ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա . 55, №1, 2002 Механика

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА МАЛОНАПРЯЖЕННОСТЬ АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНО-АНИЗОТРОПНОГО КЛИНА

Саргсян А.М.

Ա.Մ. Սարգսյան
Կտոր առ կտոր համասեռ ուղղագծային-անիզոտրոպ սեպի հակահարթ խնդրում թերլարվածության վրա եզրային պայմանների ազդեցության մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրված է առաձգական լարումների վարքը երկայնական սահքի պայմաններում գտնվող բաղադրյալ ուղղագծային-անիզոտրոպ սեպի միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում՝ տարբեր եզրային պայմանների դեպքում:

Ցույց է տրված, որ միացված մարմինների անիզոտրոպ հատկությունները էապես ազդում են թերլարվածային և կոնցենտրացիոն տիրույթների վրա:

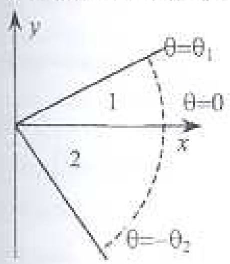
A.M. Sargsyan
On Influence of Boundary Conditions of Small-stress of Antiplane Problem for Piece-wise-homogeneous Linear-anizotropic Wedge

В работе исследовано поведение упругих напряжений в окрестности края поверхности контакта составного прямолинейно-анизотропного клина, находящегося в состоянии продольного сдвига при различных граничных условиях.

Установлено, что анизотропные свойства соединенных тел существенно влияют на размеры областей малонапряженности и концентрации.

Распределение установившихся плоских физических полей (механических, тепловых, диффузионных, фильтрационных, электрических, магнитных и т.д.) и поведение их характеристик (упругие напряжения, поток тепла и вещества, плотность расхода жидкости, напряженность электрических и магнитных полей и т.д.) в кусочно-однородном изотропном клине рассмотрены в работах [1-3].

В работе [4] эти вопросы изучены для кусочно-однородного цилиндрически-анизотропного клина.



Фиг. 1

В настоящей работе на примере антиплоской задачи теории упругости исследуется характер распределения установившихся плоских физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина (фиг.1). Неоднородный анизотропный клин в каждой точке имеет плоскость материальной симметрии, совпадающую с плоскостью oxy. Ось z перпендикулярна к этой плоскости. На боковых гранях составного клина задаются либо касательные напряжения, либо упругие перемещения, либо на одной грани $(\theta = -\theta_2)$ приложено касательное напряжение, а на другой грани $(\theta = \theta_1)$ задано перемещение.

Антиплоская задача для прямолинейно-анизотропного тела впервые была поставлена в работе [5], где из условий $u_x = u_y = 0$ и существования плоскости упругой симметрии получено определяющее уравнение для перемещения $u_z(x, y)$. В дальнейшем, используя результаты работы [5], получены решения ряд задач для анизотропных клиньев [9,10]. Здесь же вводится функция напряжений $\Psi(x, y)$, призводные которой по x и y определяют упругие напряжения τ_{yz} и τ_{xz}. При этом уравнение равновесия удовлетворяется тождественно, а из условия совместности деформации получается уравнение для определения $\Psi(x, y)$.

При отсутствии объемных сил функция напряжений $\Psi(x, y)$ в соответствующих областях удовлетворяет уравнению

$$a_{44}^{(j)}\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial x^2}-2a_{45}^{(j)}\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial x\partial y}+a_{55}\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

$$j=1,\ 0<\theta<\theta_1;\ j=2,\ -\theta_2<\theta<0;\ \theta_1+\theta_2\le 2\pi,\ \theta_j\le 2\pi$$

условиям сопряжения на поверхности разрыва свойств материалов $(y=0)$

$$\tau_{yz}^{(1)}=\tau_{yz}^{(2)},\ u_z^{(1)}=u_z^{(2)} \tag{2}$$

и граничным условиям, заданным в одном из видов:

$$(\tau_{yz}^{(1)}\cos\theta_1-\tau_{xz}^{(2)}\sin\theta_1)\Big|_{\substack{x=r\cdot\cos\theta_1\\ y=r\cdot\sin\theta_1}}=(\tau_{yz}^{(2)}\cos\theta_2+\tau_{xz}^{(2)}\sin\theta_2)\Big|_{\substack{x=r\cdot\cos\theta_2\\ y=-r\cdot\sin\theta_2}}=0 \tag{3}$$

$$u_z^{(1)}\Big|_{\substack{x=r\cdot\cos\theta_1\\ y=r\cdot\sin\theta_1}}=u_z^{(2)}\Big|_{\substack{x=r\cdot\cos\theta_2\\ y=-r\cdot\sin\theta_2}}=0 \tag{4}$$

$$u_z^{(1)}\Big|_{\substack{x=r\cdot\cos\theta_1\\ y=r\cdot\sin\theta_1}}=(\tau_{yz}^{(2)}\cos\theta_2+\tau_{xz}^{(2)}\sin\theta_2)\Big|_{\substack{x=r\cdot\cos\theta_2\\ y=-r\cdot\sin\theta_2}}=0 \tag{5}$$

где a_{44}, a_{45}, a_{55} — коэффициенты деформации.

То же уравнение (1) и аналогичные гранично-контактные условия с незначительным изменением обозначений имеют место и для других плоских физических полей [6-8]. Поэтому, методы решения поставленных выше задач и полученные основные выводы применимы и к этим полям.

Представим решение уравнений (1) в виде [11]

$$\Psi_j(x,y)=A_j(x+\mu_j y)^\lambda+B_j(x+\overline{\mu}_j y)^\lambda,\ (j=1,2) \tag{6}$$

где A_j, B_j — неизвестные постоянные, λ — произвольный параметр, μ_j и $\overline{\mu}_j$ — корни квадратного уравнения

$$a_{55}^{(j)}\mu_j^2-2a_{45}^{(j)}\mu_j+a_{44}=0\,,\quad \mu_j=\sigma_j+i\tau_j,\ \overline{\mu}_j=\sigma_j-i\tau_j,\ \tau_j>0$$

$$\sigma_j=\frac{a_{45}^{(j)}}{a_{55}^{(j)}},\ \tau_j=\frac{\sqrt{a_{44}^{(j)}a_{55}^{(j)}-a_{45}^{(j)}a_{45}^{(j)}}}{a_{55}^{(j)}} \tag{7}$$

Используя уравнения состояний и условие совместности деформаций [5] для перемещения $u_z^{(j)}(x, y)$ будем иметь

$$\begin{gathered}u_z^{(j)}(x,y)=A_jm_j(x+\mu_jy)^\lambda+B_j\overline{m}_j(x+\overline{\mu}_jy)^\lambda+C\\ m_j=a_{55}^{(j)}\mu_j-a_{45}^{(j)},\ \overline{m}_j=a_{55}^{(j)}\overline{\mu}_j-a_{45}^{(j)}\end{gathered} \tag{8}$$

Удовлетворяя гранично-контактным условиям (2)—(5), для определения A_j, B_j получим системы линейных алгебраических уравнений. Из условий существования нетривиальных решений этих систем получим следующие уравнения относительно λ:

$$\Delta_3(\lambda) = (\chi+1)\sin\lambda(\varphi_1+\varphi_2) + (\chi-1)\sin\lambda(\varphi_1-\varphi_2) = 0 \quad (9)$$

$$\Delta_4(\lambda) = (\chi+1)\sin\lambda(\varphi_1+\varphi_2) - (\chi-1)\sin\lambda(\varphi_1-\varphi_2) = 0 \quad (10)$$

$$\Delta_5(\lambda) = (\chi+1)\cos\lambda(\varphi_1+\varphi_2) + (\chi-1)\cos\lambda(\varphi_1-\varphi_2) = 0 \quad (11)$$

где $$\chi = \frac{\chi_2}{\chi_1} = \sqrt{\frac{a_{44}^{(2)}a_{55}^{(2)} - a_{45}^{(2)}a_{45}^{(2)}}{a_{44}^{(1)}a_{55}^{(1)} - a_{45}^{(1)}a_{45}^{(1)}}}$$

$$\varphi_1 = \arg(\cos\theta_1 + \mu_1\sin\theta_1),\ \varphi_2 = \arg(\cos\theta_1 - \overline{\mu}_2\sin\theta_1),\ 0 < \varphi_j < 2\pi.$$

Сравнивая (9)-(11) с соответствующими уравнениями, относящимися к антиплоской задаче составного изотропного клина, замечаем, что решения поставленных задач свелись к решениям соответствующих задач для составного изотропного клина [2]. При этом составляющим клин изотропным материалам нужно приписать модули сдвига χ_1, χ_2 и приведенные углы φ_1, φ_2 соответственно.

В работах [1,2] показано, что корни (9)–(11) действительны и просты.

Как следует из (6), напряжения $\tau_{yz}^{(j)} = -\partial\psi_j(x,y)/\partial x$ и $\tau_{xz}^{(j)} = \partial\psi_j(x,y)/\partial y$ затухают вблизи угловой точки составного клина, если первый положительный корень уравнений (9)-(11) $\lambda_1 > 1$. При $\lambda_1 < 1$ эти напряжения неограниченно возрастают при приближении к угловой точке. В предельном случае, когда $\lambda_1 = 1$, при приближении к краю поверхности контакта, напряжения конечны и вообще отличны от нуля.

В уравнения (9)-(11), кроме углов θ_1 и θ_2, входят еще пять независимых между собой параметров $\chi, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1$ и τ_1. Поэтому исчерпывающее общее аналитическое исследование зависимости искомого корня λ_1 от параметров задачи здесь, по-видимому, невозможно.

Для выявления влияния анизотропии материалов на поведение упругих напряжений в окрестности угловой точки составного клина воспользуемся понятием предельной кривой, впервые введенным в [1].

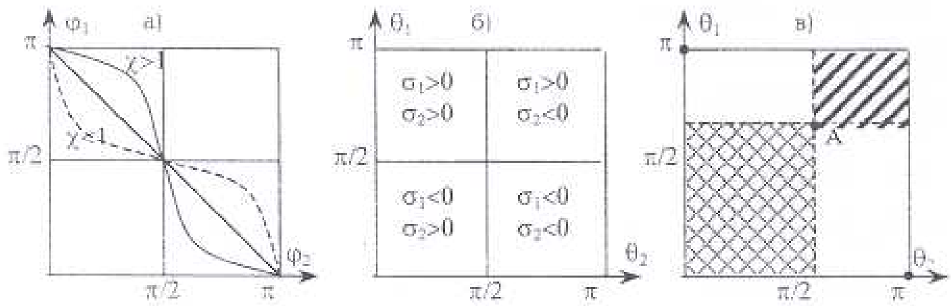
Хорошо известно [1,2], что на плоскости приведенных углов $\varphi_1\varphi_2$ предельные кривые, описываемые уравнениями (9)–(10) при $\lambda = 1$ и разделяющие области, где компоненты напряжений τ_{yz} и τ_{xz} стремятся к нулю (область малонапряженности) или бесконечности (область концентрации), проходят через три характерные точки [1,2]. Это – точки с координатами $(\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi)$, $(\varphi_1 = \pi/2,\ \varphi_2 = \pi/2)$, $(\varphi_1 = \pi,\ \varphi_2 = 0)$ (фиг.2а).

С помощью формул определения аргумента комплексных чисел z_1, z_2

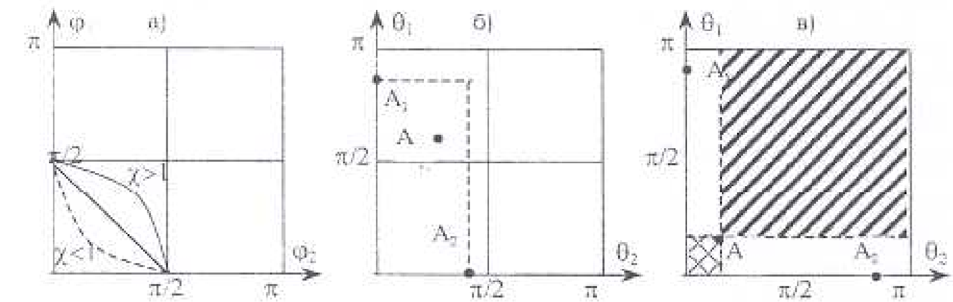
$$R_j\cdot\cos\varphi_j = \cos\theta_j - (-1)^j\sigma_j\sin\theta_j,\quad R_j\cdot\sin\varphi_j = \tau_j\sin\theta_j \quad (12)$$

легко показать, что этим трем точкам на плоскости реальных углов растворов однородных клиньев $\theta_1\theta_2$ соответствуют точки с координатами $(\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi)$, $(\theta_1 = \mathrm{arctg}(-\sigma_1)\quad \theta_2 = \mathrm{arcctg}(\sigma_2))$ и $(\theta_1 = \pi,\ \theta_2 = 0)$. Вторая из них в зависимости от σ_1 и σ_2 может находиться внутри квадрата со стороной π в любом месте (фиг.2б). В частном случае $\sigma_j = 0$, эта точка занимает место в центре квадрата.

Известно также [1,2], что внутри области $0 < \varphi_1 < \pi/2,\ 0 < \varphi_2 < \pi/2$ напряжения стремятся к нулю при приближении к угловой точке, а внутри области $\pi/2 < \varphi_1 < \pi,\quad \pi/2 < \varphi_2 < \pi$ они неограниченно возрастают в окрестности этой точки. Соответствующие области в плоскости $\theta_1\theta_2$ заштрихованы двойной и простой штриховкой (положение второй точки A на фиг.2в определено для случая $\sigma_1 = 0.5,\ \sigma_2 = -0.25$).



Фиг. 2



Фиг. 3

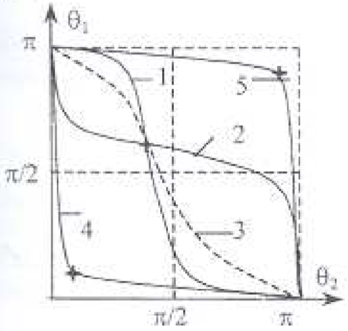
Следовательно, предельные кривые проходят через незаштрихованные фиг.2в области, что и подтверждается численными расчетами уравнения (9), приведенные на фиг.4.

Предельная кривая 1 соответствует случаю $\chi = 7,\ \sigma_j = 0.5,\ \tau_j = 2.0$; кривая $2 - \chi = 1/7,\quad \sigma_j = 0.5,\ \tau_j = 2.0$; кривая $3 - \chi = 3,\quad \sigma_j = 0.5$, $\tau_j = 2.0$; кривая $4 - \chi = 7,\quad \sigma_j = 5.7(-1)^j,\quad \tau_j = 1.7$; кривая $5 - \chi = 7$, $\sigma_j = -5.7(-1)^j$, $\tau_j = 1.7$. На этих кривых звездочками обозначены положения второй характерной точки.

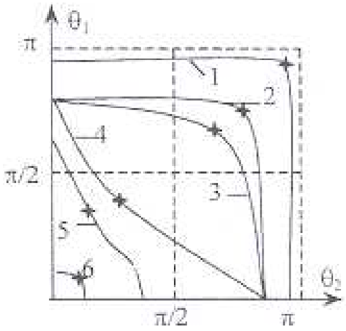
На основании фиг.4 заключаем, что напряжения τ_{12} и τ_{32} на краю поверхности контакта неоднородного анизотропного клина могут неограниченно возрастать при весьма малом значении суммы углов $\theta_1+\theta_2$. В случае же, когда θ_1 и θ_2 близки к π, вблизи этого края, являющегося вершиной весьма близкого к трещине выреза, эти напряжения могут затухать.

Аналогичный результат несколько иным путем был получен в работе [11] при изучении упругих напряжений, возникающих в составном прямолинейно-анизотропном стержне при кручении.

Уравнение (10) совпадает с уравнением (9) при замене χ по $1/\chi$, поэтому вышеприведенный анализ относится и к случаю граничных условий (3).



Фиг. 4



Фиг. 5

Из фиг.4 видно также, что при граничных условиях (3) и (4) область малонапряженности увеличивается в два раза по сравнению с таковым для составного изотропного клина.

В случае граничных условий (5), характерные точки, через которые проходят предельные кривые, описываемые уравнением (11) при $\lambda_1=1$, несколько иные.

В данном случае точки пересечения предельных кривых с координатными осями φ_1 и φ_2 (фиг.3а) переходят на плоскость $\theta_1\theta_2$ в точки A_1 и A_2 с координатами $(\mathrm{arcctg}(-\sigma_1),\ 0)$, и $(0,\ \mathrm{arcctg}\sigma_2)$ соответственно, причем $0<\mathrm{arcctg}(-1)^j\sigma_j<\pi$. В качестве третьей характерной точки берется точка пересечения предельной кривой (при заданном значении χ) с линией $\varphi_1=\varphi_2$ (фиг.3а). Далее, из (14) определяется положение этой точки на плоскости $\theta_1\theta_2$ в зависимости от σ_j и τ_j. При этом третья точка при заданных σ_j и τ_j должна находиться ниже линии $\theta_1=\mathrm{arcctg}(-\sigma_1)$ и левее линии $\theta_2=\mathrm{arcctg}\sigma_2$ (фиг.3б). Например, из (11) для $\chi=0.2$ находим, что $\varphi_1=\varphi_2=2\pi/15$. И в случае $\sigma_j=-5.671(-1)^j$, $\tau_j=1.685$ из (12) получим координаты всех трех характерных точек на плоскости $\theta_1\,\theta_2$ (фиг.3в): $A_1(0{,}17\pi/18)$, $A_2(17\pi/18{,}0)$, $A(1{,}6\pi/18{,}\ 1{,}6\pi/18)$.

На фиг.5 представлены результаты численных расчетов. Предельная кривая 1 построена для случая $\chi=14$, $\sigma_j=-5.671(-1)^j$, $\tau_j=1.685$;

кривая $2-\chi=4, \sigma_j=\sqrt{3}(-1)^{j+1}, \tau_1=1, \quad \tau_2=1.5$; кривая $3-\chi=1$, $\sigma_j=\sqrt{3}(-1)^{j+1}, \quad \tau_1=1,\ \tau_2=1.5$; кривая $4-\chi=0.25,\ \tau_1=1,\ \tau_2=1.5$, $\sigma_j=\sqrt{3}(-1)^{j+1}$; кривая $5-\chi=1,\ \sigma_j=0.5,\ \tau_j=j$; кривая $6-\chi=14$, $\tau_j=1.685\ \ \sigma_j=5.671(-1)^j$. В отличие от составного изотропного клина, для которого область малонапряженности в предельном случае $\chi\to\infty$ становится квадратом со стороной $\pi/2$, в случае граничных условий (5) в зависимости от σ_j эта область может увеличиваться в 4 раза.

Таким образом, анизотропия соединенных тел существенно влияет на размеры области малонапряженности или концентрации и дает возможность регулирования поведения упругих напряжений в окрестности края поверхности контакта составного анизотропного тела в нужном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван.: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338с.
2. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. // Докл. АН АрмССР. 1988. Т.86. №4. С.161-166.
3. Sinclair G.B. On the singular Eigenfunction for plane Harmonic Problems in Composite Regions. // J. of Appl. Mech. 1980. vol.47. №1. P.87-92.
4. Саргсян А.М. Поведение плоских стационарных физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного цилиндрически-анизотропного клина//В сб.: Механика деформируемого тела. Ереван: Изд. АН Армении. 1993. С.157-162.
5. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. Ереванского ун-та. 1997. С.241.
6. Вековищева И.А. Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. ПМ. 1975. Т.XI, вып.2. С.85-89.
7. Прусов И.А. Двумерные краевые задачи фильтрации. Минск: Изд. "Университетское", 1987. 182с.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука. 1964. 488с.
9. Айрапетян В.Ж., Кутузян Н.А., Овсепян Д.Л. Антиплоские задачи для анизотропных неоднородных клиньев.//Уч. записки ЕГУ. 1999. №2. С.30-37.
10. Сархисян В.С., Мелкумян С.А., Мелкумян А.С. О некоторых задачах теории упругости анизотропного тела. Донецк: Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. 2001.
11. Алексанян Р.К., Чобанян К.С. Характер напряжений вблизи края поверхности контакта скручиваемого анизотропного составного стержня // ПМ. 1977. Т.XIII. №6. С.90-96.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.07.2001