

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН РАСШИРЕНИЯ
 И КРУЧЕНИЯ В УПРУГОМ КРУГОВОМ СТЕРЖНЕ

Минасян М.М.

Մ.Մ.Մինասյան

Երկայնական և ուղղման ափսեների ոչ գծային ֆոնազդեցությունը առաձգական կտր ձողում

Աշխատանքում ուսումնասիրվել է առաձգական ձողումը բարձր հաճախության ուժեղ երկայնական ափսե տրանսմիտի ցածր հաճախության ուղղման երկու ափսեների: Ուսումնասիրության հիմքում դրված է ոչ գծային ափսեների սիներոն ֆոնազդեցության ռադիոֆիզիկայում և օպտիկայում կիրառվող կարճակամ հավասարումների հայտնի մեթոդը: Որոշված են տրանսմիտի և վերին շեմերը, ինչպես նաև պարամետրական ուժեղացման գործակիցը և պարբերությունը: Կատարված են ինտեգրալներ սղծման և պրոպագեյտի ամառաառված ձողերի համար, և արդյունքները արված են սպյուսակների տեսքով:

M.M.Minasyan

Nonlinear Interaction of the Longitudinal and Torsional Waves in Elastic Circular Bar

В работе исследована распадная неустойчивость сильной высокочастотной продольной волны при ее нелинейном взаимодействии с низкочастотными волнами кручения в упругом стержне кругового поперечного сечения. Для поля перемещения приняты приближения Миндлина-Германа. Укороченные нелинейные уравнения выведены методом синхронизма для нормальных колебаний. Определены нижний и верхний пороги параметрического усиления, а также коэффициент и период взаимодействия. Для стержня, изготовленного из меди и стали, проведен численный анализ, результаты которого представлены таблицами.

Как показали Похгаммер и Кри [1,2], в точной линейной постановке в бесконечном упругом стержне кругового поперечного сечения могут распространяться бегущие по осевому направлению гармонические волны трех типов: расширения, изгиба и кручения. Дисперсионное уравнение для осесимметричных волн представляется в виде произведения:

$$G_L(\omega, k)G_T(\omega, k)G_0(\omega, k) = 0 \quad (1)$$

что указывает на то, что волны разделяются. Однако в нелинейной постановке эти волны взаимодействуют, усиливая или ослабляя друг друга. Одним из механизмов обмена энергией разных волн является фазовый синхронизм (согласованность частот и волновых чисел). Это явление широко исследовано в физике плазмы, оптике и акустике [4,5,6,7]. В [7] исследовано взаимодействие упругих волн расширения и изгиба по их элементарной теории с учетом квадратичной нелинейности. В данной работе рассматривается трехволновое нелинейное синхронное взаимодействие продольной и крутильной колебаний в упругом круговом стержне.

В случае волн расширения ($G_L(\omega, k) = 0$) и кручения ($G_0(\omega, k) = 0$) точные уравнения частот имеют кратные корни и дисперсионные кривые состоят из ряда ветвей, соответствующих основным и более высоким модам [2]. Основные ветви этих мод схематично представлены на фиг. 1 (а и б).

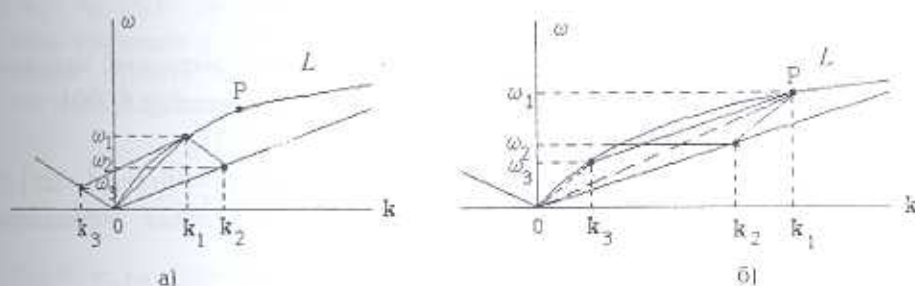
Укажем некоторые характерные черты этих кривых.

Кривая L имеет касательную $\omega = c_0 k$ при $k = 0$ и асимптоту

$\omega = c_1 k$, где c_0, c_1 — "стержневая" скорость ($c_0 = \sqrt{E/\rho}$) и скорость поверхностных волн Рэлея, соответственно. В отличие от дисперсионной кривой L кривая θ не дисперсионная. Уравнение кривой θ имеет вид $\omega = c_2 k$, где $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость сдвиговых волн. Для ветви, выше некоторой точки P на кривой L , групповая скорость волны расширения меньше c_2 . Это приводит к тому, что ниже этой точки в трехволновом синхронизме:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 + \omega_3 \\ k_1 &= k_2 + k_3 \end{aligned} \quad (2)$$

могут участвовать одна высокочастотная волна расширения и две низкочастотные волны кручения, а выше этой точки — также две волны расширения и одна низкочастотная волна кручения. В первом случае будем говорить о резонансной тройке $(L0\theta)$, а во втором случае — о тройке $(LL\theta)$.



Фиг.1

Для вывода нелинейных уравнений, следуя Миндлин-Герману [1], представим перемещения точек стержня в цилиндрических координатах в виде:

$$u_z = w(z, t), \quad u_r = ru(z, t)/a, \quad u_\theta(z, t) = r\theta(z, t) \quad (3)$$

где z — осевое направление, a — радиус цилиндра.

Вычислив функцию Лагранжа, осредненную по поперечному сечению стержня, получим:

$$\begin{aligned} L = & \frac{\rho}{2} \left(w_z^2 + \frac{u_r^2}{2} + \frac{a^2 \theta_z^2}{2} \right) - \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2} w_z^2 + \frac{\mu u_r^2}{4} + \frac{\mu a^2 \theta_z^2}{4} + \frac{2\lambda u w_z}{a} + \right. \\ & \left. + \frac{2(\lambda + \mu)u^2}{a^2} \right] - \theta_z^2 \left[\frac{\lambda + \mu}{2} a u + \frac{\lambda + 2\mu}{4} a^2 w_z \right] + (\dots) \end{aligned} \quad (4)$$

где приведены нелинейные кубические члены, участвующие в синхронном взаимодействии. В дальнейшем будем ограничиваться только этими нелинейностями. Из принципа Гамильтона получим нелинейные уравнения движения стержня в принятом приближении:

$$\begin{aligned} \rho w_{,tt} - (\lambda + 2\mu)w_{,zz} - 2\lambda u_{,z} / a &= (\lambda + 2\mu) a^2 (\theta_z^2)_{,z} / 4 \\ \rho u_{,tt} - \mu u_{,zz} + 4\lambda w_{,z} / a + 8(\lambda + \mu)u / a^2 &= -(\lambda + \mu) a \theta_z^2 \\ \rho \theta_{,tt} - \mu \theta_{,zz} &= 2(\lambda + \mu) \mu \theta_z / a + (\lambda + 2\mu) (w_z \theta_z)_{,z} \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что левые части первых двух уравнений системы (5) соответствуют уравнениям Миндлина-Германа [1] с заменой поправочных коэффициентов на единицу.

Нижние дисперсионные ветви имеют вид:

$$G_L^-(\omega, k) = [\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2][\rho\omega^2 - \mu k^2 - 8(\lambda + \mu)/a^2] - 8\lambda^2 k^2 / a^2 \quad (6)$$

$$G_0 = \rho\omega^2 - \mu k^2 \quad (7)$$

где знак минус при G_L означает, что выбрана нижняя ветвь дисперсионной кривой L . Отметим, что эта ветвь весьма мало отличается от точной по форме, лишь только в пределе $k \rightarrow \infty$ вместо c_1 получается c_2 . Безразмерные фазовые скорости получаются в виде:

$$\bar{c}^2 \equiv c^2 / c_0^2 = \frac{1}{4m} \left[3 - 4\nu + \frac{8}{a^2 k^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{8}{a^2 k^2}\right)^2 + \frac{128}{a^2 k^2}} \right]$$

$$\bar{c}_i^2 \equiv c_i^2 / c_0^2 = \frac{1}{2(1+\nu)}, \quad m = (1+\nu)(1-2\nu) \quad (8)$$

ν — коэффициент Пуассона. Далее будем следовать методике, изложенной в работах [4,5]. Сначала рассмотрим резонансную тройку $(L0\theta)$.

Представим решение системы (5) в форме:

$$w(x, t) = \bar{w}(t) \exp(-ikx), \quad u(x, t) = \bar{u}(t) \exp(-ikx), \quad \theta(x, t) = \bar{\theta}(t) \exp(-ikx) \quad (9)$$

Приняв условие согласований волновых чисел и введя нормальные колебания:

$$a_L = \frac{2}{\sqrt{2+\beta^2}} \left(\bar{w} - \frac{i\beta}{2} \bar{u} \right), \quad a_\theta = a\bar{\theta}, \quad \left(\beta = \frac{2(1-\nu) - (1-2\nu)\bar{c}^2 / \bar{c}_i^2}{4\nu} ak \right) \quad (10)$$

получим систему укороченных уравнений:

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} + \omega_1^2 a_1 = 2nia_2 a_3, \quad \frac{d^2 a_2}{dt^2} + \omega_2^2 a_2 = -2nia_1 a_3, \quad \frac{d^2 a_3}{dt^2} + \omega_3^2 a_3 = -2nia_1 a_2$$

$$n = \frac{-k_1 k_2 k_3}{2\sqrt{2+\beta^2}} \gamma, \quad \gamma = \frac{(1+\nu)\bar{c}^2 - (1-\nu)\bar{c}_i^2}{\nu} \quad (11)$$

Здесь и далее индексы соответствуют порядку резонансных троек.

Отметим, что при $\bar{c}^2 > \bar{c}_i^2 = (1-\nu)/(1+\nu)$ $\gamma > 0$, а при $\bar{c}^2 < \bar{c}_i^2$ $\gamma < 0$.

Введя "медленное время" $T = \varepsilon t$, $\varepsilon = A_{01} / \lambda_1$, где $\varepsilon \ll 1$, A_{01} — характерная амплитуда, а λ_1 — длина продольной волны и представив решение системы в виде $a_j = A_j(T) \exp(i\omega t)$, для медленно меняющихся амплитуд A_j получим систему уравнений:

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{n}{\varepsilon\omega_1} A_2 A_3 \exp(-i\Delta\omega t) \quad \frac{dA_2}{dt} = -\frac{n}{\varepsilon\omega_2} A_1 A_3^* \exp(i\Delta\omega t)$$

$$\frac{dA_3}{dt} = -\frac{n}{\varepsilon\omega_3} A_1 A_2^* \exp(i\Delta\omega t) \quad \Delta\omega = \omega_1 - (\omega_1 + \omega_2) \quad (12)$$

Из (12) следует закон сохранения энергии и соотношения Мэнли-Роу [6]:

$$\sum_{j=1}^3 \omega_j^2 |A_j(T)|^2 = \text{const}$$

$$\omega_1 (|A_1(0)|^2 - |A_1(T)|^2) = \omega_2 (|A_2(T)|^2 - |A_2(0)|^2) = \omega_3 (|A_3(T)|^2 - |A_3(0)|^2) \quad (13)$$

Из этих соотношений следует, что поскольку в рассматриваемой резонансной тройке $n < 0$ ($k_1 > 0, k_2 < 0, k_3 > 0$), то при $\gamma > 0$ (область длинных волн) возникает распадная неустойчивость [6] и энергия сильной высокочастотной продольной волны перекачивается в две другие волны, параметрически усиливая их. При $\gamma < 0$ высокочастотная волна устойчива и в этом случае происходит только слабое биение колебаний — слабые волны не усиливаются. Рассмотрим распадную неустойчивость подробнее.

Пусть в начальный момент возбуждены сильная высокочастотная продольная волна и одна из низкочастотных крутильных волн с начальными амплитудами $|A_1(0)| = A_{01}$, $|A_2(0)| = A_{02}$, $|A_3(0)| = 0$, причем $A_{02}/A_{01} \ll 1$. Для определения порога параметрического усиления [6] волн кручения в начальной стадии распада амплитуду продольной волны будем считать постоянной. Тогда, решив два последних уравнения системы (12), получим:

$$A_2(T) = A_{01} \exp(-i\Delta\omega T/2) (\text{ch}\alpha T + i\Delta\omega \text{sh}\alpha T/2\alpha)$$

$$A_3(T) = \frac{nA_{01}A_{02}}{\epsilon\alpha\omega_3} \exp(-i\Delta\omega T/2) \text{sh}\alpha T \quad (14)$$

где α — коэффициент параметрического усиления:

$$\alpha^2 = \frac{n^2 A_{01}^2}{\epsilon^2 \omega_1 \omega_2} - \frac{(\Delta\omega)^2}{4} \quad (15)$$

Из (15) для порога усиления получим оценку:

$$A_{01} > \frac{\epsilon\Delta\omega\sqrt{\omega_1\omega_2}}{4n} \quad (16)$$

При полной фазовой синхронности ($\Delta\omega = 0$) распадная неустойчивость становится безусловной. Дальше будем считать $\Delta\omega = 0$.

При тех же начальных условиях решение системы (12) в эллиптических функциях Якоби [8,9] имеет вид:

$$|A_1(T)|^2 = A_{01}^2 \text{sn}^2(\zeta, s), \quad |A_2(T)|^2 = \frac{A_{01}^2 \omega_1}{s^2 \omega_2} \text{dn}^2(\zeta, s), \quad |A_3(T)|^2 = A_{01}^2 \frac{\omega_1}{\omega_2} \text{cn}^2(\zeta, s) \quad (17)$$

где $\zeta = K(s) + A_{01} n T / s \epsilon \sqrt{\omega_1 \omega_2}$, $s^{-1} = \sqrt{1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\frac{A_{02}}{A_{01}} \right)^2}$

и $K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Решения (17) описывают колебания с периодом:

$$T = \frac{2sK(s)\sqrt{\omega_1\omega_2}}{nA_{01}} \quad (18)$$

После некоторых упрощений, запишем (18) в форме:

$$\frac{\Pi}{\Pi_0} = \frac{2sK(s)\sqrt{2+\beta^2}}{\pi^2[(1+\nu)\bar{c}^2 - (1-\nu)]} \sqrt{\left(1 - \frac{\bar{c}_2^2}{\bar{c}^2}\right)^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{A_{01}}\right)^2} \quad (19)$$

где $\Pi_0 = 2\pi/\omega_1$ — период продольных колебаний. Учитывая, что из оценок $A_{02}/A_{01} \ll 1$, $\omega_2/\omega_1 = O(1)$ следует оценка $1-s^2 \approx 1$, то при вычислении полного эллиптического интеграла можно пользоваться асимптотической формулой [9]:

$$2K(s) = \ln 16 / (1-s^2) \quad (20)$$

Определим коэффициент распадной неустойчивости как отношение максимального осевого напряжения к максимальному касательному напряжению в волне кручения при $r = a$.

Учитывая, что

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)w_{,z} + 2\lambda u/a, \quad \sigma_{z\theta} = \mu a \theta_{,z} \quad (21)$$

этот коэффициент принимает значение:

$$\Gamma = \frac{\max|\sigma_{z\theta}|}{\max|\sigma_{zz}|} = \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}} \left(\sqrt{1 - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}}} + \frac{1}{s} \sqrt{1 + \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}}} \right) \sqrt{1 + \beta^2/2} \quad (22)$$

В табл. 1 и 2 для меди ($\nu = 0.35$) и стали ($\nu = 0.28$) на основе формул (8), (19) и (22) приведены числовые данные для безразмерной фазовой скорости продольной волны \bar{c} , коэффициента усиления (Γ) и величины $\xi = \Pi/\Pi_0 (\lambda_1/A_{01})^2$. Из данных таблиц видно, что параметры взаимодействия существенно зависят от ak . В частности, при фиксированном радиусе стержня интенсивность (Γ) распадной неустойчивости возрастает в сторону коротких волн, одновременно увеличивается и период взаимодействия. Однако, при этом убывает коэффициент нелинейной связи. При достижении точки P (фиг. 1) нелинейная связь в квадратичном приближении обрывается. При дальнейшем увеличении k коэффициент нелинейности меняет знак и, как было отмечено выше, сильная высокочастотная продольная волна становится устойчивой, а низкочастотные слабые крутильные волны не усиливаются.

В случае резонансной тройки $(LL\theta)$, как показывает анализ, распадная неустойчивость не проявляется, т. е. сильная высокочастотная продольная волна не усиливает низкочастотную продольную или низкочастотную крутильную волны.

В работе рассмотрена временная эволюция при пространственной однородности. Аналогично можно рассмотреть пространственную эволюцию в стационарном состоянии. В общем случае необходимо учитывать как временную, так и пространственную эволюцию, как это сделано при взаимодействии продольной и изгибной волн [8]. Здесь наиболее интересное явление связано с существованием солитонов разных "цветов" — "светлых" и "темных". Однако, это предмет отдельного исследования.

Следует отметить, что усиления будет тем больше, чем больше длина стержня. Увеличение ее длины можно имитировать соответствующими способами закрепления концов, превратив стержень в резонатор.

Таблица 1 (медь)

ak	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	3	4
\bar{c}	1.000	0.999	0.999	0.995	0.980	0.924	0.948	0.782
Γ	1.556	1.156	1.158	1.170	1.216	1.452	1.960	2.689
ξ	0.684	0.685	0.687	0.704	0.772	1.177	2.495	2.688

Таблица 2 (сталь)

ak	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	3	4
\bar{c}	1.000	0.999	0.999	0.997	0.987	0.944	0.870	0.800
Γ	1.182	1.183	1.184	1.191	1.223	1.418	1.982	2.925
ξ	0.692	0.695	0.696	0.709	0.759	1.097	1.982	2.925

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйбрамсон Х.Н., Пласс Х.Дж., Риппергер Э.А. Распространение волн напряжения в стержнях и балках. // "Проблемы механики", сб. статей. М.: Иностран. лит., 1961, с.24-90.
2. Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах. М.: Иностран. лит., 1961. 93с.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 712с.
4. Луцселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: Иностран. лит., 1974. 523с.
5. Вильгельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергоиздат, 1981. 222с.
6. Виноградов М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 282с.
7. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988. 230с.
8. Kovriguine D.A., Potapov A.I. On nonlinear oscillations of a thin bar. // Arc. Appl. Mech. 66, 1966, pp.168-176.
9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. 830с.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
24.12.2001