ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ

Шагинян С. Г.

Ս.Գ.Շահինյան
Պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության մասին

Դիտարկված է պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրը: Կատարելով Լյապունովի ձևափոխություն՝ խնդիրը բերված է հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդրին և ցույց է տրված, որ կատարված ձևափոխության ժամանակ պահպանվում է համակարգերի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրների համարժեքությունը:

Ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության, ասիմպտոտիկ կայունության և անկայունության համար:

S.G.Shahinyan
On the Stability of Acting Force of the Systems of Differential Equation with Periodical Coeficients

Рассматривается задача устойчивости по действующей силе системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. С помощью преобразования Ляпунова задача приведена к задаче устойчивости по действующей силе систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Показано, что при преобразовании сохраняется эквивалентность задач устойчивости по действующей силе систем с периодическими и с постоянными коэффициентами.

Получены необходимые и достаточные условия, при которых система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами устойчива, асимптотически устойчива или неустойчива по действующей силе.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $A(t) - (n \times n)$ — матрица, элементы которой непрерывные периодические функции периода ω.

Рассмотрим также систему

$$\dot{x} = A(t)x + \varphi(t) \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям, указанным в [1].

Пусть $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ — корни характеристического уравнения системы (1) с кратностями $p_1, p_2, \dots, p_k$, соответственно ($k \le n$; $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$).

Известно [2], что всякую систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами можно преобразовать при помощи линейной подстановки с периодическими коэффициентами в систему уравнений с постоянными коэффициентами.

Обозначим через

$$y = B(t)x \tag{3}$$

где $B(t) = \|b_{ij}(t)\| - (n \times n)$-мерная действительная матрица, элементы которой непрерывные, ограниченные, периодические функции периода 2ω (в общем случае), причем $\det B(t) \neq 0$ при любом значении t, $|b_{ij}(t)| \leq b < \infty$ $(i, j = 1,...,n)$.

После преобразования (3) система (1) будет

$$\dot{y} = Ay \tag{4}$$

где матрица $A = B(t)A(t)B^{-1}(t) -$ постоянная и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}$$

Здесь постоянная матрица A_i имеет размерность $p_i \times p_i$:

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_i & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1,...,k) \tag{5}$$

а числа $\alpha_i = \dfrac{1}{\omega} \ln \rho_i$ $(i = 1,...,k) -$характеристические показатели системы (1) [2].

В общем случае, числа α_i —комплексные. Так как коэффициенты уравнения (1) вещественны, то все комплексные корни характеристического уравнения и все комплексные решения системы (4) распадаются на пары сопряженных. Следовательно, есть возможность привести систему (4) в систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными действительными коэффициентами [3].

Делая преобразование (3), система (2) приводится к виду

$$\dot{y} = Ay + \psi(t) \tag{6}$$

где $\psi(t) = B(t)\varphi(t)$.

Покажем, что вектор-функция $\psi(t)$ тоже удовлетворяет всем условиям, указанным в [1].

Действительно,

1) $$\left\| \int_{t_0}^{T} \psi(t)dt \right\| = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{T} \psi_i(t)dt \right)^2 \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{T} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\varphi_j(t)dt \right)^2 \right]^{1/2} \leq$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{T} \sum_{j=1}^{n} b \cdot \varphi_j(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} = b \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{T} \varphi_j(t) dt \right)^2 \right]^{1/2}$$

и если

$$\left\| \int_{t_0}^{T} \varphi(t) dt \right\| < \delta, \text{ то } \left\| \int_{t_0}^{T} \psi(t) dt \right\| < b \left(\sum_{i=1}^{n} \delta^2 \right)^{1/2} = b\sqrt{n}\delta = \delta_1;$$

2) так как $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \ge T$, то $\psi(t) = B(t) \cdot \varphi(t) \equiv 0$ при $t \ge T$.

Таким образом, задача устойчивости по действующей силе системы (1) приводится к задаче устойчивости по действующей силе системы (4). Известно [4], что критерии устойчивости по действующей силе системы (4) формулируются следующим образом:

1. Для того, чтобы система (4) была асимптотически устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы корни соответствующего характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части.

2. Для того, чтобы система (4) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее характеристическое уравнение имело нулевой корень с кратностью r $(1 \le r \le n)$, которому соответствуют простые элементарные делители, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части.

Во всех остальных случаях система (4) неустойчива по действующей силе.

Корни характеристического уравнения, соответствующего системе (4), являются характеристическими показателями системы (1) [2]. Следовательно, верны следующие утверждения:

Теорема 1. Для того, чтобы система (1) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы характеристические показатели α_i удовлетворяли следующим условиям:

а) существует $\alpha_l = 0$ с кратностью p_l, которому соответствуют простые элементарные делители;

б) $\mathrm{Re}\,\alpha_i < 0 \quad (i = 1,\dots,k; i \ne l)$.

Теорема 2. Для того, чтобы система (1) была асимптотически устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические показатели имели отрицательные вещественные части.

Во всех остальных случаях система (1) неустойчива по действующей силе.

Замечание. Вышесформулированные утверждения можно сформулировать также, используя корни ρ_i характеристического уравнения системы (1).

Для того, чтобы система (1) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы корни соответствующего характеристического уравнения удовлетворяли следующим условиям:

а) существует корень $\rho_l = 1$ с кратностью p_l, которому соответствуют простые элементарные делители;

б) $|\rho_i|<1 \quad (i=1,...,k;\ i\neq l)$.

Для того, чтобы система (1) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы (1) были внутри единичного круга.

Во всех остальных случаях система (1) неустойчива по действующей силе.

Автор выражает свою искреннюю благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Габриеляну М.С. за постоянное внимание к работе, а также за многие полезные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян. М.С., Шагинян С.Г. О построении функции Ляпунова. // Уч. записки ЕГУ. 1987. №1. С. 39-45.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.:Гостехиздат, 1950. 472с.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 533с.
4. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости. // Уч. записки ЕГУ. 1986. №2. С.39-46.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 29.11.2001