ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 62-50

УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ МАНИПУЛЯТОРОМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА НАПРЯЖЕНИЕ И ТОК

Аветисян В.В.

Վ.Վ. Ավետիսյան
Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի ղեկավարումը լարման և հոսանքի վրա դրված սահմանափակումների դեպքում

Դիտարկված է ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով նկարագրվող էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի ղեկավարման խնդիրը լարման և հոսանքի ուժի վրա դրված սահմանափակումների դեպքում:

V.V. Avetisyan
The control of electromechanical manipulators with restrictions on tension and current

Решается задача управления электромеханическим манипулятором, движение которого описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений при ограничениях на напряжение и ток.

1. Рассматривается электромеханическая модель плоского двузвенного манипулятора, управляемого с помощью двух независимых приводов, содержащих электродвигатели постоянного тока с независимым возбуждением и редукторы. Движения такого манипулятора в безразмерных единицах описываются системой механических уравнений Лагранжа и уравнений баланса электрических напряжений в цепях якорей электродвигателей [1]

$$\begin{aligned}
&(1+2MaLA_{11}^{-1}\cos\varphi_2)\ddot{\varphi}_1+(A_{12}+MaL\cos\varphi_2)A_{11}^{-1}\ddot{\varphi}_2-\\
&\qquad -MaLA_{11}^{-1}\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2(2\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)=k_1^{1/2}j_1\\
&\ddot{\varphi}_2+(A_{12}+MaL\cos\varphi_2)A_{22}^{-1}\ddot{\varphi}_1+MaLA_{22}^{-1}\sin\varphi_2\cdot\dot{\varphi}_1^2=k_2^{1/2}j_2\\
&L_i dj_i/dt+R_i j_i+k_i^{1/2}\dot{\varphi}_i=k_i^{-1/2}u_i, \qquad i=1,2
\end{aligned} \tag{1.1}$$

В (1.1) φ_1,φ_2 — обобщенные углы поворотов звеньев манипулятора; a — длина первого звена; L — расстояние от шарнира, соединяющего первое и второе звенья, до центра масс второго звена; M — масса второго звена; m — масса ротора электродвигателя, управляющего вторым звеном; A_{11}, A_{12}, A_{22} — коэффициенты, содержащие инерционные и геометрические параметры манипулятора [1]; L_i, R_i — коэффициенты индуктивности и электрическое сопротивление обмотки роторов электродвигателей; k_i — постоянный коэффициент; j_i — ток в обмотке якоря i-го двигателя; u_i — управляющее напряжение, подаваемое на вход i-го двигателя.

Для системы (1.1) ставится задача управления. Требуется найти управляющие напряжения $u_1(t), u_2(t)$, осуществляющие приведение манипулятора из заданного начального состояния покоя

$$\varphi_i(0)=0,\ \ \dot\varphi_i(0)=0,\ \ j_i(0)=0,\ \ i=1,2 \tag{1.2}$$

в заданное конечное состояние в момент времени $t=T$

$$\varphi_i(T)=\varphi_i^1,\ \ \dot\varphi_i(T)=0,\ \ i=1,2 \tag{1.3}$$

В течение всего процесса управления должны выполняться ограничения на напряжения и токи в цепях электродвигателей

$$|u_i|\le 1,\quad |j_i|\le j_i^0,\ \ i=1,2 \tag{1.4}$$

где j_i^0 – максимальная величина тока в цепи i-го электродвигателя.

Наряду с полной (1.1), рассмотрим упрощенную модель манипулятора, которая соответствует случаю, когда электромагнитные постоянные времени $\tau_i=L_i/R_i$ весьма малы по сравнению со временем транспортной операции, совершаемой роботом, а второе звено манипулятора статически уравновешено. В этом случае выполняются соотношения $L_i<<1$, $L=0$ и в первом приближении члены, содержащие L_i, L в уравнениях (1.1), можно опустить [2]. Тогда уравнения движения (1.1), после исключения из них переменных j_i, и ограничения (1.4) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned}&R_1\ddot\varphi_1+R_1A_{12}A_{11}^{-1}\ddot\varphi_2+k_1\dot\varphi_1=u_1\\&R_2A_{12}A_{22}^{-1}\ddot\varphi_1+R_2\ddot\varphi_2+k_2\dot\varphi_2=u_2\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$|u_i|\le 1,\qquad |u_i-k_i\dot\varphi_i|\le j_i^0k_i^{1/2}R_i=\eta_i,\qquad i=1,2 \tag{1.6}$$

В (1.5),(1.6), (1.2),(1.3) перейдем к новым переменным

$$\begin{gathered}\mathrm{v}_i=u_i-k_i\dot\varphi_i,\ i=1,2,\\ \psi_1=R_1\varphi_1+R_1A_{12}A_{11}^{-1}\varphi_2,\qquad \psi_2=R_2A_{12}A_{22}^{-1}\varphi_1+R_2\varphi_2\\ x_1=\psi_1,\quad x_2=\dot\psi_1,\quad x_3=\psi_2,\quad x_4=\dot\psi_2\end{gathered} \tag{1.7}$$

В переменных (1.7) задача (1.5),(1.6), (1.2),(1.3) примет вид

$$\dot x_1=x_2,\ \dot x_2=\mathrm{v}_1,\ \dot x_3=x_4,\ \dot x_4=\mathrm{v}_2 \tag{1.8}$$

$$|\mathrm{v}_i+\sum_{j=1}^{4}c_{ij}\dot x_j|\le 1,\qquad |\mathrm{v}_i|\le\eta_i=j_i^0k_i^{1/2}R_i,\ i=1,2 \tag{1.9}$$

$$c_{11}=k_1R_1^{-1}A_{11}A_{22}(A_{11}A_{22}-A_{12}^2)^{-1},\ c_{13}=k_1R_2^{-1}A_{12}A_{22}(A_{12}^2-A_{11}A_{22})^{-1}$$

$$c_{21}=k_2R_1^{-1}A_{12}A_{11}(A_{12}^2-A_{11}A_{22})^{-1},\ c_{23}=k_2R_2^{-1}A_{11}A_{22}(A_{11}A_{22}-A_{12}^2)^{-1}$$

$$c_{12}=c_{14}=c_{22}=c_{24}=0$$

$$\begin{aligned}&x_i(0)=x_i^0=0,\quad i=1,\dots,4\\&x_1(T)=x_1^1=\alpha_1\varphi_1^1+\beta_1\varphi_2^1,\ x_2(T)=x_2^1=0\\&x_3(T)=x_3^1=\alpha_2\varphi_1^1+\beta_2\varphi_2^1,\ x_4(T)=x_4^1=0\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\alpha_1=R_1,\quad \alpha_2=R_2A_{12}A_{22}^{-1},\quad \beta_1=R_1A_{12}A_{11}^{-1},\quad \beta_2=R_2$$

2. Обозначим через $x=(x_1,...,x_4)^T$ и $\text{v}=(\text{v}_1,\text{v}_2)^T$ фазовый вектор и вектор управления системы (1.8) и перепишем систему в векторной форме

$$\dot{x}=Ax+B\text{v} \tag{2.1}$$

с постоянными матрицами A, B размеров 4x4, 4x2 и фундаментальной матрицей размера 4x4 соответственно

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \Phi(t)=\begin{pmatrix}1&t&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Начальные и конечные условия представим следующим образом:

$$x(0)=0,\qquad x(T)=x^1 \tag{2.3}$$

Запишем решение системы (2.1) с начальным условием (2.3)

$$x(t)=\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)\text{v}(\tau)d\tau \tag{2.4}$$

С учетом (2.3) и (2.4), задача (1.8)-(1.10) сводится к отысканию такого управления $\text{v}(t)$, при котором удовлетворяются условие

$$\int_0^T \Phi^{-1}(t)B(t)\text{v}(t)dt=\Phi^{-1}(T)x^1 \tag{2.5}$$

и ограничения (1.9) для всех $t\in[0,T]$.

Воспользуемся известным подходом [3] построения управления, который в [4,5] был распространен на случай наличия ограничения на управление, а в [6] — на фазовые координаты — в задачах успокоения скалярно управляемых многочастотных систем линейных осцилляторов (маятников).

Управление, решающее задачу без учета ограничений (1.9), ищем в виде

$$\text{v}(t)=Q^T(t)C,\qquad Q(t)=\Phi^{-1}(t)B(t) \tag{2.6}$$

Здесь C — постоянный вектор, определяемый единственным образом (так как (1.8) вполне управляема [7,8])

$$C=R^{-1}(T)\cdot\Phi^{-1}(T)x^1 \tag{2.7}$$

из системы линейных алгебраических уравнений

$$R(T)\cdot C=\Phi^{-1}(T)x^1,\qquad R(T)=\int_0^T Q(t)Q^T(t)dt \tag{2.8}$$

Подставляя (2.7),(2.8) в (2.6), а затем (2.6)-(2.8) в (2.1), управление $\text{v}(t)$ и фазовую скорость $\dot{x}(t)$ можно представить следующим образом:

$$\text{v}(t)=F^1(t,T)\cdot(x^1)^T,\quad \dot{x}(t)=G^1(t,T)\cdot(x^1)^T,\ x^1=(x_1^1,x_2^1,x_3^1,x_4^1) \tag{2.9}$$

где матрицы $F^1=\left\|f_{iq}^1\right\|$, $f_{iq}^1, i=1,2;\ q=1,...,4$ и $G^1=\left\|g_{jq}^1\right\|$, $g_{jq}^1, j,q=1,...,4$ определяются таким образом:

$$F^1(t,T)=(\Phi^{-1}(t)B(t))^T R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T) \tag{2.10}$$

$$G^1(t,T) = A(t)\Phi(t)R(t)R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T) + B(t)B^T(t)(\Phi^{-1}(t))^T R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T)$$

С учетом (2.9), (2.10), искомое управление и соответствующую ему фазовую скорость представим в следующих координатных формах:

$$\mathrm{v}_i(t) = \sum_{q=1}^{4} f_{iq}(t,T)\, x_q^1, \quad i = 1,2; \quad \dot{x}_j(t) = \sum_{q=1}^{4} g_{jq}(t,T)\, x_q^1, \quad j = 1,\ldots,4 \qquad (2.11)$$

Ограничения (1.9) после подстановки в них (2.11), принимают вид

$$|\mathrm{v}_i(t)| = \left|\sum_{q=1}^{4} f_{iq}(t,T)\, x_q^1\right| \le \eta_i, \; i = 1,2 \qquad (2.12)$$

$$\left|\mathrm{v}_i(t) + \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\dot{x}_j(t)\right| = \left|\sum_{q=1}^{4} (f_{iq}(t,T) + h_{iq}(t,T))\, x_q^1\right| \le 1, \; i = 1,2$$
$$h_{iq}(t,T) = \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\, g_{jq}(t,T), \quad i = 1,2; \; q = 1,\ldots,4 \qquad (2.13)$$

Выберем время T так, чтобы удовлетворялись ограничения (2.12) и (2.13). Для этого введем следующие функции:

$$S_i(T) = \left[\max_{0\le t\le T} K_i(t,T)\right]^{-1/2}, \qquad i = 1,2$$
$$M_i(T) = \left\{\left[\max_{0\le t\le T} K_i(t,T)\right]^{1/2} + \left[\max_{0\le t\le T} L_i(t,T)\right]^{1/2}\right\}^{-1}, \qquad i = 1,2 \qquad (2.14)$$

где $K_i(t,T)$, $L_i(t,T)$ определяются из (2.10) и имеют вид

$$K_i(t,T) = \sum_{q=1}^{4} f_{iq}^2(t,T), \; i = 1,2; \qquad L_i(t,T) = \sum_{q=1}^{4} h_{iq}^2(t,T), \quad i = 1,2 \qquad (2.15)$$

К соотношениям (2.12),(2.13) применим неравенство Коши-Буняковского

$$|\mathrm{v}_i| \le \left(\sum_{q=1}^{4} x_q^{1\,2}\right)^{1/2} \left(\sum_{q=1}^{4} f_{iq}^2(t,T)\right)^{1/2}, \qquad i = 1,2;$$
$$\left|\mathrm{v}_i + \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\dot{x}_j\right| \le \left(\sum_{q=1}^{4} x_q^{1\,2}\right)^{1/2} \left\{\left(\sum_{q=1}^{4} f_{iq}^2(t,T)\right)^{1/2} + \left(\sum_{q=1}^{4} h_{iq}^2(t,T)\right)^{1/2}\right\}, i = 1,2 \qquad (2.16)$$

Тогда с учетом (2.14),(2.15) неравенства (2.16) перепишутся в виде

$$|\mathrm{v}_i| \le |x^1|[K_i(t,T)]^{1/2} \le |x^1|\, S_i^{-1}(T), \qquad i = 1,2$$
$$\left|\mathrm{v}_i + \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\dot{x}_j\right| \le |x^1|\left([K_i(t,T)]^{1/2} + [L_i(t,T)]^{1/2}\right) \le |x^1|\, M_i^{-1}(T), \qquad i = 1,2 \qquad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что наложенные ограничения (2.12) и (2.13) будут удовлетворены для всех $t \in [0,T]$, если время $T > 0$ выбирать из следующего условия:

$$|x^1| = \min_{i=1,2}\left[\min_i[\eta_i S_i(T),\; M_i(T)]\right] \qquad (2.18)$$

Таким образом, для любого заданного x^1 из условия (2.18) можно найти время T, а затем определить управление v_i, $i=1,2$ из (2.11).

3. С помощью (2.10),(2.6)-(2.8),(2.1)-(2.4) определим элементы матриц F^1, G^1

$$F^1 = \left\| f^1_{iq} \right\|, \quad i=1,2; \quad q=1,...,4 \tag{3.1}$$

$$f^1_{11} = f^1_{23} = -12T^{-3}t + 6T^{-2},\ f^1_{12} = f^1_{24} = 6T^{-2}t - 2T^{-1},\ f^1_{13} = f^1_{14} = f^1_{21} = f^1_{22} = 0$$

$$G^1 = \left\| g^1_{jq} \right\|, \quad j=1,...,4; \quad q=1,...,4$$

$$\begin{gathered} g^1_{11} = g^1_{33} = -6T^{-3}t^2 + 6T^{-2}t, \quad g^1_{12} = g^1_{34} = 3T^{-2}t^2 - 2T^{-1}t \\ g^1_{21} = g^1_{43} = -12T^{-3}t + 6T^{-2},\ g^1_{22} = g^1_{44} = 6T^{-2}t - 2T^{-1} \\ g^1_{13} = g^1_{14} = g^1_{23} = g^1_{24} = g^1_{31} = g^1_{32} = g^1_{41} = g^1_{42} = 0 \end{gathered} \tag{3.2}$$

С учетом (3.1)-(3.2) для функции $S_i, M_i, i=1,2$ из (2.14) будем иметь

$$S_1(T) = S_2(T) = T^2/6,\ \ M_i(T) = \left[6/T^2 + 3(c^2_{i1} + c^2_{i3})^{1/2}/2T\right]^{-1}, \quad i=1,2 \tag{3.3}$$

Подставим $S_i, M_i, i=1,2$ в условие (2.18), в котором, согласно (1.10), положим $\left|x^1\right| = \sqrt{(x^1_1)^2 + (x^1_3)^2}$. Из (2.18) получим уравнения для нахождения T

$$\left|x^1\right| = \min_{i=1,2}\min\left\{\eta_i T^2/6,\ \left[6/T^2 + 3(c^2_{i1} + c^2_{i3})^{1/2}/2T\right]^{-1}\right\} \tag{3.4}$$

При нахождении T из (3.4) возможны несколько случаев в зависимости от соотношений между параметрами задачи $\eta_1, \eta_2, c_{i1}, c_{i2}$, $i=1,2$. Для конкретной модели манипулятора со следующими значениями безразмерных параметров, входящих в (1.8)-(1.10),

$$\begin{gathered} L_1 \approx 0.001,\ L_2 \approx 0.003,\ R_1 \approx 0.39,\ R_2 \approx 0.09,\ k_1 \approx 1.5,\ k_2 \approx 1,\ \eta_1 \approx 0.1 \\ \eta_2 \approx 0.09,\ c_{11} \approx 4.0302, \quad c_{13} \approx -1.3216, \quad c_{21} \approx -1.2930, \quad c_{23} \approx 11.5351 \\ A_{12}/A_{11} \approx 0.08, \quad A_{12}/A_{22} \approx 0.48, \quad MaL/A_{11} \approx 0.03, \quad MaL/A_{22} \approx 0.21 \end{gathered} \tag{3.5}$$

имеют место соотношения $\eta_1 > \eta_2$, $c^2_{11} + c^2_{13} < c^2_{21} + c^2_{23}$. С учетом этих неравенств, из (3.4) найдем

$$\left|x^1\right| = \begin{cases} \eta_2 S_2(T), & T \in [0, T'] \\ M_2(T), & T \in [T', \infty] \end{cases} \tag{3.6}$$

где T' определяется из равенства $\eta_2 S_2(T) = M_2(T)$

$$T' = 4(1-\eta_2)/\eta_2(c^2_{21} + c^2_{23})^{1/2} \tag{3.7}$$

Поскольку функции S_2, M_2 (3.6) монотонно возрастающие, то из уравнений (3.6) искомое время T определяется единственным образом. Разобьем весь полубесконечный интервал времени T на две части: $[0,T']$, $[T',\infty]$, которым соответствуют два интервала изменения $\left|x^1\right|$: $\left[0, \left|x^1\right|'\right]$, $\left[\left|x^1\right|', \infty\right]$. Здесь

$$\left|x^1\right|' = 8(1-\eta_2)^2 / 3\eta_2(c_{21}^2 + c_{23}^2) \tag{3.8}$$

определяется подстановкой $T = T'$ (3.7) в правую часть одного из уравнений (3.6). Далее, для фиксированного начального состояния (2.3) по заданному конечному состоянию x^1, путем сравнения $\left|x^1\right|$ с $\left|x^1\right|'$ определяем, в каком из двух отрезков лежит искомое T. Если $T \in [0, T']$, то T определяется из первого уравнения (3.6)

$$T = (6\left|x^1\right| / \eta_2)^{1/2}, \qquad 0 < \left|x^1\right| \le \left|x^1\right|' \tag{3.9}$$

Если $T \in [T', \infty]$, то T определяется из второго уравнения (3.6)

$$T = (3(c_{21}^2 + c_{23}^2)^{1/2}\left|x^1\right| + \left(9\left|x^1\right|^2(c_{21}^2 + c_{23}^2) + 96\left|x^1\right|\right)^{1/2})/4, \quad \left|x^1\right|' < \left|x^1\right| < \infty \tag{3.10}$$

Соответственно, подставляя (3.1) в (2.11), получаем выражения, по которым можно подсчитать компоненты управления в любой момент времени, а именно:

$$v_1(t) = 6T^{-2}(1 - 2T^{-1}t)x_1^1, \quad v_2(t) = 6T^{-2}(1 - 2T^{-1}t)x_3^1 \tag{3.11}$$

где момент времени T определяется согласно (3.9),(3.10).

Из (3.11) следует, что чем больше время движения до терминального состояния, тем меньше максимальные величины управляющих функций.

Согласно (1.7) перейдем в (3.11) к исходным переменным

$$\begin{aligned} u_1(t) = &\left\{6k_1\left[R_1^{-1}(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1} x_1^1 - R_2^{-1} A_{12} A_{11}^{-1}(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1} x_3^1\right]/T^{-3}\right\}t^2 + \\ &+\left\{-12x_1^1/T^3 + 6k_1(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1}(R_2^{-1} A_{12} A_{11}^{-1} x_3^1 - R_1^{-1} x_1^1)/T^2\right\}t + 6x_1^1/T^2 \\ u_2(t) = &\left\{6k_2\left[R_2^{-1}(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1} x_3^1 - R_1^{-1} A_{12} A_{22}^{-1}(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1} x_1^1\right]/T^{-3}\right\}t^2 + \\ &+\left\{-12x_3^1/T^3 + 6k_2(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1}(R_1^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} x_1^1 - R_2^{-1} x_3^1)/T^2\right\}t + 6x_3^1/T^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

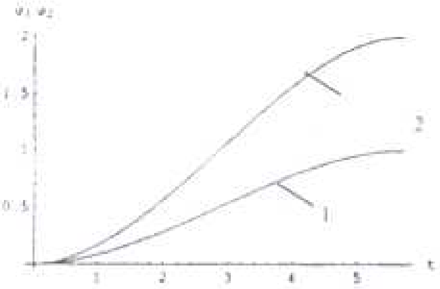
где

$$x_1^1 = R_1\varphi_1^1 + R_1 A_{12} A_{11}^{-1}\varphi_2^1, \qquad x_3^1 = R_2 A_{12} A_{22}^{-1}\varphi_1^1 + R_2\varphi_2^1$$

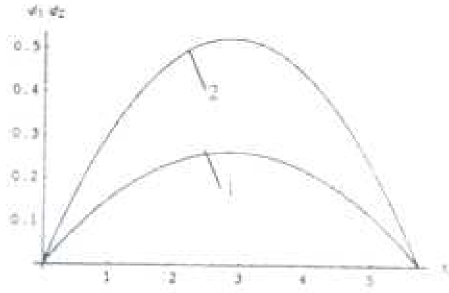
4. Законы управления (3.12), полученные для упрощенной модели-системы четвертого порядка (1.5), использовались при моделировании транспортных движений двузвенного манипуляционного робота с числовыми значениями безразмерных параметров (3.5). Фигурирующие в выражениях (3.12) конечные значения фазовых координат принимались равными $\varphi_1^1(T) = 1$ рад.; $\varphi_2^1(T) = 2$ рад. В соответствии с этими значениями и с учетом (3.8), (3.5) время окончания процесса было рассчитано по формуле (3.10) при значениях (3.5) $- T \approx 5.7368$. Управления (3.12) при указанных значениях параметров были подставлены в полные уравнения (1.1) и путем численного моделирования проинтегрированы с начальными условиями (1.2) на интервале $[0, T]$. На фиг.1 представлены зависимости $\varphi_1(t) - (1)$, $\varphi_2(t) - (2)$ для полной системы (1.1). Соответствующим образом представлены также зависимости $\dot\varphi_1(t) - (1)$, $\dot\varphi_2(t) - (2)$ на фиг.2. Вычисления показали, что значения фазовых координат и угловых скоростей системы (1.1) в момент

окончания управляемого процесса равны соответственно

$$\varphi_1(T) \approx 1.0072, \quad \varphi_2(T) \approx 1.9923, \quad \dot{\varphi}_1(T) \approx -0.0018, \quad \dot{\varphi}_2(T) \approx -0.0008$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Равенства свидетельствуют о том, что управления, рассчитанные для упрощенной модели, обеспечивают приведение манипулятора в заданное терминальное состояние с приемлемой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимизация транспортных движений промышленных роботов с ограничением на мощность тепловыделения.// Изв. АН СССР; Техн. Кибернет.1987. № 4. С. 200-207.
2. Аветисян В.В. Оптимальные по энергозатратам перемещения электромеханического манипуляционного робота.// Изв. РАН. Теория и Системы Управления. 1996. №4. С. 186-192.
3. Калман Р. Об общей теории систем управления. // Тр. 1-го конгр. Междунар. федерации по автомат. управ-ю. (IFAC). М.: АН СССР. 1961. Т.2. С.521-547.
4. Черноусько Ф. Л. О построении ограниченного управления в колебательных системах. // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 549-558.
5. Добрынина И. С., Черноусько Ф. Л. Ограниченное управление линейной системой четвертого порядка. // РАН. Техн. Кибернет. 1992. № 6. С. 94-100.
6. Ананьевский И.М. Управление линейной системой четвертого порядка при смешанных ограничениях. // ПММ. 2000. Т.64. Вып.6. С. 901-908.
7. Аветисян В.В. Ограниченное векторное управление линейной динамической системой. // Сб. науч. Тр. Конф. "Вопросы оптимальные управления, устойчивости и прочности механических систем", Ереван. 1997. С. 13-17.
8. Аветисян В.В. Ограниченное управление линейной динамической системой с ограничением на фазовую скорость. // Изв. НАН РА. Механика. 2000. Т. 53. № 4. С. 48-56.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
19. 11. 2001