ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №4, 2001 Механика

УДК 539.5?

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗВУКОВЫЕ ПУЧКИ В ГАЗОПАРОЖИДКОСТНОМ ОБЛАКЕ

Багдоев А.Г., Мкртчян А. Р., Сафарян Ю. С.

Ա.Գ. Բագդոև, Ա.Ռ. Մկրտչյան, Յու.Ս.Սաֆարյան

Գազ-Հեղուկ-Գոլորշային ամպի մեջ ոչ գծային ձայնային ալիքների փունջը

Դիտարկվում է գազ-հեղուկ-գոլորշային միջավայրի ոչ գծային նեղ փնջերի տարածման խնդիրները, որտեղ հաշվի է առնված ջրային կաթիլների շառավիղների փոփոխականությունը: Ստացվել են էվոլյուցիոն և մոդուլյացիոն հավասարումները: Գտնվել են նրանց լուծումները նեղ փնջերի տեսքով և կատարվել են հաշվարկներ:

A.G. Bagdoev, A.R. Mertchyan, Ju.S. Safaryan

Non Linear Sonic Beams in Gaz-vapor-fluid cloud

Рассматривается задача распространения нелинейных узких пучков в газопарожидкостной среде с учетом переменности радиусов водяных капель. Получены эволюционные и модуляционные уравнения. Найдены их решения в виде узких пучков и проведены расчеты.

Рассмотрена задача о распространении нелинейных звуковых пучков в среде, состоящей из газа, пара и очагов его конденсации – сферических капель.

Предположено, что возмущения малы, скорости всех фаз одинаковы и имеет место для всех величин [1] $dx_0/dt << d\tilde{x}/dt$, где индекс ноль дает фоновое, а тильда – возмущенное состояние.

Уравнения движения трехфазной среды имеют вид [1], [2]

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\Delta p,\ \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\bar{v} = 0,\ \frac{dn}{dt} + n\nabla\bar{v} = 0,\ \frac{d\rho_v}{dt} + \rho_v\nabla\bar{v} = -\sigma(p_v - p^*) + q$$

$$\nabla\vec{q} = C_v\frac{dT}{dt} + P\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right),\ \nabla\left(\vec{q} + \tau_0\frac{d\vec{q}}{dt}\right) = æ\nabla^2 T + \frac{4\pi rDLn}{\rho}\left(\rho_v - \rho^*\right) - Q \tag{1}$$

где плотность газа ρ приближенно равна плотности трехфазной среды [2], ρ_v – плотность конденсирующегося пара, D – коэффициент диффузии пара в газе, $\rho^*(T,r)$ – плотность насыщенных паров, r – радиус капель, $\bar{v}$ – скорость частиц, $\vec{q}$ – тепловой поток, T – температура, P – давление, q, L, Q – постоянные,

$$q = 4\pi n_0 r_0 D\left(\rho_v^0 - \rho_0^*\right),\quad Q = \frac{4\pi r_0 DLn_0}{\rho_0}\left(\rho_v^0 - \rho_0^*\right) \tag{2}$$

n – концентрация капель.

Кроме (1) имеется уравнение движения капель [1]

$$\frac{dr}{dt} = \frac{D}{\rho_n r}\left(\rho_v - \rho^*\right) \tag{3}$$

где $\rho_ж$ – плотность воды, $P = \rho RT$ – уравнение идеального газа, $\sigma = 4\pi rnD$.

Последние два уравнения (1) можно записать в виде:

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \tag{4}$$

$$\frac{d\widetilde{p}}{dt} - a^2\frac{d\widetilde{\rho}}{dt} = \frac{æ}{C_v}(\Delta\widetilde{p} - \frac{p_0}{\rho_0}\Delta\widetilde{\rho}) - \tau_0\frac{æ}{C_v}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\widetilde{P} - \frac{p_0}{\rho_0}\Delta\widetilde{\rho}) + \\ + \left\{\frac{\widetilde{n}}{n_0}(\rho_v^0 - \rho_0^*) + (\widetilde{\rho}_v - \widetilde{\rho}^*)\right\}\sigma_0 L(\gamma - 1) \tag{5}$$

$æ$ – коэффициент теплопроводности, τ_0 – тепловая релаксация, C_v – теплоемкость, γ – показатель адиабаты, причем для квадрата скорости звука в первом приближении

$$a^2 = c^2 + 2(\gamma - 1)c^2\widetilde{\rho}/\rho_0 \tag{6}$$

Для получения эволюционного уравнения система (1)-(6) записывается для возмущений, вводится эйконал

$$\tau = \frac{x}{c_n} - t, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Big/_x = \frac{\partial}{\partial t}\Big/_\tau - \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big/_t = \frac{1}{c_n}\frac{\partial}{\partial \tau} \tag{7}$$

c_n – нормальная скорость невозмущенной волны.

Учитывая порядки возмущений для акустики [3]

$$\widetilde{\rho} \sim \varepsilon, \ \tau \sim \varepsilon, \ y, \ z \sim \varepsilon^{1/2}, \ V_x \sim \varepsilon, \ V_y, \ V_z \sim \varepsilon^{3/2} \tag{8}$$

и оставляя в уравнениях члены основного порядка 0(1), можно получить $c_n = c$,

$$\widetilde{\rho} = \frac{\rho_0}{c}V_x, \quad \widetilde{\rho}_v = \frac{\rho_v^0}{\rho_0}, \quad \widetilde{P} = c^2\widetilde{\rho}, \quad \widetilde{T} = (\gamma - 1)\frac{T_0}{\rho_0}\widetilde{\rho}, \quad \widetilde{n} = \frac{n_0}{\rho_0}\widetilde{\rho}, \quad \widetilde{r} = 0$$

Как показывает последнее уравнение в рассматриваемом эволюционном высокочастотном уравнении, следует записать в порядке ε^0 уравнение (3) в виде $\frac{dr}{dt} = 0$, $r = r_0$, т. е. имеет место решение [2] с постоянным радиусом капель. При этом получается эволюционное уравнение в порядке ε

$$2\frac{\partial^2\widetilde{\rho}}{\partial t\partial\tau} + c^2\left(\frac{\partial^2\widetilde{\rho}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\widetilde{\rho}}{\partial z^2}\right) + \frac{\gamma + 1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\widetilde{\rho}\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\tau}\right) = \\ = \frac{æ(\gamma - 1)}{c_v c^2\gamma}\frac{\partial^3\widetilde{\rho}}{\partial\tau^3} + \frac{\tau_0 æ(\gamma - 1)}{c_v c^2}\frac{\partial^4\widetilde{\rho}}{\partial\tau^4} - 2\nu_0\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\tau} \tag{9}$$

где $\nu_0 = -\frac{\tau_0\nu_1 L}{2c^2}(\gamma - 1), \quad \nu_1 = \left(2\rho_v^0 - \rho_0^*\right)\rho_0^{-1} - \frac{T_0(\gamma - 1)}{\rho_0}\frac{\partial\rho^*}{\partial T}$ (10)

Оставляя только первое и последнее слагаемые в (9), т. е. пренебрегая дифракцией, дисперсией, нелинейностью и теплопроводностью, можно получить значение $\widetilde{\rho}$, откуда вытекает, что поскольку $L > 0$, условие усиления или затухания волны согласно (10) имеет вид [2]:

$$\rho_v^0 \gtrless \frac{1}{2}\rho_0^* + \frac{T(\gamma-1)}{2}\frac{\partial\rho^*}{\partial T} \tag{11}$$

При наличии подаваемых на облако квазимонохроматических волн можно решение (9) искать в виде [3]

$$\widetilde{\rho} = \left\{A(t,\tau',y,z)e^{i\alpha\tau - \nu\tau' - i\varpi\tau'} + B(t,\tau',y,z)e^{2(i\alpha\tau - \nu\tau' - i\varpi\tau')} + k.c. \tag{12}$$

где α – основная частота невозмущенной волны, $\tau' = x/c$. Тогда повторяя выкладки [3], можно из (9) найти нелинейное уравнение Шредингера

$$i\alpha\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial\tau'}\right) + \frac{c^2}{2}\Delta_\perp A = (æ_1 + iæ_2)|A^2|A \tag{13}$$

где $æ_1 = -3\omega\xi$, $æ_2 = -(\nu - 3/2\nu_0)\xi$, $\omega = \alpha^3\tau_0 æ(\gamma - 1)(c_v c^2\gamma)^{-1}/2$

$$\nu = \frac{1}{2}\alpha^2 æ(\gamma-1)(c_v c^2\gamma)^{-1} + \nu_0,\ \xi = \alpha^3(\gamma+1)^2\frac{\exp(-2\nu\tau')}{32\rho_0^2\left\{9\omega^2 + (\nu - 3\nu_0/2)^2\right\}} \tag{14}$$

ω – модулированная частота, ν – линейная диссипация. Уравнения (13), (14) выведены для высоких частот α, не учитывают роль изменения r в функции x, y, z, t, и для конечных α недостаточно точно учитывают роль дисперсии и коэффициента ν, которые для небольших α должны быть учтены сравнением с нелинейным дисперсионным соотношением [1], которое можно получить, решая линеаризованную систему, получаемую из (1) – (5) в виде плоских волн, для которых все возмущения пропорциональны

$$\exp(ikx - i\Omega t) \tag{15}$$

Сравнивая (12) и (15), поскольку $\tau' = t$, можно считать

$$\Omega = \alpha + \omega,\ k = \frac{\alpha}{c} + i\frac{\nu}{c} \tag{16}$$

В силу малости теплового коэффициента L, можно из дисперсионного уравнения, получаемого подстановкой (15) в (1) – (5), получить

$$\frac{\Omega^2}{k^2} - c^2 = -(\gamma-1)L\left\{\left(i\alpha - \frac{D}{\rho_u r_0}\frac{\partial\rho^*}{\partial r} - \frac{D\delta_0}{\rho_u r_0^2}\right)\left(\sigma_0\frac{\partial\rho^*}{\partial T}\frac{\gamma-1}{\rho_0}T_0 - \frac{\sigma_0\delta_0}{\rho_0} - i\alpha\frac{\rho_v^0}{\rho_0}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(-\sigma_0\frac{\partial\rho^*}{\partial r} + \sigma_0\frac{\delta_0}{r_0}\right)\frac{D}{\rho_u r_0}\frac{\partial\rho^*}{\partial T}\frac{\gamma-1}{\rho_0}T_0\right\} \times \tag{17}$$

$$\times\frac{1}{(-i\alpha + \sigma_0)\left(i\alpha - \dfrac{D}{\rho_u r_0}\dfrac{\partial\rho^*}{\partial r} - \dfrac{D\delta_0}{\rho_u r_0^2}\right) - \dfrac{D}{\rho_u^2 r_0}\left(-\sigma_0\dfrac{\partial\rho^*}{\partial r} + \sigma_0\dfrac{\rho_0}{r_0}\right)} + \frac{\rho_v^0}{\rho_0}(\gamma-1)L$$

$$\delta_0 = \rho_v^0 - \rho_0^*$$

где пренебрежено теплопроводностью $æ = 0$.

Соотношение (17) с учетом малости $\Omega/k - c$ можно записать в виде, взяв порядки [1] $\partial\rho^*/\partial r = -r^*\rho^*/r_0^2$, $r^* = 10^7$см, $r_0 = 10^4$см, $\rho^*/\rho_0 = 10^{-2}$,

$$\frac{\rho_u}{\rho^*}=10^5,\quad \frac{\rho_v^0}{\rho^*}-1=10^{-5},\quad D=0.2\ \text{см}^2/\text{сек},\quad \sigma_0=0.25\ \text{сек}^{-1},\quad \frac{L}{c^2}=20,$$

$$\frac{\gamma-1}{\rho^*}T_0\frac{\partial\rho^*}{\partial T}-1=8,\quad f_2\left(\frac{\alpha}{c}\right)=-(\gamma-1)\frac{L}{2}\frac{\alpha^2}{c^2}\sigma_0\left(\frac{\partial\rho^*}{\partial T}\frac{\gamma-1}{\rho_0}T_0-\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)\left(\alpha^2-\omega_m^2\right)\frac{1}{D}$$

(18)

$$\omega_m^2=-\frac{2D^2\left(\rho_v^0-\rho^*\right)\frac{\partial\rho^*}{\partial r}}{r_0^3\rho_u^2},\ D'=\left(\alpha^2-\frac{2D\sigma_0\delta_0}{\rho_u r_0^2}\right)^2+\alpha^2\left(\sigma_0+\frac{D\partial\rho^*/\partial r}{\rho_u r_0}+\frac{D\delta_0^2}{\rho_u r_0^2}\right)$$

$$f_1\left(\frac{\alpha}{c}\right)=-(\gamma-1)\frac{L}{2}\frac{\alpha}{c^2}\sigma_0\left(\frac{\partial\rho^*}{\partial T}\frac{\gamma-1}{\rho_0}T_0-\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)\left\{\alpha^2\left(\sigma_0+\frac{D\partial\rho^*/\partial r}{\rho_u r_0}\right)+\frac{4D^2\delta_0^2\sigma_0}{\rho_u^2 r_0^4}\right\}\frac{1}{D'}$$

Отсюда получается для $f_2(\alpha/c)$ значение работы [1]. При этом условие усиления линейной волны $\operatorname{Im}K<0$ дает $f_2(\alpha/c)>0$ и (18) даст это условие в виде

$$\left(\frac{\partial\rho^*}{\partial T}\frac{\gamma-1}{\rho_0}T_0-\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)\left(\alpha^2-\omega_m^2\right)<0$$

Тогда при выполнении (11) условие усиления волны

$$\alpha^2-\omega_m^2\gtrless 0\ [1]$$

На основании (18) можно, используя метод [4] и [6], заменить в дисперсионном соотношении

$$\Omega-ck=f_1(k)+if_2(k) \tag{19}$$

$$\Omega\to i\frac{\partial}{\partial t},\quad k\to -i\frac{\partial}{\partial x}$$

Поскольку $x\approx ct$, можно написать $\Omega=\alpha+\omega$, $k=\alpha/c+i\nu/c$.

Применяются операторы (19) к (12), которое для стационарных пучков в одномерной задаче имеет вид

$$A(x)e^{i\theta}+B(x)e^{2i\theta},\ \theta=\alpha\tau-\omega t-i\nu t \tag{20}$$

Приравнивая к нулю члены с первой и второй гармоникой, использовав еще (16) и взяв нелинейный и дифракционный члены из (9), можно получить

$$\omega=f_1(\alpha/c),\quad \nu=-f_2(\alpha/c) \tag{21}$$

$$i\alpha\frac{\partial A}{\partial\tau'}+\frac{1}{2}c^2\Delta_\perp A=\frac{\gamma+1}{4\rho_0}\alpha^2A^*Be^{-2\nu\tau'} \tag{22}$$

$$2i\alpha\frac{\partial B}{\partial\tau'}+4\alpha B\left\{f_1(\alpha/c)-\frac{1}{2}f_1(2\alpha/c)+if_2(\alpha/c)-\frac{i}{2}f_2(2\alpha/c)\right\}+\frac{c^2}{2}\Delta_\perp B=$$

$$=\frac{\alpha^2(\gamma+1)}{2\rho_0}A^2 \tag{23}$$

где звездочка обозначает комплексно-сопряженное значение.

Уравнения (22), (23) можно решать для задачи об узких пучках численно [5]. Если отбросить в (23) дифференцируемые члены, то получится

$$B = \frac{(\gamma+1)\alpha}{8\rho_0} A^2 \frac{1}{f_1(\alpha/c) - f_1(2\alpha/c)/2 + if_2(\alpha/c) - if_2(2\alpha/c)/2} \qquad (24)$$

Из (22) получим уравнение (13), в котором

$$æ_1 + iæ_2 = \frac{(\gamma+1)^2\alpha^3}{32\,\rho_0^2} \frac{e^{-2\nu\tau'}}{f_1(\alpha/c) - f_1(2\alpha/c)/2 + if_2(\alpha/c) - if_2(2\alpha/c)/2} \qquad (25)$$

С учетом теплопроводности æ в $f_{1,2}(\alpha/c)$ нужно добавить

$\frac{1}{2}\frac{\alpha^3\tau_0 æ(\gamma-1)}{c_v c^2\gamma}$, $\frac{1}{2}\frac{\alpha^2 æ(\gamma-1)}{c_v c^2\gamma}$ соответственно. При больших $\alpha, f_2 \sim 1$, $f_1 \sim 0$ и с добавлением в $f_{1,2}$ членов с æ получится уравнение (13), (14). Таким образом, сращиванием уравнения модуляций, полученного из линейного дисперсионного соотношения (19) с уравнением (13), полученным из эволюционного уравнения, можно получить для небольших частот уточненное согласно (25) нелинейное уравнение Шредингера.

Разыскивая решение (18) в виде узких осесимметричных по r пучков [3,5]

$$A = bf^{-1}(\tau')\exp\left(-\frac{r^2}{2r_1^2 f^2} + i\varphi\right), \quad \varphi = \sigma(\tau') + \frac{r^2}{2R(\tau')} \qquad (26)$$

где $r^2 = y^2 + z^2$, r_1 — начальный радиус пучка, b — постоянная амплитуда на входе в среду ($x = 0$), $f(\tau')$ — безразмерная ширина пучка, σ — набег фазы, $\alpha c_n^{-1} R(\tau')$ — радиус кривизны фронта пучка; из (13), учитывая (26), можно получить уравнение

$$\frac{d^2 f}{d\tau'^2} = \frac{M}{f^3} + \frac{2æ_2\nu b^2}{\alpha f} \qquad (27)$$

где $$M = \alpha^{-2}\left(\frac{c^4}{r_1^4} + 2æ_1\frac{b^2c^2}{r_1^2} - æ_2^2 b^4\right) \qquad (28)$$

причем начальные условия для f имеют вид

$$f(0) = 1, \quad \frac{df(0)}{d\tau'} = F, \quad F = \frac{c^2}{\alpha R_0} - \frac{æ_2 b^2}{\alpha} \qquad (29)$$

где R_0 есть значение $R(0)$. Можно численно решить (27), (29) и получить законы фокусирования пучка, а из (26) — амплитуду волны в облаке. В случае, если $|\nu\tau'| \ll 1$, т. е. на небольших относительных участках с учетом малости диссипации можно в (27) отбросить второе слагаемое правой части и проинтегрировать указанное уравнение. Оно будет иметь вид [3], [5]

$$f^2(\tau') = \frac{M}{F^2 + M} + (F^2 + M)\{\tau' + F(F^2 + M)^{-1}\}^2 \qquad (30)$$

Уравнение Шредингера и его решение можно записать не только через $\widetilde{\rho}$, но через v_x и через $\widetilde{r}$, при этом следует учесть,что

$$v_x=\frac{c\widetilde{\rho}}{\rho_0},\quad \widetilde{r}=i\chi\widetilde{\rho},\quad \chi=\frac{D}{\alpha\rho_u r_0}\left\{\frac{\rho_v^0}{\rho_0}-\frac{\partial\rho^*}{\partial T}(\gamma-1)\frac{T_0}{\rho_0}\right\}$$

и поэтому, понимая под b_1 уже значения амплитуд V_x и $\widetilde{r}$ в начальном сечении, следует заменить нелинейный коэффициент $\Gamma^2\left(\Gamma=\frac{\gamma+1}{2}\right)$ на $\frac{\Gamma^2}{c^2}\rho_0^2$ и $\frac{\Gamma^2}{\chi^2}$ соответственно. При этом, поскольку для $\widetilde{\rho}$ на входе $b_1=0{,}1\rho_0, \alpha=300\frac{1}{\text{сек}}$, то значения $\widetilde{r}$ на входе $\chi\rho_0 0{,}1=0{,}5\cdot10^{-4}$ см.

Проведены расчеты по полученным формулам для $f_2(\tau_1)$. Для указанных выше числовых параметров, можно показать, что $D'=\alpha^4+0{,}16\alpha^2$. Имеет место

$$f_2(2\alpha/c)=f_2(\alpha/c),\quad f_1(2\alpha/c)=\frac{1}{2}f_1(\alpha/c) \tag{31}$$

$$æ_1+iæ_2=\frac{(\gamma+1)^2\alpha^3}{12c^2}\frac{1}{3f_1(\alpha/c)/4+if_2(\alpha/c)/2}$$

Здесь все формулы не зависят от того, для $\widetilde{\rho},\widetilde{r}$ или V_x они записаны.

Рассмотрим следующие варианты: $c=300$ м/сек, $b=0{,}1c$, $\frac{c_1}{\alpha R_0}=\frac{1}{10}$ 1/м

1. $\alpha=100$ сек$^{-1}$, тогда $f_2(\alpha/c)=-6{,}4\cdot10^{-2}$, $f_1(\alpha/c)=3\cdot10^{-4}$, $æ_1=-\frac{10^6}{32c^2}$, $æ_2=\frac{10^8}{24c^2}$, F=-500, $M=3\cdot10^6$. Для f приближенно $f^2=3\cdot10^6(x/c)^2+1$.

Взяв наибольшее значение x =10м и учтя, что $\nu=6{,}4\cdot10^{-2}$, получим затухание в виде $e^{-\nu\frac{x}{c}}=e^{-0{,}002}$, т. е. малое, и $f_2=10^4/3$, $f\approx100/1{,}7$; при x =1м $f=10/1{,}7$

2. $\alpha=1$ сек$^{-1}$, $f_2(\alpha/c)=-6\cdot10^{-2}$, $f_1(\alpha/c)=-3\cdot10^{-2}$, $æ_1=-2/c^2$, $æ_2=\frac{3}{c^2}$, F=30, $M=3\cdot10^{10}$ и при x =10м $f=(1{,}7)^{-1}\cdot10^3$, при x=1м $f=1{,}7\cdot10^2$, т.е. очень большое расхождение пучка.

3. $\alpha = 0.1\,\text{сек}^{-1}$, $f_2(\alpha / c) = -3 \cdot 10^{-3}$, $f_1(\alpha / c) = -16 \cdot 10^{-2}$, $æ_1 = -10^{-3} / c^2$, $æ_2 = -\frac{2 \cdot 10^{-5}}{c^2}$, $F=30$, $M = 3 \cdot 10^{12}$; при $x = 10$м $f = 10^5 / 1{,}7$; при $x = 1$м $f = 1{,}7 \cdot 10^4$.

В варианте $\alpha = 300\,\text{сек}^{-1}$ при $x=10$м получится $f=17$. Полученные значения f нужно подставить в формулу амплитуды $A_i = (b / f)e^{\frac{r^2}{r_0^2 f^2}}$. Кроме того, можно по формуле для f^2 найти его значения при любых x. Интересно отметить, что если с самого начала пренебречь нелинейностью (что согласуется с нашими выкладками), то следует в формулах полагать $æ_{1,2}=0$. Тогда получатся все предыдущие значения $f(\tau_1)$. Варианты 1, 2, 3 можно рассчитать по 8 уточненным по сравнению с (27) обыкновенным дифференциальным уравнениям, взяв начальные условия $x=0$, $f_{1,2}=1$, $c = 300$ м/сек, $\frac{1}{æ_{1,2}} \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{10}\,\text{м}^{-1}$, $A_1 = 0{,}1c$, $A_2 = 0{,}01c$, $\sigma_{1,2} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нетреба С. Н. Механизм усиления инфразвука при атмосферной конденсации. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1997. Т. 33. № 3. С. 412-413.
2. Немцов Б. Е. Когерентный механизм усиления звука при конденсации пара// Докл. АН СССР. 1990. Т. 314, № 2. С. 355-358.
3. Багдоев А. Г., Шекоян А. В. Нелинейные волны в твердой вязкой среде с полостями // Акустический журнал .1999, Т. 45. С.149-156
4. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
5. Багдоев А. Г., Шекоян А. В. Нелинейные стационарные волны модуляции в пьезодиэлектриках с шариковыми включениями // Изв. АН. Арм ССР. Механика. 1987. Т. XL. № 5. С.14-24.
6. Bagdoev A. G., Movsisyan L. A. Thermoclastic modulation waves in a non-linear plate // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. № 1. С.25-29.

Институт механики
НАН Армении
Горисский филиал Армянского
государственного инженерного университета

Поступила в редакцию
31.10.2001