \dots, g_{22}, \dots$.

Решение типа (5) было использовано в работе [8] при изучении особенности упругих напряжений вблизи угловой точки однородного изотропного клина.

Из (4) и (5) следует, что поведение характеристик электроупругого поля (упругие напряжения и компоненты вектора электрической индукции) вблизи угловой точки однородного клина определяется величиной действительной части первого корня λ_1 . При тех значениях угла θ_1 и электромеханических коэффициентов s, g, η , когда уравнение

(6) имеет корень, действительная часть которого находится в интервале (0, 1), характеристики электроупругого поля неограничены при приближении к вершине клина. При $\text{Re } \lambda_1 > 1$ эти характеристики вблизи угловой точки исчезают. В предельном случае $\text{Re } \lambda_1 = 1$ характеристики электроупругого поля конечны и вообще отличны от нуля.

Общее аналитическое исследование зависимости искомого корня λ_1 от параметров задачи здесь, по-видимому, невозможно ввиду того, что уравнение (6) имеет сложную структуру и содержит шестнадцать независимых параметров (угол θ_1 и пятнадцать электромеханических параметров).

Для частного случая $\theta_1 = \pi$ легко показать, что $\lambda_1 = 0.5$ и $\lambda_2 = 1$ являются корнями уравнения (6), если между электромеханическими параметрами задачи существуют зависимости

$$A_{01} + A_{02} + A_{03} + A_{04} - (A_{11}^* + A_{11}^*) + (A_{22} + A_{22}^*) - (A_{33} + A_{33}^*) = 0 \quad (7)$$

$$A_{01}^* + A_{02}^* + A_{03}^* + A_{04}^* + (B_{11} + B_{11}^*) - (B_{22} + B_{22}^*) + (B_{33} + B_{33}^*) = 0 \quad (7')$$

соответственно.

Численные расчеты показывают, что условие (7) имеет место, например, для бифталата калия (БФК). Причем, изменение в широких пределах значения пьезоэлектрических модулей g_{22} и g_{11} не влияет на условие (7). А при изменении значения диэлектрической восприимчивости η_{12} (для БФК $\eta_{12} = 0$) нарушается зависимость (7), но, как показывают численные расчеты, действительная часть первого корня уравнения (6) всегда остается меньше единицы.

Те же условия (7) и (7') получаются и в случае $\theta_1 = 2\pi$ при $\lambda_1 = 0.25$ и $\lambda_2 = 0.5$ соответственно.

Для чисто электростатической задачи ($\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = \mu_3 = 0$) условие (7) удовлетворяется тождественно при $\theta_1 = \pi$, $\lambda_1 = 0.5$ и $\theta_1 = 2\pi$, $\lambda_1 = 0.25$. А в случае плоской деформации ($\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq \mu_3 \neq 0$) тождественно удовлетворяется условие (7') при $\theta_1 = \pi$, $\lambda_1 = 1$ и $\theta_1 = 2\pi$, $\lambda_1 = 0.5$, что и следовало ожидать.

На фиг.2 представлены некоторые результаты численного расчета зависимости λ_1 от угла θ_1 при различных значениях электромеханических параметров. Кривая 1 построена для пьезокристалла БФК, для которого, в частности, $g_{22} = \eta_{12} = 0$ [3]. Кривая 2 соответствует случаю $\eta_{12} = -0.03$ м/ф (остальные параметры те же), кривая 3 построена для случая $g_{22} = 5 \cdot 10^{-6}$ м²/кл (другие параметры те же, что у БФК). Там

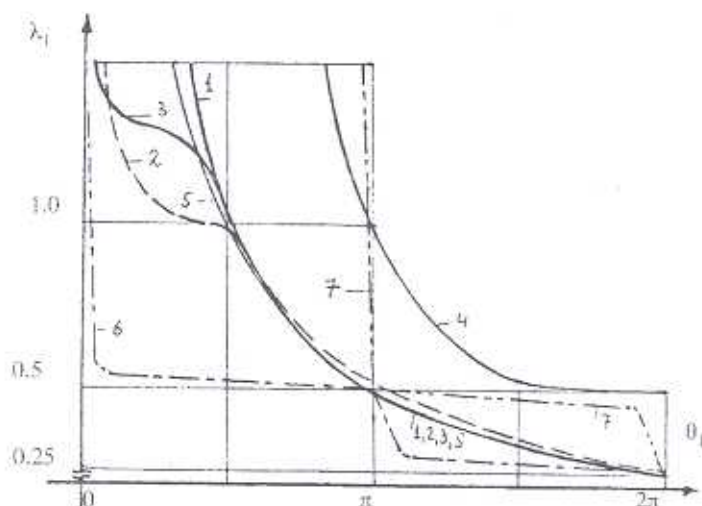
же, для сравнения, представлены соответствующие графики для упругой (кривая 4) и электростатической задач (кривые 5-7). Трансцендентное уравнение последней задачи легко получается изложенным выше методом и имеет вид $\cos \lambda \varphi = 0$, где φ — аргумент комплексного числа $\cos \theta_1 + \mu \sin \theta_1$, $\mu = \sigma + i\tau$ — корень квадратного уравнения

$$\eta_{11}\mu^2 - 2\eta_{12}\mu + \eta_{22} = 0, \quad \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2 > 0.$$

Кривая 6 построена для случая $\sigma = -10$, кривая 4 — при $\sigma = 10$, а кривая 5 — для случая $\sigma = 0$ ($\tau = 2$ всегда).

Как видно из кривых 4-6, в зависимости от анизотропии материала клина, предельный угол θ_{lpr}^* меняется в широких пределах ($0 < \theta_{lpr}^* < \pi$), и только при $\sigma = 0$ $\theta_{lpr}^* = \pi/2$.

Изменение предельного угла раствора анизотропного клина, по-видимому, сильно зависит от параметра η_{12} .



Фиг. 2

Учитывая результаты работ [1, 2, 6], приходим к заключению, что смешанные электрические граничные условия уменьшают предельный угол раствора пьезоэлектрического клина, при котором характеристики электроупругого поля становятся конечными.

Отметим также, что двумерные краевые задачи электроупругости для клиновидных тел (однородных или кусочно-однородных) при различных ненулевых граничных условиях можно решить с помощью интегрального преобразования Меллина комплексной функции $f(x + \mu y)$ [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Саргсян А.М. Поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки пьезоэлектрического клина при обобщенном плоском напряженном состоянии // Докл. НАН Армении, 1999, Т.99, №1, С. 34-39.
2. Саргсян А.М. Особенность связанного плоского электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Сб. научных трудов конференции, посвященной 90-летию со дня рождения профессоров Т.Т.Хачатряна и О.М.Сапонджяна, состоявшейся 23-24 октября 1998г. в г.Ереване.
3. Вековищева И.М. Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. // ПМ. 1975, Т. XI, №2, С. 85-89.
4. Вековищева И.М. Плоская задача теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта // ПМТФ, 1970, №2, С. 96-103.
5. Космодамианский А.С., Ложкин В.М. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин // ПМ. 1975, Т.11, №5, С. 45-53 .
6. Алексанян Р.К. Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела // Докл. АН АрмССР, 1975, Т.LXI, №4, С. 219-224.
7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416с.
8. Каландия А.И. Замечание об особенности упругих решений вблизи углов. ПММ. 1969, Вып.1, С. 132-135.
9. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле и приложения к композитам // МТТ. 1979, №6, С. 33-41.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.07.2001