ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ КРЕСТООБРАЗНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

Григорян Э.Х., Торосян Д.Р., Шагинян С.С.

Է.Խ.Գրիգորյան, Դ.Ռ.Թորոսյան, Ս.Ս.Շահինյան
Խնդիր առաձգական հարթության համար, որը պարունակում է խաչաձև ներդիր

Դիտարկվում է խնդիր առաձգական հարթության համար, որը պարունակում է խաչաձև վերջավոր ներդիր: Խնդիրը մոդելացվում է որպես կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ խաչաձև ներդիր պարունակող առաձգական հարթության խնդիր: Խնդիրը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման, որը թույլ է տալիս լուծում հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով:

E.K.Grigoryan, D.R.Torosyan, S.S.Shahinyan
Problem for Elastic Plane Weakened by Cruciform Insertion

Рассматривается задача для упругой плоскости, содержащей крестообразное упругое конечное включение. Упругая плоскость деформируется под действием напряжений, приложенных на бесконечности по взаимно-перпендикулярным направлениям (по x и по y). Задача моделируется в виде задачи для упругой плоскости, содержащей бесконечное крестообразное включение, состоящее из двух кусочно-однородных бесконечных включений. Далее задача сводится к решению фредгольмовского интегрального уравнения второго рода, допускающее решение методом последовательных приближений.

Пусть упругая плоскость содержит две одинаковые взаимно-перпендикулярные включения одинаковой длины, которые вместе образуют крест, т.е. упругая плоскость содержит крестообразное включение. Упругая плоскость деформируется под действием напряжений p и q, приложенных на бесконечности по направлениям Ox и Oy, соответственно. Относительно включения полагается, что оно по линиям x и y находится в одноосном напряженном состоянии, т.е. она совпадает с крестообразной линией $|x| \le a$, $y=0$ и $|y| \le a$, $x=0$, с жесткостью $E_1 h$, где E_1 — модуль упругости включения, а h — его толщина. С другой стороны, поскольку вышеуказанная линия имеет конечную жесткость, то в концах $x=\pm a$, $y=\pm a$ оно не может быть в контакте с линиями нулевой жесткости. Поэтому, чтобы учитывать контактные условия на концах включения ($x=\pm a$ и $y=\pm a$), поступим, как в [1], мысленно продолжим включение по направлениям x и y материалом упругой плоскости до бесконечности. Далее допустим, что полученное кусочно-однородное бесконечное крестообразное включение находится в двухосном напряженном состоянии, т.е. совпадает с крестообразной линией, имеющая конечную жесткость (при $|x| < a$, $|y| < a$ — жесткость $E_1 h$, а при $|x| > a$, $|y| > a$ — жесткость $E_2 h$, где E_2 — модуль упругости материала плоскости). Из вышесказанного следует, что задача для упругой плоскости с конечным крестообразным включением, можно моделировать, как задачу для плоскости с бесконечным кусочно-однородным крестообразным включением, конечная часть которого — вышеуказанное включение, а полубесконечная часть состоит из материала упругой плоскости.

Приступив к решению модельной задачи, запишем уравнения равновесия включения

$$
\begin{aligned}
&hE_2\frac{d^2u^{(1)}(x)}{dx^2}+2\tau^{(1)}(x)=0; \quad (-\infty<x<-a)\\
&hE_1\frac{d^2u^{(1)}(x)}{dx^2}+2\tau^{(1)}(x)=0; \quad (-a<x<a)\\
&hE_2\frac{d^2u^{(1)}(x)}{dx^2}+2\tau^{(1)}(x)=0; \quad (a<x<\infty)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

а при $-\infty<y<\infty$

$$
\begin{aligned}
&hE_2\frac{d^2\mathrm{v}^{(1)}(y)}{dy^2}+2\tau^{(2)}(y)=0; \quad (-\infty<y<-a)\\
&hE_1\frac{d^2\mathrm{v}^{(1)}(y)}{dy^2}+2\tau^{(2)}(y)=0; \quad (-a<y<a)\\
&hE_2\frac{d^2\mathrm{v}^{(1)}(y)}{dy^2}+2\tau^{(2)}(y)=0; \quad (a<y<\infty)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $\tau^{(1)}(x)$, $\tau^{(2)}(y)$ — контактные касательные напряжения, $u^{(1)}(x)$, $\mathrm{v}^{(1)}(y)$ — перемещения включения по Ox и Oy соответственно.

В начале рассмотрим уравнения (1) и запишем их одним уравнением. Из (1) будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=-\frac{2}{hE_2}\int_{-\infty}^{x}\tau^{(1)}(s)ds+\frac{p}{E_2}; \qquad (-\infty<x<-a)\\
&\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=-\frac{2}{hE_1}\int_{-a}^{x}\tau^{(1)}(s)ds+C; \qquad (-a<x<a)\\
&\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\frac{2}{hE_2}\int_{x}^{\infty}\tau^{(1)}(s)ds+\frac{p}{E_2}; \qquad (a<x<\infty)
\end{aligned}
$$

Выше имеется в виду, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{(1)}(s)ds=0.$$

Теперь, имея в виду, что $\tau^{(1)}(-s)=-\tau^{(1)}(s)$, получим

$$\int_{-a}^{x}\tau^{(1)}(s)ds=-\int_{0}^{a}\theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds; \qquad (0<x<a)$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Итак, будем иметь

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\frac{2}{hE_1}\int_0^a\theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+C,\qquad (0<x<a)\qquad (3)$$

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\frac{2}{hE_2}\int_0^\infty\theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+\frac{p}{E_2},\qquad (a<x<\infty)\qquad (4)$$

Далее, удовлетворив условию контакта

$$E_1\frac{du^{(1)}(x)}{dx}\bigg|_{x=a-0}=E_2\frac{du^{(1)}(x)}{dx}\bigg|_{x=a+0}$$

Тогда C определяется в виде

$$C=\frac{2}{hE_1}\int_a^\infty\tau^{(1)}(s)ds+\frac{p}{E_1};\qquad \int_{-a}^a\tau^{(1)}(s)ds=0;$$

(3) и (4) можно записать одним уравнением

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\left(\frac{2}{hE_1}\int_0^a\theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+C\right)(1-\theta(x-a))+$$

$$+\left(\frac{2}{hE_2}\int_0^\infty\theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+\frac{p}{E_2}\right)\theta(x-a),\qquad (0<x<\infty)$$

Для дальнейшего, после замены x на ae^{v}, s на ae^{u}, получим

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\left(\frac{2a}{hE_1}\int_{-\infty}^0\theta(u-v)\tau_1(u)e^{u}du+C_1\right)\theta(-v)+$$

$$+\frac{2a}{hE_2}\int_0^\infty\theta(u-v)\tau_1(u)e^{u}du\,\theta(v)+\frac{p}{E_2}\qquad (-\infty<v<\infty)\qquad (5)$$

где

$$\tau_1(u)=\tau^{(1)}(ae^{u});\qquad C_1=\frac{2a}{hE_1}\int_0^\infty\tau_1(u)e^{u}du+p\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right)$$

Далее, продифференцировав (5) по v, получим

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{du^{(1)}(x)}{dx}\right)=-\frac{2a}{hE_1}\tau_1^-(v)e^{v}-\frac{2a}{hE_2}\tau_1^+(v)e^{v}+A\delta(v)\qquad (6)$$

где

$$\tau_1^-(v)=\theta(-v)\tau_1(v);\qquad \tau_1^+(v)=\theta(v)\tau_1(v)$$

$$A=\left(\frac{1}{E_2}-\frac{1}{E_1}\right)\left(p+\frac{2a}{h}\int_0^\infty\tau_1(u)e^{u}du\right)$$

Поступая аналогичным образом, получим

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{dv^{(1)}(y)}{dy}\right)=-\frac{2a}{hE_1}\tau_2^-(w)e^{w}-\frac{2a}{hE_2}\tau_2^+(w)e^{w}+B\delta(w)\quad (-\infty<w<\infty)\qquad (7)$$

где

$$B=\left(\frac{1}{E_2}-\frac{1}{E_1}\right)\left(q+\frac{2a}{h}\int_0^\infty \tau_2(w)e^w dw\right)$$

$$\tau_2(w)=\tau^{(2)}(ae^w);\ \tau_2^-(w)=\theta(-w)\tau_2(w);\ \tau_2^+(w)=\theta(w)\tau_2(w)$$

С другой стороны, разрешив уравнения Ламе при условиях

$$\tau_{yx}(x;+0)-\tau_{yx}(x;-0)=2\tau^{(1)}(x)$$

$$\tau_{xy}(+0;y)-\tau_{xy}(-0;y)=2\tau^{(2)}(y)$$

и ввиду того, что $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(y)$ нечетные функции, будем иметь [2]

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}=-\frac{A_0}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\xi-x}+\frac{1}{\xi+x}\right)\tau^{(1)}(\xi)d\xi+\frac{B_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{\eta(\eta^2-x^2)}{(\eta^2+x^2)^2}\tau^{(2)}(\eta)d\eta+$$

$$+\frac{(1-\nu^2)p}{E_2}-\frac{\nu(1+\nu)q}{E_2}$$

$$\frac{dv^{(2)}(0,y)}{dy}=-\frac{A_0}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\eta-y}+\frac{1}{\eta+y}\right)\tau^{(2)}(\eta)d\eta+\frac{B_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{\xi(\xi^2-y^2)}{(\xi^2+y^2)^2}\tau^{(1)}(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{(1-\nu^2)q}{E_2}-\frac{\nu(1+\nu)p}{E_2}$$

где $u^{(2)}(x,0)$ – перемещения плоскости по линии $y=0$, $v^{(2)}(0,y)$ – перемещения плоскости по линии $x=0$, $A_0=\dfrac{(1+\nu)(3-4\nu)}{2(1-\nu)E_2}$, $B_0=\dfrac{1+\nu}{E_2(1-\nu)}$, ν – коэффициент Пуассона материала плоскости.

Отметим, что искомые $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(y)$ ищутся в классе функций

$$\tau^{(1)}(x)\sim A_1x^{-1-\delta};\qquad \tau^{(2)}(y)\sim B_1y^{-1-\delta}\quad \text{при}\quad x\to\infty,\ y\to\infty$$

$$\tau^{(1)}(x)\sim A_2x^{\beta};\ \tau^{(2)}(y)\sim B_2y^{\beta}\quad \text{при}\quad x\to 0,\ y\to 0$$

где $\delta>0$, $\beta>0$.

Далее, после замены $\xi=ae^u$, $\eta=ae^u$, $x=ae^v$, $y=ae^w$ для $\dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{du^{(2)}(x,0)}{dx}\right)$; $\dfrac{d}{dw}\left(\dfrac{dv^{(2)}(0,y)}{dy}\right)$ получим

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}\right)=$$

$$=\frac{d}{dv}\left[-\frac{A_0}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{v-u}}+\frac{1}{1+e^{v-u}}\right)\tau_1(u)du+\frac{B_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-e^{2(v-u)}}{(1+e^{2(v-u)})^2}\tau_2(u)du\right] \tag{8}$$

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{dv^{(2)}(0,y)}{dy}\right)=\frac{d}{dw}\left[-\frac{A_0}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{w-u}}+\frac{1}{1+e^{w-u}}\right)\tau_2(u)du+\right.$$

$$+\frac{B_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-e^{2(w-u)}}{(1+e^{2(w-u)})^2}\tau_1(u)du\Bigg] \tag{9}$$

где $\tau_1(u)=\tau^{(1)}(ae^u)$, $\tau_2(u)=\tau^{(2)}(ae^u)$.

Теперь, применив комплексное преобразование Фурье к (6) – (9), получим

$$F\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{du^{(1)}(x)}{dx}\right)\right]=-\frac{2a}{hE_1}\bar{\tau}_1^-(\alpha-i)-\frac{2a}{hE_2}\bar{\tau}_1^+(\alpha-i)+A$$

$$F\left[\frac{d}{dw}\left(\frac{dv^{(1)}(y)}{dy}\right)\right]=-\frac{2a}{hE_1}\bar{\tau}_{21}^-(\alpha-i)-\frac{2a}{hE_2}\bar{\tau}_2^+(\alpha-i)+B \tag{10}$$

$$(-\delta<\mathrm{Im}\alpha<1+\beta)$$

$$F\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{du^{(2)}(x)}{dx}\right)\right]=A_0\alpha\mathrm{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\bar{\tau}_1(\alpha)+\frac{B_0 i\alpha(\alpha+i)}{2\mathrm{sh}(\pi\alpha/2)}\bar{\tau}_2(\alpha)$$

$$F\left[\frac{d}{dw}\left(\frac{dv^{(2)}(y)}{dy}\right)\right]=A_0\alpha\mathrm{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\bar{\tau}_2(\alpha)+\frac{B_0 i\alpha(\alpha+i)}{2\mathrm{sh}(\pi\alpha/2)}\bar{\tau}_1(\alpha) \tag{11}$$

$$(-1<\mathrm{Im}\alpha<0)$$

где

$$F[T(x)]=\bar{T}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}T(x)e^{i\alpha x}dx;\qquad \alpha=\sigma+it\quad(-\infty<\sigma<\infty)$$

Выше имелось в виду, что $\bar{\tau}_k^+(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\,\alpha<\beta$, $\bar{\tau}_k^-(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\,\alpha>-1-\delta$, $\bar{\tau}_k^-(\alpha-i)$ регулярна при $\mathrm{Im}\,\alpha<1+\beta$, $\bar{\tau}_k^+(\alpha-i)$ регулярна при $-\delta<\mathrm{Im}\alpha$, $\bar{\tau}_k(\alpha)$ регулярна при $-1-\delta<\mathrm{Im}\,\alpha<\beta$, $\bar{\tau}_k(\alpha-i)$ регулярна при $-\delta<\mathrm{Im}\,\alpha<1+\beta$ $(k=1,2)$.

$$\frac{1}{\pi}F\left[\frac{1}{1-e^x}\right]=-i\mathrm{cth}\pi\alpha \qquad (-1<\mathrm{Im}\alpha<0)$$

$$\frac{1}{\pi}F\left[\frac{1}{1+e^x}\right]=-\frac{i}{\mathrm{sh}\pi\alpha} \qquad (-1<\mathrm{Im}\alpha<0)$$

$$\frac{1}{\pi}F\left[\frac{1-e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}\right]=-\frac{\alpha+i}{2\mathrm{sh}(\pi\alpha/2)} \qquad (-2<\mathrm{Im}\alpha<0)$$

Далее, имея в виду условия контакта

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx} \qquad (0<x<\infty)$$

$$\frac{dv^{(1)}(y)}{dy}=\frac{dv^{(2)}(0,y)}{dy}\qquad (0<y<\infty)$$

из (10) и (11) получим функциональное уравнение

$$\begin{aligned}&\alpha \operatorname{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\bar{\tau}_1(\alpha)+\frac{i\alpha(\alpha+i)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}A_1\bar{\tau}_2(\alpha)+\lambda_1\bar{\tau}_2^-(\alpha-i)+\lambda_2\bar{\tau}_1^+(\alpha-i)=\\&=(\lambda_2-\lambda_1)(p+X)\frac{h}{2a}\qquad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\alpha \operatorname{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\bar{\tau}_2(\alpha)+\frac{i\alpha(\alpha+i)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}A_1\bar{\tau}_1(\alpha)+\lambda_1\bar{\tau}_2^-(\alpha-i)+\lambda_2\bar{\tau}_2^+(\alpha-i)=\\&=(\lambda_2-\lambda_1)(q+Y)\frac{h}{2a}\qquad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)\end{aligned}\tag{13}$$

Здесь δ фиксировалось в области $\delta\geq 1$, где

$$\begin{aligned}&A_1=\frac{B}{2A_0}=\frac{1}{3-4\nu};\qquad \lambda_1=\frac{2a}{hE_1A_0};\qquad \lambda_2=\frac{2a}{hE_2A_0}\\&X=\frac{2a}{h}\bar{\tau}_1(-i);\qquad Y=\frac{2a}{h}\bar{\tau}_2(-i).\end{aligned}\tag{14}$$

Теперь заметим, что (12) и (13) можно представить в виде

$$\bar{K}_1(\alpha)\bar{\varphi}(\alpha)+\lambda_2\bar{\varphi}(\alpha-i)=(\lambda_2-\lambda_1)\bar{\varphi}^-(\alpha-i)+(\lambda_2-\lambda_1)d_1\tag{15}$$

$$\bar{K}_2(\alpha)\bar{\psi}(\alpha)+\lambda_2\bar{\psi}(\alpha-i)=(\lambda_2-\lambda_1)\bar{\psi}^-(\alpha-i)+(\lambda_2-\lambda_1)d_2\tag{16}$$

где

$$\bar{K}_1(\alpha)=\frac{\alpha\left(\operatorname{ch}(\pi\alpha/2)+i(\alpha+i)A_1\right)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)};\ \bar{K}_2(\alpha)=\frac{\alpha\left(\operatorname{ch}(\pi\alpha/2)-i(\alpha+i)A_1\right)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}$$

$$(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)$$

$$d_1=h(X+Y+p+q)/2a;\qquad d_2=h(X-Y+p-q)/2a$$

$$\bar{\varphi}(\alpha)=\bar{\tau}_1(\alpha)+\bar{\tau}_2(\alpha);\quad \bar{\psi}(\alpha)=\bar{\tau}_1(\alpha)-\bar{\tau}_2(\alpha)$$

$$\bar{\varphi}^-(\alpha-i)=\bar{\tau}_1^-(\alpha-i)+\bar{\tau}_2^-(\alpha-i);\qquad \bar{\psi}^-(\alpha-i)=\bar{\tau}_1^-(\alpha-i)-\bar{\tau}_2^-(\alpha-i)$$

В случае $p=q$

$$\bar{\varphi}(\alpha)=2\bar{\tau}_1(\alpha);\qquad \bar{\psi}(\alpha)=0.$$

Итак, задача свелась к решению функциональных уравнений (15) и (16), поскольку

$$\bar{\tau}_1(\alpha)=\frac{\bar{\varphi}(\alpha)+\bar{\psi}(\alpha)}{2};\ \bar{\tau}_2(\alpha)=\frac{\bar{\varphi}(\alpha)-\bar{\psi}(\alpha)}{2}.$$

До того, как перейти к решению функциональных уравнений (15), (16), определим значения постоянных δ и β, т.е. определим поведение функций $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(y)$ в окрестности точек нуля и бесконечности. Для этого рассмотрим уравнение (15). Поскольку $\bar{\varphi}(-i)$ конечное число (14), а $\bar{K}_1(-i)=0$, то из (15) следует, что $\bar{\varphi}(-2i)$ – конечное число. Далее, поскольку $\bar{\varphi}(-2i)$ – конечное число, то из (15) следует, что $\alpha=-3i$ является первым простым полюсом аналитического продолжения функции $\overline{\varphi}(\alpha)$ при $\operatorname{Im}\alpha<0$. Аналогичным образом можно показать, что для аналитического продолжения функции $\overline{\psi}(\alpha)$ первым полюсом при $\operatorname{Im}\alpha<0$ является опять точка $\alpha=-3i$. Из сказанного следует, что $\delta=2$, т.е. $\tau^{(1)}(x)\sim A_1x^{-3}$, $\tau^{(1)}(y)\sim A_2y^{-3}$ при $x\to\infty$, $y\to\infty$. Теперь приступим к определению поведения функции $\tau^{(1)}(x)$, $\tau^{(2)}(y)$ при $x\to 0$, $y\to 0$ соответственно. Для этого опять рассмотрим уравнение (15). Пусть β такова, что первый положительный корень $K_1(\alpha)$ попадает в область регулярности $-2<\operatorname{Im}\alpha_1<1+\beta$ функции $\overline{\varphi}(\alpha-i)$. В таком случае, как нетрудно видеть, $\alpha=\alpha_1$ может быть первым простым полюсом аналитического продолжения функции $\overline{\varphi}(\alpha)$, при $\operatorname{Im}\alpha>0$. Отсюда можно заключить, что $\beta=\operatorname{Im}\alpha_1$, так как $\overline{\varphi}(\alpha)=2\overline{\tau}_1(\alpha)=2\overline{\tau}_2(\alpha)$ при $p=q$, а показатель β не зависит от нагрузки. Итак, при $x\to 0$, $y\to 0$ имеем

$$\tau^{(1)}(x)\sim A_2x^{\omega},\ \tau^{(2)}(y)\sim B_2y^{\omega},\ \operatorname{Im}\alpha_1=\omega.$$

Теперь перейдем сначала к решению уравнения (15). Полагая правую часть уравнения (15) известной, разрешим функциональные уравнения (15) относительно $\overline{\varphi}(\alpha)$. Для этого $\overline{\varphi}(\alpha)$ ищем в виде [2]

$$\overline{\varphi}(\alpha)=\frac{i\Gamma(i\alpha)}{\operatorname{ch}(\pi\alpha/2)}\overline{T}_1(\alpha)\qquad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)\tag{17}$$

где $\overline{T}_1(-i)=0$, $\Gamma(z)$ – известная гамма-функция.

Подставив $\overline{\varphi}(\alpha)$ в уравнение (15), для $\overline{T}_1(\alpha)$ получим функциональное уравнение

$$\overline{B}_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)-\lambda_2\overline{T}_1(\alpha-i)=\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi\alpha}{2}}{\Gamma(1+i\alpha)}\overline{f}_1(\alpha)\quad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)\tag{18}$$

при условии

$$\overline{T}_1(-i)=0$$

Здесь

$$\overline{B}_1(\alpha)=\frac{\operatorname{ch}(\pi\alpha/2)+i(\alpha+i)A_1}{\operatorname{ch}(\pi\alpha/2)},\ \ \overline{f}_1(\alpha)=(\lambda_2-\lambda_1)\left(\overline{\varphi}^-(\alpha-i)+d_1\right)$$

Теперь функциональное уравнение (18) решим методом, изложенным в [1]. Поэтому, необходимо $\overline{B}_1(\alpha)$ представить в виде [1]

$$\overline{B}_1(\alpha)=\frac{Y_1(\alpha)}{Y_1(\alpha-i)},\qquad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)\tag{19}$$

где

$$Y_1(\alpha)=\exp\left[-\frac{i}{2}\int_{it-\infty}^{it+\infty}(\operatorname{cth}\pi(\alpha-s)+\operatorname{cth}\pi s)\ln B_1(s)ds\right]$$

$$Y_1(-i)=1\qquad\qquad(-1<\operatorname{Im}\alpha<t<0)$$

Причем, при $|\alpha|\to\infty$ $(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)$ $Y_1(\alpha)$ принимает конечное значение.

Заметим, что согласно формуле Стирлинга,

$\Gamma(\alpha) \sim e^{-\alpha}\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\left[1+(12\alpha)^{-1}+...\right]$ при $\alpha \to \infty$, $|\arg\alpha| < \pi$, можно получить оценку

$$\left|\frac{\mathrm{sh}(\pi\alpha/2)}{\Gamma(1+i\alpha)}\right| \sim \frac{e^{\pi|\sigma|}}{2\sqrt{2\pi}|\sigma|^{1/2-t}} \quad \text{при} \quad |\sigma| \to \infty,\ t = \mathrm{Im}\,\alpha .$$

Это говорит о том, что к (18) нет смысла применять обратное преобразование Фурье. Поэтому, разделив обе части равенства на $\mathrm{sh}\pi\alpha$ и использовав (19), будем иметь

$$\frac{Y_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)}{\mathrm{sh}\pi\alpha} + \lambda_2\frac{Y_1(\alpha-i)\overline{T}_1(\alpha-i)}{\mathrm{sh}\pi(\alpha-i)} = \frac{\bar{f}_1(\alpha)Y_1(\alpha-i)}{2\Gamma(1+i\alpha)\mathrm{ch}(\pi\alpha/2)} \tag{20}$$

Применив к (20) обратное преобразование Фурье и потребовав, чтобы $\dfrac{Y_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)}{\mathrm{sh}\pi\alpha} \to 0$ в полосе $-2 < \mathrm{Im}\,\alpha < 0$, при $\sigma \to +\infty$ получим

$$F^{-1}\left[\frac{Y_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)}{\mathrm{sh}\pi\alpha}\right] = \frac{1}{1+\lambda_2 e^u}F^{-1}\left[\frac{Y_1(\alpha-i)}{2\Gamma(1+i\alpha)\mathrm{ch}(\pi\alpha/2)}\bar{f}_1(\alpha)\right] \tag{21}$$

Применив к (21) преобразования Фурье, получим

$$\frac{Y_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)}{\mathrm{sh}\pi\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell(u)e^{i\alpha u}}{1+\lambda_2 e^u}du \qquad -1 < \mathrm{Im}\,\alpha < 0 \tag{22}$$

где

$$\ell(u) = F^{-1}\left[\frac{Y_1(\alpha-i)}{2\Gamma(1+i\alpha)\mathrm{ch}(\pi\alpha/2)}\bar{f}_1(\alpha)\right] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\ell_1(u-w)f_1(w)dw$$

$$\ell_1(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{it-\infty}^{it+\infty}\frac{Y_1(\alpha-i)}{\Gamma(1+i\alpha)\mathrm{ch}(\pi\alpha/2)}e^{-i\alpha(u-w)}d\alpha \qquad (-1 < t < 0) \tag{23}$$

Определив из (22) $\overline{T}_1(\alpha)$ и подставив в (17), для $\overline{\varphi}(\alpha)$ будем иметь

$$\overline{\varphi}(\alpha) = \frac{i\Gamma(i\alpha)\mathrm{sh}\dfrac{\pi\alpha}{2}}{Y_1(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell(u)e^{i\alpha u}}{1+\lambda_2 e^u}du \qquad -1 < \mathrm{Im}\,\alpha < 0$$

Теперь применив к $\overline{\varphi}(\alpha)$ обратное преобразование Фурье и использовав теорему о свертке, получим

$$\varphi(\mathrm{v}) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell_2(\mathrm{v}-u)\ell(u)}{1+\lambda_2 e^u}du$$

где

$$\ell_2(\mathrm{v}-u) = \frac{1}{2\pi}\int_{it-\infty}^{it+\infty}\frac{i\Gamma(i\alpha)\mathrm{sh}(\pi\alpha/2)}{Y_1(\alpha)}e^{-i\alpha(\mathrm{v}-u)}d\alpha \qquad (-1 < t < 0)$$

Если теперь иметь в виду (23)

$$\ell(u) = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\ell_1(u-w)\varphi_-(w)e^w dw + (\lambda_2-\lambda_1)d_1\ell_1(u)$$

получим

$$\varphi(v)=(\lambda_2-\lambda_1)\int\limits_{-\infty}^{0}e^{w}\varphi(w)dw\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u-w)}{1+\lambda_2 e^{u}}du+$$

$$+(\lambda_2-\lambda_1)d_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u)}{1+\lambda_2 e^{u}}du$$

Таким образом, получили равенства

$$\varphi(v)=(\lambda_2-\lambda_1)\int\limits_{-\infty}^{0}K_1(v,w)e^{w}\varphi(w)dw+(\lambda_2-\lambda_1)d_1\varphi_0(v)\quad(-\infty<v<\infty)$$

где

$$\varphi_0(v)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u)}{1+\lambda_2 e^{u}}du$$

$$K_1(v,w)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u-w)}{1+\lambda_2 e^{u}}du$$

Переходя к переменным $x=e^{v}$, $s=e^{w}$, $y=e^{-u}$, получим

$$\varphi(ax)=(\lambda_2-\lambda_1)\int\limits_{0}^{1}K_1(x,s)\varphi(as)ds+(\lambda_2-\lambda_1)d_1K_1(x,1)\quad 0<x<\infty \tag{24}$$

где

$$K_1(x,s)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln ys)}{\lambda_2+y}dy \tag{25}$$

Теперь, потребовав в (24), чтобы $0<x<1$, для определения искомого $\varphi(ax)$ получим Фредгольмовское интегральное уравнение второго рода

$$\varphi(ax)=(\lambda_2-\lambda_1)\int\limits_{0}^{1}K_1(x,s)\varphi(as)ds+(\lambda_2-\lambda_1)d_1K_1(x,1) \tag{26}$$

Отметим, что неизвестные постоянные X, Y определяются из (14).

После определения $\tau(ax)$ при $0<x<1$ ее значения при $x>1$ определяются из (24). Отметим также, что $K_1(x,1)$ является решением задачи для бесконечного крестообразного включения, когда в точках $x=\pm a$, $y=\pm a$ приложена сила с единичной интенсивностью [2].

Исследуем свойства ядра $K_1(x,s)$. Для этого запишем его в виде

$$K_1(x,s)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln sy)}{y}dy-\lambda_2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln sy)}{y(\lambda_2+y)}dy$$

Далее, в силу теоремы о свертке, получим

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln sy)}{y}dy=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{th}(\pi\sigma/2)}{\sigma}\left(\frac{x}{s}\right)^{-i\sigma}d\sigma+R_1(x,s)$$

где

$$R_1(x,s)=\frac{A_1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sigma+i}{\sigma}\right)\frac{\operatorname{th}(\pi\sigma/2)}{\operatorname{ch}(\pi\sigma/2)+i(\sigma+i)A_1}\left(\frac{x}{s}\right)^{-i\sigma}d\sigma$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln sy)}{y}dy=\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x+s}{x-s}\right|+R_1(x,s)$$

где $R_1(x,s)$, в силу абсолютной интегрируемости подынтегрального выражения при $(x/s)^{-i\sigma}$, равняется нулю при $x=0$ и $s=0$, а при $x=s$ принимает конечное значение. Теперь, если учесть, что

$$\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x+s}{x-s}\right|=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(xy)\sin(sy)}{y}dy$$

то $K_1(x,s)$ можно записать в виде

$$K_1(x,s)=\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x+s}{x-s}\right|-\frac{2\lambda_2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(xy)\sin(sy)}{y(\lambda_2+y)}dy+\int\limits_0^{\infty}\frac{A(x,s,y)}{\lambda_2+y}dy \qquad (27)$$

где

$$A(x,s,y)=\ell_2(xy)\ell_1(sy)-\sin(xy)\sin(sy)$$

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{A(x,s,y)}{y}dy=R_1(x,s)$$

Из представления (27) следует, что $K_1(x,s)$ при $x=s$ имеет логарифмическую особенность, а в остальном – непрерывная функция. Отсюда следует, что $K_1(x,s)$ при $x=1$ имеет логарифмическую особенность, а из (26) следует, что искомые $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(1)}(y)$ при $x=a$ и $y=a$ имеют логарифмическую особенность. Из вышеуказанного следует, что интегральное уравнение (26) можно решать методом последовательных приближений в $L_1(0,1)$ при

$$|\lambda_2-\lambda_1|\max_{0\le s\le 1}\int\limits_0^1|K_1(x,s)|dx<1$$

В случае одного конечного включения $(Y_1(\alpha)\equiv 1)$

$$K_1(x,s)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(xy)\sin(sx)}{\lambda_2+y}dy$$

поскольку в силу того, что [3]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{it-\infty}^{it+\infty}\frac{1}{\Gamma(1+i\alpha)\operatorname{ch}(\pi\alpha/2)}(sy)^{i\alpha}d\alpha=\frac{2}{\pi}\sin(sy), \qquad -1<t<0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{it-\infty}^{it+\infty}i\Gamma(i\alpha)\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)(xy)^{-i\alpha}d\alpha=\sin(xy), \qquad -1<t<0$$

$$A(x,s,y)\equiv 0$$

Аналогичным образом получается решение функционального уравнения (16).

Следует отметить, что $\tau^{(1)}(x) \equiv 0$, $\tau^{(2)}(y) \equiv 0$ при $\lambda_1 = \lambda_2$, которое соответствует решению задачи без включения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х. Решение задачи упругого конечного включения, входящего на границу полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ, Ест. н. 1981. №3.
2. Григорян Э.Х., Торосян Д.Р. Задача для упругой бесконечной пластины, усиленной крестообразным бесконечным стрингером. // Изв. НАН РА. Механика. 1994. Т. 47. №1-2. С. 3-13.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1984. 799с.

Ереванский
госуниверситет

Поступила в редакцию
22.05.2001