ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №4, 2001 Механика

УДК 393.3

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТОТ ОДНОМОДНЫХ ФЛАТТЕРНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ

Д.М. Минасян

Դ.Մ.Մինասյան
Վերջավոր սալի մեկ մոդանի ֆլատերային տատանումների հաճախությունների հաշվարկումը

Դիտարկված է վերջավոր առաձգական սալի շրջհոսման խնդիրը նրա եզրերի տարբեր ամրակցման դեպքերում: Ուսումնասիրությունը հիմնված է «մխոցային» տեսության համեմատ ավելի ճշգրիտ մոտավորության վրա: Ցույց է տրված, որ Մախի փոքր թվերի դեպքում տեղի ունի անկայունություն (մեկ մոդանի ֆլատեր): Խնդրի լուծման համար կիրառված է համալուծ հավասարման մեթոդը: Ստացված է հաճախության հավասարումը և գնահատված է անկայունության տիրույթը ըստ Մախի թվերի: Ցույց է տրված, որ սալի հաստության աճը բերում է անկայունության տիրույթի լայնացմանը: Կատարված է թվային հաշվարկ հաճախությունների համար և կառուցված են գրաֆիկները:

D. M.Minassian
Calculation Of One-Mode Flutter Vibration Frequencies For Finite Plate

Рассмотрена задача сверхзвукового обтекания пластинки при малых числах Маха при разных граничных условиях закрепления кромок. В основу исследования положено приближение, по точности превосходящего "поршневую" теорию. Показано, что при малых числах Маха существует неустойчивость (одномодный флаттер). Для решения задачи применен метод сопряженного уравнения. Получено частотное уравнение и оценена зона неустойчивости по числу Маха. Показано, что увеличение толщины приводит к расширению этой зоны. Проведен численный анализ для частот и построены графики.

1. Рассматривается задача об устойчивости упругой пластинки, односторонне обтекаемой сверхзвуковым потоком идеального газа. Цилиндрические по форме малые изгибные колебания пластинки описываются уравнением [1]:

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\varepsilon\rho h\frac{\partial w}{\partial t}+D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+p[w]=0 \tag{1}$$

где $w(x,t)$ – прогиб, ρ, h, D – соответственно плотность, толщина и цилиндрическая жесткость пластинки, ε – коэффициент конструкционного демпфирования, а $p[w]$ – аэродинамическое избыточное давление, в общем не локально зависящее от прогиба. Эту зависимость в данной работе примем в виде [2]:

$$\frac{Dp}{Dt}=\rho_0 a_0\frac{D_1}{Dt}\left(\frac{Dw}{Dt}\right)+\chi\rho_0 a_0^3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad\left(\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{D_1}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(U-a_0)\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{2}$$

где ρ_0, a_0, U – невозмущенные параметры потока газа, χ – некоторый поправочный коэффициент. Отметим, что (2) без последнего слагаемого превращается в известное "поршневое" приближение.

Исключив давление из системы (1), (2), для прогиба получается уравнение, которое в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$\frac{M_0(M-1)}{\pi^4}\frac{\partial^5 w}{\partial\xi^5}+\frac{1}{\pi^4}\frac{\partial^5 w}{\partial\tau\partial\xi^4}+\lambda_0 M_0^2\left(M^2-M+\chi\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+M_0(M-1)\frac{\partial^3 w}{\partial\tau^2\partial\xi}+$$

$$+\left[\lambda_0 M_0 M+M_0(M-1)(\varepsilon_0+\lambda_0)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial\tau\partial\xi}+\frac{\partial^3 w}{\partial\tau^3}+(\varepsilon_0+\lambda_0)\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}=0 \qquad (3)$$

где

$$x=l\xi,\ \tau=\omega_0 t,\ \varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{\omega_0},\ \lambda_0=\frac{\rho_0 a_0}{\rho h\omega_0},\ \omega_0^2=\frac{\pi^4 D}{\rho h l^4},\ M_0=\frac{a_0}{\omega_0 l},\ M=\frac{U}{a_0} \qquad (4)$$

К четырем граничным условиям закрепления кромок пластинки следует добавить еще одно условие. Поскольку передняя кромка является сверхзвуковой, то, естественно там и ставится дополнительное "аэродинамическое" условие. Для вывода этого условия обратимся к формуле Аккерета-Буземана для сверхзвукового обтекания угла [3]. С учетом этой формулы получим следующее условие при $x=0$:

$$N_0[w]+\beta\rho_0 a_0 U\frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad (5)$$

где N_0 – укороченный дифференциальный оператор уравнения (1) без некоторых членов из-за соблюдения механических граничных условий, а β выбирается из теории аэродинамического подобия.

2. Будем исследовать стационарные колебания пластинки. Решение (3) представим в виде $w(\xi,\tau)=u(\xi)\exp(i\omega\tau)$. Обыкновенное дифференциальное уравнение пятого порядка для амплитудной функции u запишем в форме

$$L[u]=P[u]-\omega Q[u] \qquad (6)$$

где $P[u]=a_5 u^{(5)}+a_2 u^{(2)}$, $\qquad \omega Q[u]=a_4 u^{(4)}+a_1 u^{(1)}+a_0 u$

а коэффициенты a_n, часть которых зависит от ω, имеют вид

$$a_5=\frac{M_0(M-1)}{\pi^4},\ a_4=\frac{i\omega}{\pi^4},\ a_2=\lambda_0 M_0^2\left[M^2-M+\chi\right],\ a_0=(i\omega)^3+(i\omega)^2(\varepsilon_0+\lambda_0)$$

$$a_1=(i\omega)^2(M-1)M_0+(i\omega)M_0\left[\lambda_0 M+(M-1)(\varepsilon_0+\lambda_0)\right]$$

Для решения задачи применим приближенный метод, предложенный в работе [4]. Суть этого метода заключается в следующем. Поскольку исследуемая краевая задача несамосопряженная, то известные проекционные методы (Ритц, Бубнов-Галеркин, Бубнов-Петров и др.) не имеют строгого обоснования, как это имеет место в случае самосопряженных задач. Однако, если в уравнении неувязки

$$\int_0^1 L[u(\xi)]\, v^*(\xi) d\xi = 0 \tag{7}$$

в качестве проекторов выбрать решения сопряженного к (6) уравнения при специально подобранных граничных условиях, то, как доказывается в работе [4], метод обосновывается в той же степени, что и упомянутые методы для самосопряженных задач. В частности, в качестве вариационной задачи, она приобретает стационарный характер.

Уравнение, сопряженное к уравнению (6), имеет вид

$$L^*[v(\xi)] \equiv -\bar{a}_5 v^{(5)} + \bar{a}_4 v^{(4)} + \bar{a}_2 v'' - \bar{a}_1 v' + \bar{a}_0 v = 0 \tag{8}$$

где коэффициенты $\bar{a}_n$ комплексно сопряжены к a_n.

Интегрированием по частям (применяя формулу Грина) получим

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[vL[u] - u\bar{L}^*[v]\right] d\xi = \Big\{ a_5\Big[\left(u^{(4)}v + uv^{(4)}\right) - \left(u'''v' + u'v'''\right) + u''v''\Big] + \\ + a_4\Big[\left(u'''v - uv'''\right) - \left(u''v' - u'v''\right)\Big] + a_2\left(u'v - uv'\right) + a_1 uv \Big\}_0^1\end{aligned} \tag{9}$$

Граничные условия для сопряженной задачи выбираются таким образом, чтобы вместе с граничными условиями оригинальной задачи правая часть (9) равнялась бы нулю. Доказывается, что функционал ω

$$\omega \int_0^1 vQ[u] d\xi = \int_0^1 vP[u] d\xi \tag{10}$$

при независимых вариациях δu и δv, удовлетворяющих независимым граничным условиям уравнений (6) и (8), имеет абсолютный экстремум, вследствие чего $\delta\omega = 0$ при малых вариациях δu и δv. Как известно, при наличии некоторой связи между функциями u и v в виде дополнительного функционала (изопериметрическая задача) экстремум становится условным [8]. Естественно, в этом случае, общее число граничных условий становится на единицу меньше.

Уравнение частот получается из уравнения (7) для систем собственных функций u_i и v_j обычным способом. Здесь мы ограничимся только одним приближением и поэтому результаты будут носить качественный характер, а потеря устойчивости пластинки будет потерей по одной моде. Такая потеря обнаружена в точной постановке задачи для больших сверхзвуковых скоростей [5], а также в работах [6,7] при малых сверхзвуковых скоростях потока, однако, в несколько отличном от настоящего, приближении.

В одномодном приближении уравнение частот является кубическим

$$(i\omega)^3 + A(i\omega)^2 + B(i\omega) + C = 0 \tag{11}$$

$$A = \lambda_0 + \varepsilon_0 + M_0(M-1)I_1;\ B = \lambda_0 M_0 + M_0(M-1)(\lambda_0 + \varepsilon_0)I_1 + \pi^{-4} I_4$$

$$C = \lambda_0 M_0^2\left[M^2 - M + \chi\right]I_2 + \pi^{-4} M_0 (M-1) I_5$$

$$I_n = \int_0^1 v(\xi)u^{(n)}(\xi)d\xi \left[\int_0^1 v(\xi)u(\xi)d\xi\right]^{-1},\quad n = 1,2,4,5 \tag{12}$$

Коэффициент β в (5) принят равным единице.

По критерии Рауса-Гурвица число корней $i\omega$, имеющих положительные действительные части (неустойчивость), равно числу перемен знаков в ряду

$$1;\ A;\ AB - C;\ C$$

Если $A > 0$, то неравенство $C < 0$ определяет область выпучивания пластинки, а система неравенств $C > 0,\ AB - C < 0$, если она выполнима, определяет область флаттерной неустойчивости. Если имеет место $A > 0,\ B > 0$, то, очевидно, области флаттера и выпучивания не пересекаются, разделяясь областью устойчивости. Ниже в качестве иллюстрации описанного метода будут рассмотрены две задачи об устойчивости пластины.

3. Задача 1. Кромки пластинки шарнирно оперты. С учетом условия (5) имеем

$$u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0$$

$$u^{(4)}(0) + \gamma u'(0) = 0,\quad \gamma = 24\left(\lambda_0 M_0 M \pi^4\right)^{-1} \tag{13}$$

Задача 2. Кромки пластинки жестко защемлены. Здесь имеем

$$u(0) = u'(0) = u^{(4)}(0) = u(1) = u'(1) = 0 \tag{14}$$

В качестве пробной функции в первой задаче выбираем функцию [6]

$$u(\xi) = \left(\gamma + 1.5\xi^2 - \xi^3\right)\sin \pi\xi \tag{15}$$

а во второй задаче — функцию

$$u(\xi)=\xi\sin^2\pi\xi \tag{16}$$

Обе функции удовлетворяют соответствующим граничным условиям и представляют главную моду колебаний. Отметим, что эти функции не единственны. Например, во второй задаче можно выбрать следующие функции:

$$u(\xi)=\left(\xi^2-\xi\right)^2(\xi+2) \tag{17}$$

$$u(\xi)=\left(\xi+6\pi^{-2}\xi^3-\left(1+6\pi^{-2}\right)\xi^4\right)\sin\pi\xi \tag{18}$$

Сначала рассмотрим задачу 1. С учетом граничных условий (12) получим

$$\begin{aligned}&u^{(4)}(1)[a_5v(1)]+u^{(3)}(1)\left[-a_5v^{(1)}(1)+a_4v(1)\right]+u^{(3)}(0)\left[-a_5v^{(1)}(0)+a_4v(0)\right]+u^{(1)}(1)\times\\&\times\left[-a_5v^{(3)}(1)+a_4v^{(2)}(1)+a_2v(1)\right]-u^{(1)}(0)\left[-a_5v^{(3)}(0)+a_4v^{(2)}(0)+(a_2-\gamma)v(0)\right]=0\end{aligned} \tag{19}$$

Из условия (19) граничные условия сопряженной задачи получаются однозначно. Для этого следует приравнять нулю пять выражений внутри квадратных скобок. Однако в этом случае частотное уравнение (10), из-за вхождения ω в граничные условия сопряженной задачи, получается более высокого порядка, вследствие чего частотное уравнение будет содержать частоты и высших мод. Для того, чтобы граничные условия для сопряженной функции v не содержали ω, сделаем специальный подбор граничных условий. Примем следующие четыре граничных условий $v(0)=v''(0)=v(1)=v''(1)=0$, а вместо пятого условия построим функционал:

$$J=u^{(3)}(1)v^{(1)}(1)+u^{(1)}(1)v^3(1)-u^3(0)v^{(1)}(0)-u^{(1)}(0)v^3(0) \tag{20}$$

и потребуем выполнения условия $J=0$. Как уже было отмечено, в этом случае экстремум получается условным. Правда, результаты в некоторой степени потеряют в точности, однако, то, что уравнение частот будет относиться только к главной моде, дает определенное преимущество.

Симметричная форма (20) позволяет в наипростейшем варианте выбрать

$$v(\xi)=u(1-\xi) \tag{21}$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет, как четырем граничным условиям, так и условию $J=0$. Таким образом, имеем

$$v(\xi)=\left(\gamma+0.5-1.5\xi^2+\xi^3\right)\sin\pi\xi \tag{22}$$

Во второй задаче, приняв четыре условия для функции $v(\xi)$

$$v(0)=v^{(1)}(0)=v(1)=v^{(1)}=0 \tag{23}$$

и введя дополнительный функционал

$$J=u^{(2)}(1)v^{(2)}(1)-u^{(2)}(0)v^{(2)}(0) \tag{24}$$

подобно выше описанию, построим сопряженные к (16), (17) и (18) функции

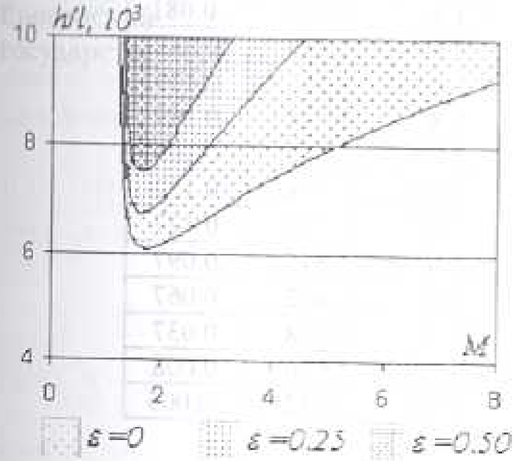
$$v(\xi)=(1-\xi)\sin^2\pi\xi \tag{25}$$

$$v(\xi)=\left(\xi^2-\xi\right)^2(3-\xi) \tag{26}$$

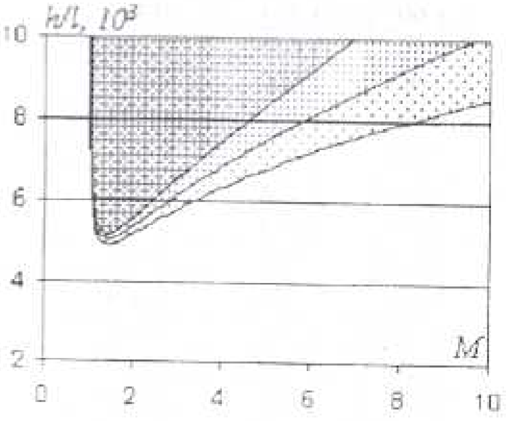
$$v(\xi)=\left(1-\xi+6\pi^{-2}(1-\xi)^3-\left(1+6\pi^{-2}\right)(1-\xi)^4\right)\sin\pi\xi \tag{27}$$

соответственно.

Подставляя функции (22) и (25) в интегралы (11), получаем коэффициенты частотного уравнения для каждой краевой задачи.
На фиг.1 (шарнирное опирание) и фиг.2 (защемление) представлены области устойчивости в плоскости параметров $h/l, M$.



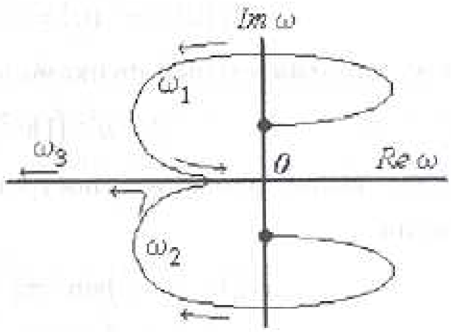
Фиг. 1



Фиг. 2

На этих графиках область неустойчивости (флаттера) заштрихованы. Заметим, что с возрастанием толщины нижняя критическая скорость потока почти неизменна, в то время как верхняя критическая скорость весьма чувствительна к изменению числа Маха. Кроме того, как видно из графика, имеется нижняя грань значения толщины пластинки, ниже которой она устойчива. Отметим также, что влияние конструкционного демпфирования сказывается в обычном для данного механизма характере — а именно, в сужении области неустойчивости.

На фиг.3 приведены годографы движения корней частотного уравнения в зависимости от числа Маха. Флаттерным колебаниям соответствуют ветви в правой полуплоскости комплексной плоскости ω. Числовые значения частот и инкремента для различных значений конструкционного демпфирования и способов закрепления кромок пластинки представлены табл. 1-4. В основу вычислений таблиц и построений графиков выбраны пара сопряженных функций (15) и (22) в первой задаче и пара функций (16) и (25) — во второй задаче. Вычисления при другом выборе пары во второй задаче существенно не отличаются.



Фиг. 3

Таблица 1

M	$h/l=10^{-2}$, $\varepsilon=0.00$	
	$Im\, i\omega$	$Re\, i\omega$
1.00	1.174	-0.411
2.00	1.635	0.366
3.00	1.900	0.261
4.00	1.943	0.157
5.00	1.923	0.096
6.00	1.888	0.059
7.00	1.851	0.036
8.00	1.814	0.020
9.00	1.779	0.009
10.00	1.746	0.000
10.25	1.738	0.000
10.50	1.731	-0.003

Таблица 2

M	$h/l=10^{-2}$, $\varepsilon=0.50$	
	$Im\, i\omega$	$Re\, i\omega$
1.30	0.994	-0.081
1.40	1.139	0.041
1.60	1.357	0.139
1.80	1.514	0.169
2.00	1.633	0.169
2.20	1.724	0.152
2.40	1.793	0.127
2.60	1.845	0.097
2.80	1.882	0.067
3.00	1.908	0.037
3.20	1.926	0.008
3.30	1.932	-0.005

Таблица 3

M	$h/l=10^{-2}$, $\varepsilon=0.00$	
	$Im\, i\omega$	$Re\, i\omega$
1.0	1.734	-0.245
2.0	3.975	0.999
4.0	4.523	0.546
6.0	4.450	0.307
8.0	4.264	0.183
10.0	4.036	0.109
12.0	3.783	0.061
14.0	3.506	0.027
16.0	3.202	0.002
17.0	3.039	-0.008

Таблица 4

M	$h/l=10^{-2}$, $\varepsilon=0.50$	
	$Im\, i\omega$	$Re\, i\omega$
1.0	1.731	-0.485
2.0	3.990	0.798
3.0	4.436	0.527
4.0	4.540	0.313
5.0	4.524	0.167
6.0	4.459	0.065
7.0	4.370	-0.009

Автор благодарит К.Б.Казаряна за советы, уточняющие некоторые положения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой неустойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339с.
2. Минасян М.М., Минасян Д.М. Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Докл. НАН РА. 2001. Т.1, №1. С.49-54.
3. Бай Ши-и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. Перевод с англ., М.: ИЛ, 1962. 410с.
4. Prasad S. N., Herrmann G. Adjoint Variational Methods in Nonconservative Stability Problems // Int. J. Solids Struct., 1972, vol.8, pp.29-40.
5. Dowell E.H. Flutter of a Buckled Plate as an Example of Chaotic Motion of a Deterministic Autonomous System. // Jour. Of Sound Vibr. (1982) 85(3), pp. 333-344.
6. Белубекян М.В., Минасян М.М. К проблемам флаттера пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА. Механика. 1997. Т.50. №2. С.27-35.
7. Белубекян В.М., Минасян М.М. О нелинейном флаттере пластин в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН РА. Механика. 1999. Т.52. №4. С.38-45.
8. Коша А. Вариационное исчисление. М.: «Высшая школа», 1983. 280с.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
26.11.2001