ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №4, 2001 Механика

УДК 539.5

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНООБРАЗНОГО РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Шекоян А.В.

Ա.Վ. Շեկոյան

Դիսիպացիայի ազդեցությունը հինգերորդ աստիճանի էվոլյուցիոն հավասարման սոլիտոնանման լուծման կայունության վրա

Ուսումնասիրված է սոլիտոնանման լուծման երկայնական կայունությունը: Ցույց է տրված, որ կլանումը բերում է այդ լուծման երկայնական անկայունության:

A.V. Shekoyan

Influence of Dissipation on Stability of Soliton-like Solution of Fifth Order Evolutionary Equation

Изучена продольная устойчивость солитонообразных решений эволюционного уравнения пятого порядка. Показано, что диссипация приводит к продольной неустойчивости решений.

Для описания нелинейных волн в различных средах часто пользуются нелинейными эволюционными уравнениями, как, например, для ионозвуковых волн в плазме [1], для акустической среды [2], для вязкой среды с полостями [3], для магнитных жидкостей [4].

Исследуемое эволюционное уравнение имеет вид [3]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} + \frac{L}{2}\Delta_\perp u = p\frac{\partial}{\partial \tau}\left(u\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) + D\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - E\frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} + N\frac{\partial^5 u}{\partial \tau^5} \tag{1}$$

где x – координата, вдоль которой распространяется волна, $\Delta_\perp$ – оператор Лапласа по координатам y и z; u есть компонента скорости частиц среды по нормали к поверхности волны; L, p, E, D и N – соответственно дифракционный, нелинейный, дисперсионный и диссипативные коэффициенты, не зависящие от координат и τ, $\tau = xc_n^{-1} - t$ (c_n – линейная нормальная скорость волны).

В статьях [3, 5] найдено солитонообразное решение уравнения (1). В работах [1-6] указан метод изучения поперечной устойчивости солитонообразных решений.

В статье [7] изучена поперечная устойчивость солитонообразных решений уравнения (1) и влияние на нее диссипативных членов. Показано, что диссипация не влияет на устойчивость.

Целью данной работы является изучение влияния диссипации на продольную устойчивость солитонообразных решений уравнения (1).

Введем обозначения

$$v = pu\,(6E)^{-1},\ x = E^{-1}t,\ T = \beta t,\ DE^{-1} = \beta\kappa,\ NE^{-1} = \beta\zeta \tag{2}$$

где β – малый постоянный параметр, характеризующий отклонение решения эволюционного уравнения от недиссипативного решения соответствующего уравнения.

С учетом обозначения (2) уравнение (1) примет вид:

$$-m\frac{\partial v}{\partial \theta}+6v\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3}=-\beta\frac{\partial v}{\partial T}+\beta\kappa\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\zeta\beta\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} \tag{3}$$

где $\theta=\tau+by+dz-\int\omega dt$, $m=\omega-L(2E)^{-1}\left(b^2+d^2\right)$, b и d – постоянные, определяющие наклон плоскости $\theta=\mathrm{const}$ солитона к плоскости волны $\tau=\mathrm{const}$. $\omega=\omega(T)$ связана со скоростью V_c солитона следующим соотношением:

$$V_c^2=(1+\omega)^2\left(c_n^{-1}+b^2+d^2\right)$$

Решение уравнения (3) будем искать в следующем виде:

$$v=v_0+\beta v_1+\beta^2 v_2+\ldots \tag{4}$$

где v_0 есть решение уравнения (3), когда $\beta=0$. Это решение имеет вид

$$v_0=2\eta^2\operatorname{sech}^2\eta\theta_1 \qquad \theta_1=\theta-\theta_0(T) \tag{5}$$

где θ_0 – некоторая добавочная фаза, подлежащая определению и характеризует диссипацию, $2\eta^2$ является амплитудой солитона, которая по обозначению равна $2\eta^2=m/2$.

Следует отметить, что решение (5) имеет смысл при выборе постоянных и заданий b, d таких, чтобы было $\eta^2>0$.

Подставляя (4) в (3) и приравнивая члены порядка β, β^2, получим систему уравнений

$$L_1(v_n)=F_n,\ (n=1,2) \tag{6}$$

где

$$L_1(v_n)=-4\eta^2\frac{\partial v_n}{\partial \theta}+6\frac{\partial}{\partial \theta}(v_0 v_n)+\frac{\partial^3 v_n}{\partial \theta^3} \tag{7}$$

$$F_1=\frac{\partial \theta_0}{\partial T}\frac{\partial v_0}{\partial \theta}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial T}\left(2v_0+\theta_1\frac{\partial v_0}{\partial \theta}\right)+\kappa\frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2}+\zeta\frac{\partial^4 v_0}{\partial \theta^4} \tag{8}$$

$$F_2=-6v_1\frac{\partial v_1}{\partial \theta}-\frac{\partial v_1}{\partial T}+\kappa\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2}+\zeta\frac{\partial^4 v_1}{\partial \theta^4} \tag{9}$$

Величины F_1 и F_2 должны удовлетворять условиям [5]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_0 F_1 d\theta=0 \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_0 F_2 d\theta=0 \tag{11}$$

Условия (10) и (11) есть следствия требования, чтобы в бесконечности v_n было ограничено.

Используя (10), (8), можно получить уравнение изменения в течение времени амплитуды солитона. Это уравнение имеет вид:

$$-\frac{3}{2}\eta^{-1}\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{4}{5}\kappa\eta^{2}+\frac{16}{7}\zeta\eta^{4}=0 \tag{12}$$

Для качественной оценки решим уравнение (12) при $\zeta=0$, т.е. предполагается, что есть только вязкостная диссипация, что осуществляется для широкого класса сред. Это решение имеет вид

$$\eta(T)=\eta(0)\left[1+\frac{16}{15}\kappa T\eta^{2}(0)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{13}$$

Из (13) видно, что амплитуда слабо затухает с течением времени, так как хотя κ конечна в силу (2), но T – медленное время, пропорциональное β.

Используя условие (11), после несложных, но длинных расчетов с учетом (13), для θ_0 получим следующее уравнение:

$$\frac{d^{2}\theta_{0}}{dT^{2}}+(1+qT)^{-1}\left(n\frac{d\theta_{0}}{dT}-p_{1}\right)=0 \tag{14}$$

где q, n и p_1 – постоянные, не зависящие от T. Они не влияют на устойчивость, важно, что по определению $n\neq 0$.

Решение уравнения (14) имеет вид

$$\theta_{0}=\frac{p_{1}}{n}T+(c_{1}q)^{-1}\left(1-nq^{-1}\right)^{-1}(1+qT)^{1-n/q}+c_{2}$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования. Из последнего выражения видно, что при $T\to\infty$, $\theta_0\to\infty$, т.е. солитонообразное решение неустойчиво в том смысле, как это определено в [6,7], а именно, из-за бесконечного роста фазы солитона существенно меняется колоколообразная форма солитона.

Таким образом, диссипация приводит к продольной неустойчивости солитонообразного решения.

Интересно рассмотреть также случай, когда $\theta_0=\theta_0(T,x_1)$, т.е. возмущение меняется не только во времени, но и в пространстве. Будем ограничиваться случаем, когда диссипация слабая, т.е в соотношениях (2) вместо последних двух соотношений будут следующие порядки:

$$DE^{-1}=\beta^{2}\kappa,\ NE^{-1}=\beta^{2}\zeta,\ x_{1}=\beta^{2}x$$

Тогда вместо уравнения (3) будет

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\beta^{2}\frac{\partial}{\partial x_{1}}\right)\left(-\omega\frac{\partial v}{\partial\theta}+\beta\frac{\partial v}{\partial T}+6v\frac{\partial v}{\partial\theta}+6\beta^{2}v\frac{\partial v}{\partial x_{1}}+\frac{\partial^{3}v}{\partial\theta^{3}}+3\beta^{2}\frac{\partial^{3}v}{\partial\theta^{2}\partial x_{1}}\right)=$$

$$=L(2E)^{-1}\left(b^{2}+d^{2}\right)\frac{\partial^{2}v}{\partial\theta^{2}}+\beta^{2}\kappa\frac{\partial^{3}v}{\partial\theta^{3}}+\beta^{2}\zeta\frac{\partial^{5}v}{\partial\theta^{5}} \tag{15}$$

Поступая, как и выше, можно получить уравнение (6), где сохранятся выражения (7) и (8), а для F_2 получится следующее

выражение: $$F_2=\kappa\frac{\partial^2 v_0}{\partial\theta^2}+\zeta\frac{\partial^4 v_0}{\partial\theta^4}-\frac{\partial v_1}{\partial T}+\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\frac{\partial\theta_0}{\partial\theta}-6v_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}-$$
$$-(\omega-12v_0)\frac{\partial v_0}{\partial\theta}\frac{\partial\theta_0}{\partial x_1}+4\frac{\partial^3 v_0}{\partial\theta^3}\frac{\partial\theta_0}{\partial x_1} \tag{16}$$

Для рассматриваемых порядков диссипации можно принять $\eta=\mathrm{const}$ [6,7,]. Учитывая также решение уравнения (6) при $n=1$, которое имеет вид

$$v_1=\frac{1}{2\eta^2}\frac{\partial\theta_0}{\partial T}\left(2v_0+\theta_1\frac{\partial v_0}{\partial\theta}\right)$$

оставляя в F_2 четные слагаемые по θ_1, из условия (11) можно получить для θ_0 следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2\theta_0}{\partial T^2}+\Lambda=0 \tag{17}$$

где Λ – постоянная, не зависящая от T и x.

Из уравнения (17) сразу следует, что солитонообразное решение продольно неустойчиво в диссипативной среде.

Заключение. В данной работе показано, что в отличие от поперечного возмущения солитонообразного решения, когда диссипация не влияла на устойчивость [7], при продольных возмущениях солитонообразное решение становится неустойчивым под влиянием диссипации (вязкостной, полостной, пузырьковой и т.д.), как во времени, так и в пространстве.

Автор благодарит члена-корреспондента НАН Армении, проф. А.Г. Багдоева за помощь в работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих срадах //ДАН СССР. 1970. Т.192. №4. С.753-756.
2. Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные волновые процессы в акукстике. М.: Наука, 1990. 234 с.
3. Багдоев А.Г., Шекоян Л.В. Нелинейные волны в твердой вязкой среде с полостями // Акустический ж. 1999. Т.45. №2. С.149-156.
4. Багдоев А.Г., Петросян Л.Г. Распространение в микрополярной электропроводящей жидкости // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1983. Т.36. №5. С.3-16.
5. Шекоян А. В. Приближенное трехмерное солитонное решение при наличии дисперсии и диссипации // Изв. НАН Армении. Физика. 1998. Т. 33. № 4. С.187-190.
6. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и методы обратной задачи. М.: Мир. 1987. 480 с.
7. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Поперечная устойчивость солитонов и волн модуляции с учетом диссипации // Изв. НАН Армении. Физика. 2000. Т.35. №2. С.85-89.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
29.10.2001