

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОР В  
ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ  
КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Гнуни В. Ц., Элоян А.В.

Վ.Յ. Գնունի, Ա.Վ. Էլոյան

Վանալոզիցոն նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալի ծոծան խնդրոմ հեմարանների դիրքի օպտիմալ ընտրությունը

Վտարոզիցիոն նյութի տարրական շերտերից, որոնք ըստ սալի երկարության մեկընդմեջ դասավորված են  $\pm\varphi$  անկյան տակ, պատրաստված ուղղանկյուն սալի համար դիտարկվում է սալի հեմարանների դիրքի նվ տարրական շերտերի դասավորման  $\varphi$  անկյան օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որը ապահովում է սալի ամենամեծ ձկվածքի նվազագույն արժեքը:

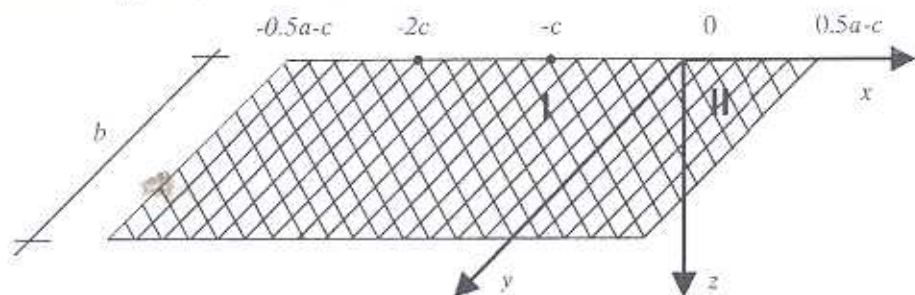
V.Ts. Gnuny, A.V. Eloyan

Optimal choice of the supports place in the problem of the rectangular plate bending.

Рассматривается задача нахождения оптимального расположения опор и угла укладки элементарных слоев в задаче изгиба упругой прямоугольной пластинки из композиционного материала.

1. В работах [1,2] рассматриваются задачи нахождения оптимального расположения опор балки и изотропной прямоугольной пластинки, обеспечивающего наименьшее значение наибольшего прогиба.

Пусть прямоугольная пластинка размерами  $a, b, h$  отнесена к прямоугольной системе декартовых координат  $Oxyz$  так, чтобы координатная плоскость  $z = 0$  совпадала со срединной плоскостью пластинки. По длине пластинки опоры расположены на расстоянии  $c$  от середины пластинки (фиг.1).



Փիգ.1

Пластинка изготовлена из монослоев ортотропного композиционного материала, уложенных по толщине поочередно под углами  $\pm \varphi$  к координатной оси  $Ox$ .

Уравнение изгиба пластинки представляется в виде

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y)$$

где  $w = w(x, y)$  – прогиб,  $q = q(x, y)$  – нормально приложенное давление,

$D_{ij} = B_{ij} h^3$  – жесткость на изгиб,

$$\begin{aligned} B_{11} &= B_{11}^0 \cos^4 \varphi + 2B_3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + B_{22}^0 \sin^4 \varphi \\ B_{12} &= B_{12}^0 + (B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2B_3) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ B_{22} &= B_{22}^0 \sin^4 \varphi + 2B_3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + B_{11}^0 \cos^4 \varphi \\ B_{66} &= B_{66}^0 + (B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2B_3) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$B_{11}^0 = E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}), \quad B_{22}^0 = E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}), \quad B_{66}^0 = G_{12}$$

$$B_3 = B_{12} + 2B_{66}, \quad B_{11}^0 = \nu_{21} E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) = \nu_{12} E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \quad (1.3)$$

$E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}$  – технические постоянные ортотропного монослоя композиционного материала.

При предположении шарнирного опирания краев пластинки  $y = 0; b$ , функции  $w(x, y)$ ,  $q(x, y)$  представляются в виде

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \sin \mu_n y \\ q(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) \sin \mu_n y \quad (\mu_n = n\pi/b) \end{aligned} \quad (1.4)$$

что тождественно удовлетворяет условиям

$$w = 0, \quad M_{yz} = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0; b \quad (1.5)$$

Из уравнения (1.1) для определения искоемых функций  $w_n(x)$  получается

$$\bar{B}_{11} w_n^{IV} - 2\bar{B}_3 \mu_n^2 w_n'' + \bar{B}_{22} \mu_n^4 w_n = \frac{12q_n}{h^3 B_{11}^0} \quad (1.6)$$

где  $\bar{B}_{ij} = B_{ij} / B_{11}^0$ .

Вид решения уравнения (1.6) зависит от корней характеристического уравнения

$$\bar{B}_{11}k^4 - 2\mu_n^2\bar{B}_3k^2 + \mu_n^4\bar{B}_{22} = 0 \quad (1.7)$$

Как показывают вычисления, для известных нам композиционных материалов (стеклопластики, боропластики, углепластики, боралюминий) и для произвольных углов укладки  $\varphi \in [0; \pi/2]$

$$\bar{B}_3^2 - \bar{B}_{11}\bar{B}_{22} < 0 \quad (1.8)$$

следовательно,

$$k = \pm \sqrt{\frac{\bar{B}_3}{\bar{B}_{11}}} \pm i \sqrt{\frac{\bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_3^2}{\bar{B}_{11}^2}} \quad (1.9)$$

$$w_n = [1 + (A \cos \mu_n t x + B \sin \mu_n t x) \operatorname{ch} \mu_n s x + (C \cos \mu_n t x + D \sin \mu_n t x) \operatorname{ch} \mu_n s x] D_{11}^0 q_0 / \mu_n^4 \quad (1.10)$$

где

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{B}_3}{\bar{B}_{11}} + \sqrt{\frac{\bar{B}_3^2}{\bar{B}_{11}^2} + \frac{(\bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_3^2)^2}{\bar{B}_{11}^3}}}, \quad t = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{\bar{B}_3}{\bar{B}_{11}} + \sqrt{\frac{\bar{B}_3^2}{\bar{B}_{11}^2} + \frac{(\bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_3^2)^2}{\bar{B}_{11}^3}}}$$

Если нагрузка по длине пластинки распределена симметрично по отношению к середине, то уравнение (1.6) можно рассматривать лишь в отрезке  $[-c; 0.5a - c]$  с обеспечением условий симметрии в точке  $x = -c$ .

Введем обозначения

$$w_n(x) = \begin{cases} w_{1n}(x) & \text{при } -c \leq x < 0 \\ w_{2n}(x) & \text{при } 0 < x \leq 0.5a - c \end{cases} \quad (1.11)$$

Искомые функции  $w_{1n}(x)$ ,  $w_{2n}(x)$  должны удовлетворять уравнению равновесия (1.6) соответственно на отрезках  $[-c; 0]$ ,  $[0; 0.5a - c]$ , и условиям:

симметрии в точке  $x = -c$

$$w'_{1n}(x)|_{x=-c} = 0; \quad w'''_{1n}(x)|_{x=-c} = 0 \quad (1.12)$$

сопряжения в точке  $x = 0$

$$\begin{aligned} w_{1n}(0) = w_{2n}(0) = 0, \quad w'_{1n}(x)|_{x=0} = w'_{2n}(x)|_{x=0} \\ M_{11}^{(1)}(0) = M_{11}^{(2)}(0) \Rightarrow w''_{1n}(x)|_{x=0} = w''_{2n}(x)|_{x=0} \end{aligned} \quad (1.13)$$

и свободного края в точке  $x = 0.5a - c$

$$M_{11}^{(2)}(0.5a - c) = 0 \Rightarrow B_{11}w''_{2n} - \mu_n^2 B_{12}w_{2n} = 0 \quad (1.14)$$

$$\tilde{T}^{(2)}_{13}(0.5a - c) = 0 \Rightarrow \bar{B}_{11}w'''_{2n} - \mu_n^2(\bar{B}_{12} + 4\bar{B}_{66})w'_{2n} = 0$$

Здесь

$$M_{11} = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tilde{T}_{13} = T_{13} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} = -D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

изгибающий момент и обобщенное поперечное усилие

$$M_{12} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad T_{13} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} = -D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

крутящий момент и поперечное усилие в сечениях  $x = \text{const}$ .

Решение уравнения (1.6) в интервалах  $[-c, 0]$  и  $[0, 0.5a - c]$

$$w_{in} = [1 + (A_i \cos \mu_n x + B_i \sin \mu_n x) \text{ch} \mu_n s x + (C_i \cos \mu_n x + D_i \sin \mu_n x) \text{ch} \mu_n s x] D_{11}^0 q_0 / \mu_n^4 \quad (i = 1, 2)$$

Постоянные  $A_i, B_i, C_i, D_i$  ( $i = 1, 2$ ) определяются из восьми условий (1.11)-(1.13).

2. Имея значение  $w(x, y)$ , можно рассматривать следующую оптимизационную задачу: найти

$$\min_{c, \varphi} \max_{x, y} w(x, y, c, \varphi) \\ \text{при } x \in [-c; 0.5a - c], y \in [0; b], 0 \leq c \leq 0.5a, 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \quad (2.1)$$

Пусть  $q(x, y) = q_0 \sin \lambda_1 x$  ( $\lambda_1 = \pi/a$ ), тогда очевидно, что в отрезке  $[0; b]$ , для всех  $x$  из  $[-c; 0.5a - c]$  прогиб пластинки  $w(x, y)$  принимает наибольшее значение при  $y = b/2$ , и

$$\max_y w(x, y, c, \varphi) = w(x, b/2, c, \varphi)$$

Задача (2.1) переходит к задаче: найти

$$w^* = \min_{c, \varphi} \max_{i, x} w_i^*(x, b/2, c, \varphi) \quad (2.2)$$

при  $i = 1, 2, x \in [-c; 0.5a - c], 0 \leq c \leq 0.5a, 0 \leq \varphi \leq \pi/2$ .

Введем безразмерное значение для прогиба пластинки

$$\bar{w}_i(x, c, \varphi) = w_i(\bar{x}, \alpha, \varphi) \mu_1^4 D_{11}^0 / q_0, \quad \text{где } \bar{x} = x/a, \bar{\alpha} = c/a.$$

Отметим, что при  $\alpha = 0$  ( $c = 0$ ) получаются две пластинки длиной  $0.5a$ , два края которых  $y = 0; b$  свободно оперты, край  $x = 0$  жестко заделан, а край  $x = 0.5a$  ( $x = -0.5a$ ) свободен. В случае же  $\bar{\alpha} = 0.5$  получается пластинка длины  $a$ , все четыре края которой свободно оперты.

Результаты решения оптимизационной задачи (2.2) для различных отношений сторон пластинки  $\lambda = a/b$  и шести различных материалов (однонаправленный стеклопластик, боропластик, углепластик, боралюминий, СВАМ 5:1, СВАМ 1:1) приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\lambda/\text{мат.}$		1/3	1/2	2/3	1	2
I	$\bar{w}^*$ $\alpha^*$ $\varphi$	0.0607 0.2 90°	0.0914 0.16 90°	0.0972 0.13 90°	0.0999 0.09 90°	0.1905 0.06 90°
	$\bar{w}_*$ $\alpha^*$ $\varphi_*$	0.097 0.29 45°	0.167 0.26 45°	0.224 0.23 45°	0.291 0.18 45°	0.339 0.09 45°
II	$\bar{w}^*$ $\alpha^*$ $\varphi$	0.0118 0.19 90°	0.0170 0.14 90°	0.0221 0.1 90°	0.0299 0.07 90°	0.0315 0.015 90°
	$\bar{w}_*$ $\alpha^*$ $\varphi_*$	0.067 0.39 60°	0.119 0.375 60°	0.175 0.37 55°	0.282 0.36 50°	0.517 0.28 45°
III	$\bar{w}^*$ $\alpha^*$ $\varphi$	0.00257 0.115 90°	0.00975 0.055 90°	0.00985 0.045 90°	0.01904 0.032 90°	0.02103 0.017 90°
	$\bar{w}_*$ $\alpha^*$ $\varphi_*$	0.0459 0.425 65°	0.119 0.395 55°	0.169 0.355 55°	0.259 0.35 50°	0.394 0.265 45°
IV	$\bar{w}^*$ $\alpha^*$ $\varphi$	0.0668 0.271 90°	0.122 0.222 90°	0.146 0.179 90°	0.157 0.124 90°	0.167 0.064 90°
	$\bar{w}_*$ $\alpha^*$ $\varphi_*$	0.0942 0.304 45°	0.185 0.275 45°	0.262 0.252 45°	0.381 0.205 45°	0.471 0.12 45°
V	$\bar{w}^*$ $\alpha^*$ $\varphi$	0.0665 0.286 90°	0.113 0.223 90°	0.124 0.185 90°	0.125 0.127 90°	0.134 0.064 90°
	$\bar{w}_*$ $\alpha^*$ $\varphi_*$	0.103 0.31 45°	0.188 0.284 45°	0.273 0.254 45°	0.37 0.215 45°	0.444 0.114 45°
VI	$\bar{w}^*$ $\alpha^*$ $\varphi$	0.0655 0.387 0°,90°	0.0974 0.314 0°,90°	0.102 0.237 0°,90°	0.106 0.175 0°,90°	0.107 0.085 0°,90°
	$\bar{w}_*$ $\alpha^*$ $\varphi_*$	0.0965 0.381 45°	0.199 0.366 45°	0.316 0.355 45°	0.545 0.305 45°	0.835 0.195 45°

Здесь

$$\bar{w}^* = \min_{\varphi} \min_{\alpha} \max_{\bar{x}} \bar{w}(\bar{x}, b/2, \alpha, \varphi), \quad \bar{w} = \max_{\varphi} \min_{\alpha} \max_{\bar{x}} \bar{w}(\bar{x}, b/2, \alpha, \varphi)$$

$\varphi^*$  и  $\varphi$  – соответственно показывают наилучшие и наихудшие значения углов укладки элементарных слоев ортотропного композиционного материала по толщине пластинки при  $\alpha = \alpha^*$ . Значение  $\alpha = \alpha^*$  определяет наилучший вариант расположения опор пластинки при фиксированном  $\varphi$ .

Как показывают вычисления оптимальным расположением опор по длине пластинки ( $\alpha^*$ ) и оптимальным выбором угла укладки монослоев ( $\varphi^*$ ), можно добиться существенного уменьшения прогиба пластинки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гнуни В.Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки. // В сб. Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ер. Изд. ЕГУ, 1997, с. 114-117.
2. Гнуни В.Ц., Элоян А.В. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба прямоугольной пластинки // Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т. 54. №3. С. 14-77.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Госиздат технико-теоретической литературы. 1957.

Институт механики НАН РА  
Гюмрийский образовательный комплекс  
Государственного инженерного  
университета Армении

Поступила в редакцию  
25.02.2002