ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ*)

Геворкян Г.З

Գ.Զ. Գևորգյան

Փոփոխական հաստության ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալերի ազատ լայնական տատանումների ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ

Հետևելով [1] աշխատանքին, դուրս են բերվել փոփոխական հաստության ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալերի շարժման հավասարումները և ձևակերպվել համապատասխան սկզբնական և եզրային պայմանները ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաների հաշվառմամբ: Որպես օրինակ դիտարկվել է սալերի ազատ լայնական տատանումների խնդիրը, երբ արհամարհվում են միջին հարթության տանգենցիալ տեղափոխությունները և պտտման իներցիան: Սեփական հաճախությունների մոտավոր որոշման համար առաջարկված է Ռիտցի մեթոդի սխեմա, որտեղ լայնական ֆիկտիվ բեռի կատարած աշխատանքի հետ մեկտեղ դիտարկվում է նաև ֆիկտիվ կտրող ուժերի կատարած աշխատանքը: Այդ սխեմայի օգնությամբ լուծված է փոփոխական հաստության ուղղանկյուն սալերի ազատ տատանումների խնդիրը եզրերի հոդակապորեն հենման դեպքում: Կատարվել է ստացված արդյունքների վերլուծություն:

G.Z. Gevorgyan

On Free Transversal Vibrations of Rectangular Orthotropic Plates of Variable Thickness with taking into Account the Transversal Shears

По аналогии с [1] выводятся уравнения движения прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины и формулируются соответствующие начальные и краевые условия при учете влияния деформаций поперечных сдвигов. В качестве примера рассматривается задача свободных поперечных колебаний пластин при пренебрежении тангенциальных перемещений срединной плоскости и инерции вращения. Для приближенного определения собственных частот пластинки предлагается схема применения метода Ритца, где наряду с работой фиктивной поперечной нагрузки рассматривается также работа фиктивных перерезывающих сил. По этой схеме решается задача о свободных поперечных колебаниях шарнирно опертой пластинки линейно-переменной толщины.

1. Рассмотрим прямоугольную пластинку переменной толщины h из прямолинейно-ортотропного линейно-упругого материала. Пластинку отнесем к системе декартовых координат x, y, z, оси которых параллельны главным направлениям ортотропии материала. Координатную плоскость xy совместим с срединной плоскостью пластинки, а ось z направим вертикально вниз. Пусть на пластинку действуют поверхностные нагрузки, проекции интенсивности которых на координатные оси, приведенные к единице площади срединной плоскости, составляют $X^{\pm}, Y^{\pm}, Z^{\pm}$. Здесь и в дальнейшем знаками «+» и «−» будем отмечать величины, относящиеся к лицевым поверхностям

*) Работа доложена на VIII всероссийском съезде по прикладной и теоретической механике. (Пермь, 23-29 августа 2001г.)

пластинки $z=h/2$ и $z=-h/2$ соответственно. Условия опирания краев пластинки произвольны.

По аналогии с [2] для поперечных касательных напряжений положим

$$\tau_{xz}=\varphi_1+z\varphi_2+z^2\varphi_3, \qquad \tau_{yz}=\psi_1+z\psi_2+z^2\psi_3 \tag{1.1}$$

где φ_i и ψ_i – искомые функции только координат x, y.

Дифференциальные уравнения движения сплошной среды имеют вид [1]:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\sigma y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \qquad (x,y,z) \tag{1.2}$$

где $\sigma_x, \tau_{xy},\ldots$ – напряжения, $u_x,\ldots$ – перемещения, ρ – плотность материала, t – время, а символ (x,y,z) означает круговую перестановку букв. Ограничиваясь линейностью распределения перемещений по толщине пластинки, можно написать:

$$u_x=u-z\left(\frac{\partial w}{\partial x}-a_{55}\varphi_1\right),\ u_y=\mathrm{v}-z\left(\frac{\partial w}{\partial y}-a_{44}\psi_1\right),\ u_z=w \tag{1.3}$$

Здесь u, v, w – перемещения срединной плоскости пластинки, a_{ij} – упругие постоянные материала. Компоненты деформации и основных напряжений пластинки определяются с учетом (1.3) из геометрически линейных соотношений и соотношений обобщенного закона Гука [1] соответственно. Выражения этих величин, а также внутренних усилий и моментов пластинки совпадают со своими статическими аналогами, в силу чего здесь не приводятся. Если считать, что окружающая среда не оказывает сопротивления на движение пластинки, то со своими статическими аналогами будут совпадать также и условия на лицевых поверхностях пластинки $z=\pm h/2$ [2].

Имея в виду вышесказанное и поступая как обычно, из дифференциальных уравнений движения сплошной среды (1.1) приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial S_{xy}}{\partial y}=-X_2+\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial T_y}{\partial y}+\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}=-Y_2+\rho h\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2}\\
\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=-Z_2+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\
\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=N_x-hX_1-\frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}-a_{55}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right)\\
\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=N_y-hY_1-\frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2}-a_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $T_x, T_y, S_{xy}, N_x, N_y$ и M_x, M_y, M_{xy} – внутренние усилия и моменты пластинки

$$\begin{gathered}
X_1=(X^+-X^-)/2,\ \ Y_1=(Y^+-Y^-)/2,\ \ X_2=X^++X^-\\
Y_2=Y^++Y^-,\ \ Z_2=Z^++Z^-
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Из условий на лицевых поверхностях пластинки $z = h/2$ для функций φ_2, ψ_2 и φ_3, ψ_3 получаются известные выражения [2].

Используя формулы внутренних усилий и моментов и имея в виду выражения функций φ_2, ψ_2, φ_3, ψ_3, из уравнения (1.4) получим систему движения дифференциального элемента срединной плоскости:

$$h\left[B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x\partial y}+B_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+\left(B_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+B_{12}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+$$
$$+B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y}-\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-X_2$$
$$h\left[B_{22}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}+(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+B_{66}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}\right]+\left(B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+B_{22}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+$$
$$+B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x}-\rho h\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2}=-Y_2$$
$$h^2\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial h^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+4B_{66}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-$$
$$-h\left\{\left[8+a_{55}h\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\left[8+a_{44}h\left(B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right\}-$$
$$-2B_{66}h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\left(a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}+a_{44}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)-16\left(\frac{\partial h}{\partial x}\varphi_1+\frac{\partial h}{\partial y}\psi_1\right)+ \qquad (1.6)$$
$$+\rho h\left\{12\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+h\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}-a_{55}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2}-a_{44}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right]\right\}=$$
$$=4\left[3Z_2+h\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right)-X_1\frac{\partial h}{\partial x}-Y_1\frac{\partial h}{\partial y}\right]$$
$$h^3\left[B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]+2h\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+2B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-$$
$$-h^2\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}+B_{66}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}\right)+a_{44}(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x\partial y}\right]-$$
$$-2h\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)+a_{44}\left(B_{12}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \psi_1}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)\right]+$$
$$+8\varphi_1-\rho h^2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}-a_{55}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right)=8X_1$$

$$h^2\left[B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]+2h\left[\left(B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+2B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-h^3\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\right)+a_{55}\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-2h\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)+a_{55}\left(B_{12}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\right]+$$

$$+8\psi_1-\rho h^2\left(\frac{\partial w^3}{\partial y\partial t^2}-a_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)=8Y_1$$

К уравнениям движения пластинки (1.6) нужно присоединить граничные и начальные условия. При отсутствии сопротивления среды граничные условия совпадают со своими статическими аналогами [2]. Начальные же условия можно представить в виде [1]:

$$\text{при } t=0 \quad u=u_0(x,y),\ \ \mathrm{v}=\mathrm{v}_0(x,y),\ \ w=w_0(x,y)$$

$$\partial u/\partial t=u_1(x,y),\ \partial \mathrm{v}/\partial t=\mathrm{v}_1(x,y),\ \partial w/\partial t=w_1(x,y) \tag{1.7}$$

Здесь u_0,v_0,w_0 и u_1,v_1,w_1 – заданные компоненты начального перемещения и начальной скорости точек срединной плоскости пластинки соответственно.

2. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях пластинки. Задача существенно упрощается в случае поперечных колебаний, когда пренебрегаются как тангенциальные перемещения срединной плоскости пластинки, так и влияние инерции вращения. Положив $X^{\pm}=Y^{\pm}=0$, из (1.6) для отмеченного случая получим систему свободных колебаний пластинки [3]. Рассмотрим случай, когда толщина пластинки от координат x,y зависит линейно – $h=h_0+h_1x+h_2y$

Здесь h_0,h_1,h_2 – заданные постоянные.

Примем обозначения:

$$x=\bar{x}a,\ y=\bar{y}b=\bar{y}am,\ (b=am),\ \ h=h_0H, B_{ij}=\alpha_{ij}B_{11}, a_{44}=\beta a_{55}$$

$$a_{55}B_{11}=\chi,\quad \omega^2=B_{11}\Omega^2/\rho a^2,\ \varphi_1=B_{11}\varphi\cos\omega t,\ w=h_0 f\cos\omega t \tag{2.1}$$

$$\psi_1=B_{11}\psi\cos\omega t,\ \ h_0/a=s,\ \gamma_1=h_1/s,\ \gamma_2=h_2/s$$

Имея в виду (2.1), уравнения свободных поперечных колебаний пластинки (1.6) можно представить в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\frac{1}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\frac{2}{H}\left(\gamma_1\varphi+\gamma_2\psi\right)+\frac{3}{2}s\Omega^2 f=L_1\left(f,\varphi,\psi\right)=0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}^3}+\frac{\alpha_{12}+2\alpha_{66}}{m^2}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}^2}+\frac{2}{H}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{12}}{m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{y}^2}\right)\gamma_1+2\frac{\alpha_{66}\gamma_2}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-$$

$$-\frac{\chi}{s}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{66}}{m^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{y}^2}+\frac{\beta}{m}\left(\alpha_{12}+\alpha_{66}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-\frac{2\chi}{Hs}\left[\gamma_1\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\alpha_{66}\frac{\gamma_2}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}+\right.$$

$$+\beta\left(\alpha_{12}\frac{\gamma_1}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\alpha_{66}\gamma_2\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right)\Bigg]+\frac{8}{H^2s^3}\varphi=L_2(f,\varphi,\psi)=0$$

$$\frac{\alpha_{22}}{m^3}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{y}^3}+\frac{\alpha_{12}+2\alpha_{66}}{m}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}^2\partial\bar{y}}+\frac{2}{H}\left[\left(\alpha_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{22}}{m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{y}^2}\right)\gamma_2+2\frac{\alpha_{66}\gamma_1}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-$$

$$-\frac{\chi}{s}\left[\beta\left(\frac{\alpha_{22}}{m^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{y}^2}+\alpha_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{x}^2}\right)+\frac{\alpha_{12}+\alpha_{66}}{m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-\frac{2\chi}{Hs}\Bigg[\alpha_{12}\gamma_2\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\alpha_{66}\frac{\gamma_1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}+$$

$$+\beta\left(\alpha_{22}\frac{\gamma_2}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\alpha_{66}\gamma_1\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right)\Bigg]+\frac{8}{H^2s^3}\psi=L_3(f,\varphi,\psi)=0 \qquad (2.2)$$

Безразмерная толщина $H=1+\gamma_1\bar{x}+\gamma_2 m\bar{y}$.

3. Рассмотрим одну схему приближенного определения собственных частот прямоугольных пластин переменной толщины при учете деформации поперечных сдвигов. Будем пользоваться методом Ритца [4]. Пусть каждая тройка соответствующих членов рядов

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}A_{ij}f_{ij}(\bar{x},\bar{y}),\ \varphi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}B_{ij}\varphi_{ij}(\bar{x},\bar{y}),\ \psi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}C_{ij}\psi_{ij}(\bar{x},\bar{y}) \qquad (3.1)$$

удовлетворяет данным краевым условиям пластинки, но не удовлетворяет дифференциальным уравнениям (2.2). Здесь A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} – произвольные постоянные. Имея в виду (1.3) и (2.1), нетрудно убедиться, что функции $A_{ij}f_{ij}$ представляют собой амплитудные значения безразмерных виртуальных прогибов, а функции $B_{ij}\varphi_{ij}$, $C_{ij}\psi_{ij}$ пропорциональны соответствующим амплитудным значениям виртуальных деформаций поперечных сдвигов пластинки. После подстановки (3.1) в левые части уравнений (2.2) получаются величины, отличные от нуля. Эти величины можно рассмотреть как некоторую распределенную нагрузку $\bar{Z}_2$ и перерезывающие силы $\bar{N}_x$, $\bar{N}_y$. Нагрузка $\bar{Z}_2$ может совершать работу на виртуальных прогибах, а перерезывающие силы $\bar{N}_x$ и $\bar{N}_y$ – на соответствующих виртуальных деформациях поперечных сдвигов.

Следуя методу Ритца, приравним нулю работу $\bar{Z}_2$ и $\bar{N}_x$, $\bar{N}_y$ на соответствующих виртуальных прогибах и деформациях:

$$\int_0^1\int_0^1\left[L_1(f,\varphi,\psi)\delta f_{ij}+L_2(f,\varphi,\psi)\delta\varphi_{ij}+L_3(f,\varphi,\psi)\delta\psi_{ij}\right]d\bar{x}d\bar{y}=0 \qquad (3.2)$$

Так как вариации δf_{ij}, $\delta\varphi_{ij}$, $\delta\psi_{ij}$ произвольны и независимы друг от друга, то из (3.2) следует:

$$\int_0^1\int_0^1 L_1(f,\varphi,\psi)f_{ij}\,d\bar{x}d\bar{y}=0,\qquad \int_0^1\int_0^1 L_2(f,\varphi,\psi)\varphi_{ij}\,d\bar{x}d\bar{y}=0$$

$$\int_0^1\int_0^1 L_3(f,\varphi,\psi)\psi_{ij}\,d\bar{x}d\bar{y}=0,\qquad i=1,2,...n,\quad j=1,2,...k \qquad (3.3)$$

Уравнения (3.3) образуют систему однородных алгебраических линейных уравнений относительно A_{ij}, B_{ij} и C_{ij}. Значения собственных частот поперечных колебаний пластинки можно определить из условия существования нетривиальных решений этой системы, т.е. из условия равенства нулю ее определителя. Конечность числа членов выражения (3.1) накладывает определенные ограничения на возможные формы изогнутой пластинки. Это равносильно искусственному повышению жесткости пластинки, в силу чего найденные приближенные значения собственных частот будут выше соответствующих точных значений.

4. В качестве примера рассмотрим задачу о свободных поперечных колебаниях ортотропной пластинки линейно-переменной толщины при шарнирном опираний ее кромок. Граничные условия берем в виде:

$$\text{при } x = 0, 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a_{55}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \ (M_x = 0) \quad \psi = 0 \ (u_y = 0), \ f = 0 \ (w = 0)$$

$$\text{при } y = 0, 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - a_{44}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \ (M_y = 0) \quad \psi = 0 \ (u_x = 0), \ f = 0 \ (w = 0) \quad (4.1)$$

Функции

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} A_{ij} \sin i\pi x \sin j\pi y, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} B_{ij} \cos i\pi x \sin j\pi y$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} C_{ij} \sin i\pi x \cos j\pi y \quad (4.2)$$

удовлетворяют граничным условиям (4.1).

В табл.1 приведены значения первой безразмерной частоты при $n = k = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, $\beta = 2$, $\alpha_{12} = 0.3$, $\alpha_{22} = 2$, $\alpha_{66} = 0.4$, $s = 0.125$ для различных значений m и χ. В предпоследней строке приведены значения безразмерной частоты для полосы, когда в рядах удерживается один член и получена приближенная аналитическая формула, а в последней строке — точные значения безразмерной частоты для полосы [3].

Таблица1

m	χ					
	0	1	2	5	10	20
1	1.235	1.128	1.047	0.8852	0.7355	0.5837
5	0.5628	0.5496	0.5373	0.5049	0.4622	0.4019
10	0.5442	0.5323	0.5212	0.4916	0.4519	0.3948
20	0.5396	0.5280	0.5172	0.4883	0.4493	0.3930
100	0.5381	0.5267	0.5159	0.4872	0.4484	0.3924
∞	0.5381	0.5267	0.5159	0.4872	0.4484	0.3924
Точн. реш для пол.	0.5140	0.5040	0.4945	0.4690	0.4341	0.3827

В табл. 2 приведены значения ω_{11} при $n = k = 1$ для различных значений m, χ и $\gamma_1 = 0;1$, $\gamma_2 = 0;1$.

Таблица2

	χ	0	1	2	5	10	20
$m = 1$	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$	0.8121	0.7790	0.7499	0.6806	0.6010	0.5046
	$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$	1.235	1.128	1.046	0.8852	0.7355	0.5836
	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$	1.235	1.128	1.046	0.8852	0.7355	0.5836
	$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$	1.650	1.419	1.270	1.0162	0.8122	0.6242
$m = 2$	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$	0.4609	0.4534	0.4463	0.4271	0.4003	0.3600
	$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$	0.7001	0.6746	0.6519	0.5967	0.5311	0.4485
	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$	0.9477	0.8871	0.8378	0.7309	0.6214	0.5010
	$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$	1.178	1.068	0.9864	0.8261	0.6790	0.5312

Данные таблиц приводят к следующим заключениям:

1. Учет поперечных сдвигов приводит к уменьшению частоты.
2. Поправка, вносимая учетом поперечных сдвигов, уменьшается с увеличением m и наименьшая для полосы.
3. Для пластинки постоянной толщины поправка, вносимая учетом поперечных сдвигов, меньше чем для пластинки переменной толщины. Наибольшая поправка получается при $m = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, \chi = 20$ и равна 62%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. "Гитутюн" НАН РА, 2000. 122с.
3. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные колебания ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов. // Докл. НАН РА. 1999. Т. 99. С.116-122.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.11.2001